This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

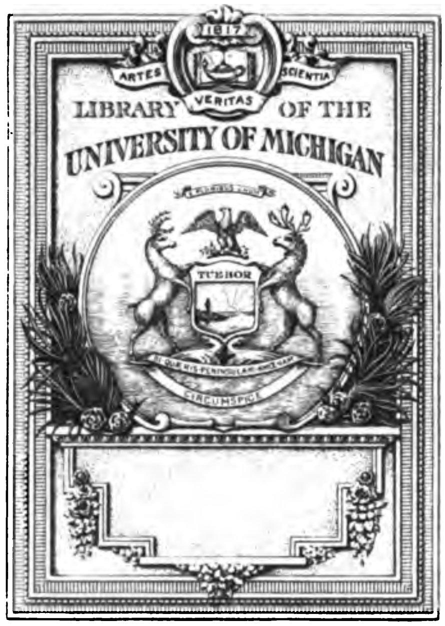
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 448783



The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

Q.
80
.A.
17

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER
Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,
Matheſeos Profeſſorum.

TOMI TERTII PARS I.



GENEVÆ,
Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.
MDCCXLII.

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI DE ROHAN

DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO & PRINCIPI ARGENTINO

&c. &c. &c.

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciſcus* JACQUIER.

William H. Butts

MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis noſtri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ ſunt præclara de fluxu & refluxu maris opera quæ anno 1740. à Celeberrimâ Pariſienſi Academiâ præmio fuere condecorata. Tot & tam eximia in hiſce operibus continentur quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, ſed etiam ad generales attractionis leges univerſamque Aſtronomiam referuntur ut Clariſſ. Vir D. J. L. CALANDRINUS cujus conſilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, ſi prædicta opuſcula iis adjungeremus propoſitionibus quas de fluxu & refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, niſi tertium librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religioſè ſervemus legem, ſinè quâ honeſtus ſcriptor nemo eſſe poteſt, ut ſcilicet nihil inſigne ex aliquo Autore in uſum noſtrum convertamus quin ei quod ſuum eſt, dùm locus occurrit, tribuatur, ſpecialem nihilominùs grati animi ſignificationem profiteri volumus Clariſſimis omnique

lau-

laude noſtrâ majoribus Viris DD. Caſſini, De Mairan, De Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc noſtra Commentaria. Sed tanta ſunt in univerſum hocce noſtrum opus prælaudati Clariſſ. D. J. L. Calendrini beneficia, ut huic Doctiſſimo Viro pares meritis gratias referre non poſſimus.

Jam ſub prælo eſt altera & ultima commentariorum noſtrorum pars; quia verò nullus eſt tam mediocris ingenii, quem uſus & exercitatio non edoceant, hinc factum eſt ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice ſimul cum reliquâ tertii Libri parte juſti voluminis molem component.

Datum Romæ
in Contu. SSæ. Trinitatis
Anno 1742.

PP.

PP. LE SEUR ET JACQUIER

DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro telluris motæ hypotheſim aſſumit. Autoris propoſitiones aliter explicari non poterant, niſi eâdem quoquè factâ hypotheſi. Hinc alienam coacti ſumus gerere perſonam. Cæterum latis à ſummis Pontificibus contrà telluris motum Decretis nos obſequi profitemur.

EDI-

EDITORIS MONITUM.

INtelleximus quoſdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis PP. Le Seur *&* Jacquier, *quaſi ſæpius Newtoni mentem non attigiſſent; ne autem ipſis vitio vertatur quod conceſſerunt ob ipſorum abſentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda ab Editore ipſo mutarentur ſive levia ſive gravia forent, monendum puto me Autorum diligentiam & Doctrinam nuſquam deſideraſſe, correctiones quas feci leviſſimi eſſe momenti, nec eſſe tales ut propter ipſas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, & aſteriſco notatas fuiſſe, non quod aliquid laudis exinde ſperaverim, ſed quia ſi illic aliquid vitii irrepſerit æquum eſt ut in Editorem non in Autores ea culpa transferatur; Ne ſimilibus cavillationibus occaſio in poſterum detur, tales diſtinctionis notulæ non adhibebuntur in II*ª *hujus Voluminis parte, in quâ ſperamus calculos Newtonianos circa Lunam potiſſimum ſatis intricatos, in apertam lucem expoſitum iri.*

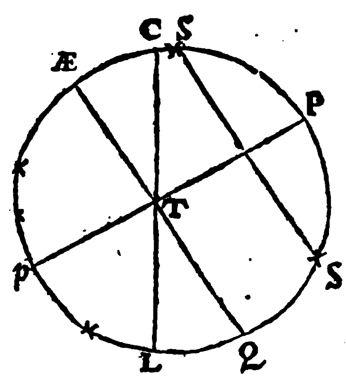
INTRODUCTIO
AD
TERTIUM LIBRUM.
Phil. Natural. JS. NEWTONI.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi ſyſtema paucis exponitur, & prima Aſtronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. FIGURA telluris eſt propemodùm ſphærica, & ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum ſtagnantium ſuperficiei perpendicularis eſt) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipſes Lunares in quibus umbra terreſtris, in quamcumque cœli plagam vergat, eſt ſemper ad ſenſum circularis.

2. Spectatori terreſtri cælum apparet tanquam ſuperficies ſphærica concava, ſtellis plurimis diſtincta, cujus ipſe ſpectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occaſum æquabiliter convertitur, & 24 circiter horis integram revolutionem abſolvit. Puncta illa oppoſita P & p circà quæ rotari videtur ſphæra, *Poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conſpicuus eſt, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipſi verò oppoſitus p antarcticus ſeu auſtralis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *Axis mundi* vocatur.

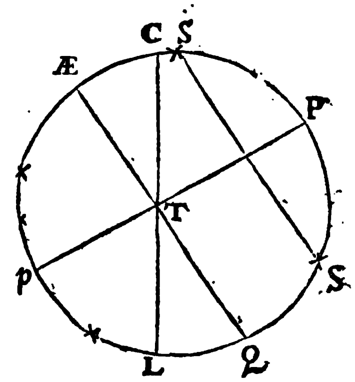


Æquator ſivè *æquinoctialis* eſt circulus ſphæræ cæleſtis maximus cujus poli iidem ſunt cum polis mundi; proindéque ſphæram mundanam dividit in duo hemiſphæria, Boreale Æ P Q, in quo eſt polus borealis P, & auſtrale Æ p Q, in quo eſt polus auſtralis p.

3. Stellæ ſingulæ, ut S, in circulis S s æquatori Æ Q parallelis, communi ſphæræ cæleſtis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominan-

tur quæ eandem inter ſeſe diſtantiam perpetuò ſervant; *Erratica* verò ſeu *Planeta* vocantur quæ diſtantias ſuas à fixis in dies mutant & motu proprio ferri conſpiciuntur. Planetæ ſunt ſeptem ſuis propriis ſignis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ & Saturnus ♄; Terræ verò ſignum eſt hoc ♁.

4. *Ecliptica* eſt circulus ſphæræ maximus quem centrum ſolis motu proprio ab occaſu ad ortum ſingulis annis deſcribere videtur. Hic circulus Æquatorem obliquè interſecat ſub angulo inclinationis Æ T C, graduum 23 $\frac{1}{2}$ circiter. Puncta duo oppoſita in quibus æquator & ecliptica ſeſe mutuò ſecant, *Æquinoctialia* dicuntur quod ſole in iis poſito dies ubique terrarum nocti æqualis ſit, & indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale eſt undè Sol motu proprio versùs polum borealem aſcendit in Eclipticâ, autumnale verò undè Sol versùs polum auſtralem deſcendit, ideóque æquinoctium eſt vernale vel autumnale. Puncta *Solſtitialia* ſunt Eclipticæ puncta duo oppoſita quæ à punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante diſtant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore & in quibus aſcenſus Solis ſuprà æquatorem & deſcenſus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æſtivum appellatur quo nimirum terminatur Solis aſcenſus ſuprà æquatorem; poſterius brumale vel hybernum. Dicuntur ſolſtitialia quod ſole in iis verſante, per aliquot dies ex eodem Horizontis puncto oriri, & é regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta ſolſtitialia ingreditur vocatur Solſtitium, quod ideò vel æſtivum vel brumale eſt.



Signum cæleſte eſt duodecima pars eclipticæ & in 30 gradus rurſus dividitur. Primi Signi principium eſt in puncto æquinoctiali vernali à quo ſigna ab occaſu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex ſunt borealia per borealem eclipticæ partem diſtributa, hiſque nominibus ac characteribus deſignata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam auſtralia videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Piſces ♓. Aries, Taurus ac Gemini quæ inter punctum æquinoctiale vernum & punctum ſolſtitiale æſtivum continentur dicuntur ſigna vernalia; Cancer, Leo, Virgo à ſolſtitiali æſtivo ad æquinoctiale autumnale numerata appellantur æſtiva; Libra, Scorpius & Sagittarius autumnalia;

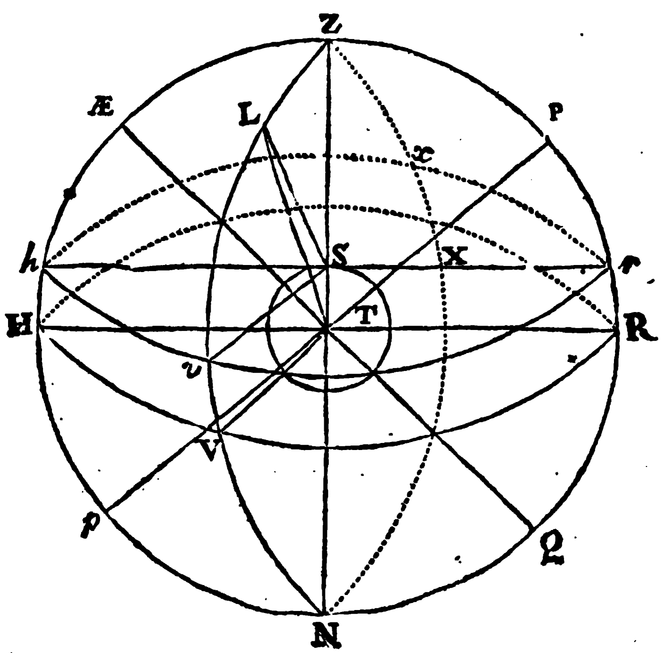
lia; Capricornus, Aquarius & Piſces, hyberna. Signa aſcendentia à puncto ſolſtitiali hyberno ad æſtivum, deſcendentia verò à ſolſtitiali æſtivo ad hybernum computantur.

5. *Zodiacus* eſt ſphæræ cæleſtis portio ſeu zona duobus circulis Eclipticæ parallelis & gradibus 8 vel 9 hinc indè ab Eclipticâ diſtantibus terminata, ſub quâ planetæ omnes motus ſuos abſolvunt. Dum planeta ab occaſu in ortum ſeu ſecundum ordinem ſignorum, aut quod idem ſonat, in ſigna conſequentia nimirùm ab ariete ad taurum, à tauro ad geminos &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cum ipſius motus proprius ceſſare videtur, ſeu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eumdem ſitum fixarum reſpectu ſervans, ſtationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà ſignorum ordinem ſeu in antecedentia ut à tauro ad arietem, ab ariete ad piſces &c. proprio motu incedit.

6. Luna & Sol ſunt ſemper directi; at cæteri planetæ tum ſuperiores, videlicet, Saturnus, Jupiter & Mars, tum inferiores, nimirum, Venus & Mercurius, directi deindè ſtationarii & poſteà retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in conſequentia peragrant, ſunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum ſuam abſolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 & horis 7 circiter, Venus autem & Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità conſtanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus nec Mercurius ultrà 28 à Sole digrediatur, id eſt, angulus maximus ſub quo diſtantia Veneris aut Mercurii à Sole è Terrâ conſpicitur, gradus 47 vel 28 nunquam ſuperat.

7. *Circuli declinationis* ſeu *circuli horarii* ſunt circuli maximi per mundi polos tranſeuntes & proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuſlibet in ſphærâ mundanâ *declinatio* eſt arcus circuli declinationis inter ſidus vel datum punctum & æquatorem interceptus. *Aſcenſio recta* ſideris eſt arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis ſideris illius comprehenſus ac ſecundum ordinem ſignorum numeratus. *Circuli latitudinis* ſiderum ſunt circuli ſphæræ maximi per polos eclipticæ & per ſidera tranſeuntes, atquè ideò Eclipticæ perpendiculares. Hinc *Latitudo* ſideris eſt arcus circuli latitudinis inter ſidus & Eclipticam interceptus. *Longitudo* ſideris eſt arcus eclipticæ ab arietis initio versùs ortum ſeu in conſequentia uſquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum interſectionis Eclipticæ cum circulo latitudinis ſideris dicitur locus ſideris Eclipticus ſive locus in Eclipticâ vel locus ad Eclipticam reductus.

8. Si per locum quemvis S in ſuperficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta ZSN quæ ſphæræ cæleſti occurrat in Z & N, punctum Z dicitur loci S *Zenith* ſeu vertex, & punctum N vocatur ejuſdem loci *Nadir.* *Horizon ſenſibilis* ſeu apparens loci S, eſt ſphæræ circulus h v r x centrum habens in S, & polos in Z & N. *Horizon*



rationalis ſeu verus eſt circulus HVRX, centrum habens in T, & polos in Z & N, ideóque horizonti ſenſibili parallelus.

Circulus verticalis eſt circulus quilibet maximus ZVNX per Zenith atquè Nadir & per aliud quodcumque punctum in ſphærâ mundanâ tranſiens, ideóque horizonti perpendicularis.

Meridia-

Meridianus eſt circulus verticalis PZNR per polos mundi P & p tranſiens, ac proindè æquatori perpendicularis & circulos omnes æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani Meridiani cum plano horizontis HR vel hr dicitur *Linea meridiana*. Circulus *Verticalis primarius* eſt ille verticalis qui per polos meridiani tranſit. Sit ZVNX verticalis primarius horizontem rationalem HVRX interſecans in V & X, quem meridianus etiam ſecat in H & R. Puncta quatuor R, X, H, V, dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemiſpherio boreali cardo *Septentrionis*, H cardo *Meridiei*, V ad partes Orientis cardo *Orientis* & punctum oppoſitum X cardo *Occidentis*.

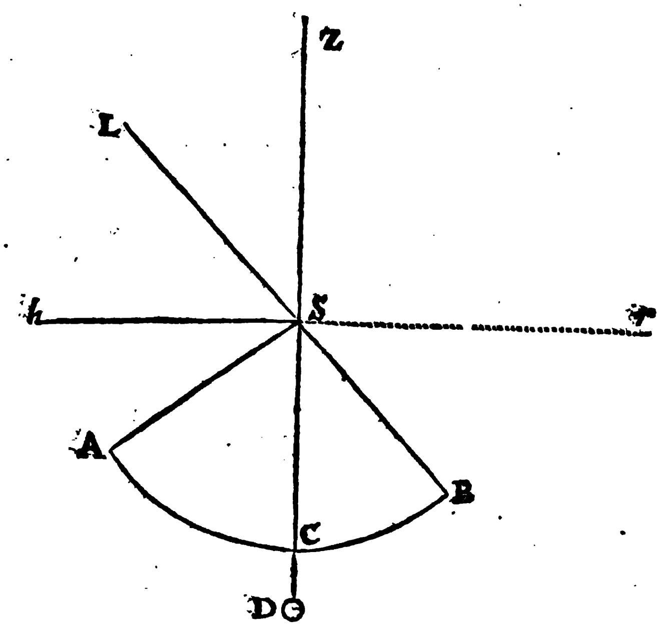
9. Diſtantia horizontis apparentis ab horizonte vero ſivè telluris ſemidiameter ST, ſenſibilis non eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (Lunâ ferè ſolâ exceptâ) diſtantiis, & ideò terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam hujus ſphæræ centrum conſiderari poteſt. Nam omnes ferè Aſtronomorum obſervationes id ſupponunt & computa indè inita cum phænomenis cæleſtibus quadrant. Porrò quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ ſtellarum uſurpari poteſt, ità fingi poteſt in ſpatiis cæleſtibus ſphærica ſuperficies cujus tanta ſit diameter ut illius reſpectu evaneſcat Solis vel ſtellæ datæ à Tellure diſtantia, & hujus ſphæræ centrum poterit collocacari indifferenter vel in terrâ vel in ſole aut in ſpatio intermedio.

10. *Altitudo poli P ſuprà horizontem* eſt meridiani arcus PR à polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui ZÆ à vertice Z ad æquatorem ÆQ intercepto; Nam ſi ex circuli quadrantibus ZPR & ÆZP ſubducatur arcus communis ZP, remanebunt arcus æquales ÆZ & PR. *Altitudo æquatoris ſuprà horizontem* eſt arcus meridiani ÆH, inter æquatorem & horizontem interceptus; æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui ZP, quod, ablato ex quadrantibus HÆZ & ÆZP communi arcu ÆZ manifeſtum eſt. *Altitudo apparens* ſideris vel puncti cujuſlibet L in ſphærâ mundanâ, eſt angulus LSv, ſub quo ex centro S horizontis ſenſibilis videtur arcus Lv circuli verticalis per L ducti uſquè ad horizontem ſenſibilem hvrx. Altitudo vera puncti L eſt angulus LTV, ſeu ipſius menſura arcus LV in circulo verticali per L ducto uſquè ad horizontem rationalem HVRX. Undè (9) ſtellarum fixarum & ſolis altitudines apparentes & veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ ſuprà retulimus & alia quæ deinceps referemus obſervari potuerint, paucis exponemus; & quidem ab obſervatione altitudinis apparentis ſiderum quæ præcipuum

 totius

totius Aſtronomiæ fundamentum eſt, initium ducemus. Circuli quadrans S A B cujus limbus A C B in gradus & minuta diviſus eſt ità ſtatuitur ut filum S C D pondere D tenſum ideóque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut ſidus L cujus altitudo obſervanda eſt, per dioptras aut per teleſcopium lateri S B affixum videatur in eodem latere S B producto. Quo facto, habetur arcus A C, menſura altitudinis apparentis L S h; nam cum filum è quadrantis centro S, pendens ſit ſemper in plano verticali, quadrans A S B erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. XI.) ideóque h r ad S D perpendicularis, erit interſectio

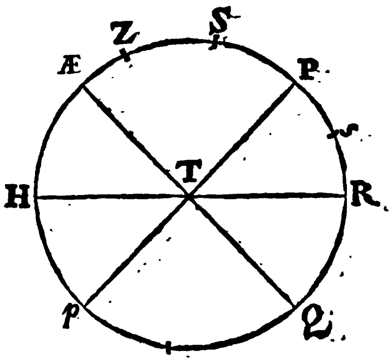


horizontis ſenſibilis & plani verticalis per L ducti, atquè angulus L S h ſideris L altitudo apparens. Sed ſi ab angulis rectis L S A, & h S D, ſubducatur communis h S A, remanent æquales anguli L S h & A S C; hujus verò menſura eſt arcus A C.

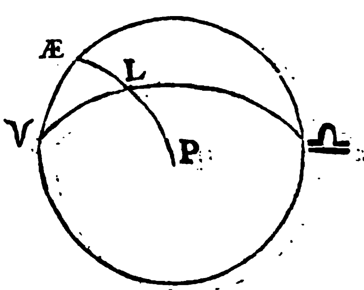
12. Hinc deſcribi poteſt linea meridiana ſuprà quam ſi ſtatuitur perpendiculariter quadrans circuli, obſervari poterit altitudo meridiana ſideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ ſuprà horizontem eminent & qui arcus diurni dicuntur, biſariam ſecat (per El. XI. 19. & 4., & El. III. 30.) cum ſit illis circulis & horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, & propterea ſi in circulo quolibet diurno ſumantur puncta duo hinc indè orientem & occi-

occidentem versùs à meridiano æquidiſtantia, ea puncta erunt ſuprà horizontem ſenſibilem æquè alta, & contrà ſi æquè alta ſint, à meridiano hinc indè æquidiſtabunt. Quarè ſi ſtellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo obſervetur versùs orientem, & deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem & expectetur donec ſtella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte interſectiones comprehenſum, erit linea meridiana.

13. Datis per obſervationes duabus ejuſdem ſtellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis SR, sR, dantur poli P & æquatoris ÆQ altitudines PR & ÆH ſuprà horizontem HR. Nam datis arcubus SR & sR datur eorum differentia Ss; & quia ſtella S circulum deſcribit æquatori parallelum (3) cujus P eſt polus, erit SP = sP; undè datur Ps, cui ſi addatur sR, habebitur arcus PR altitudo poli. Eſt autem HÆ æqualis arcui ZP ſeu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò HÆ altitudo æquatoris.



14. Datâ ſtellæ S altitudine meridianâ SR cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio SÆ; eſt enim arcus SÆ æqualis differentiæ arcuum ÆPR & SR. Sic obſervando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis & indè eruendo ipſius declinationem, determinatum eſt planum eclipticæ & ejus ad æquatorem inclinatio ſeu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa eſt $23\frac{1}{2}$ grad. aut verius 23°. 29'. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum ſolis declinatione, datur aſcenſio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈ Æ ♎ æquator, ♈ L ♎ ecliptica, & PLÆ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, & datis in triangulo ſphærico Æ♈L rectangulo in Æ, latere ſeu declinatione Solis LÆ, & angulo Æ♈L, 23° 29', dantur latus ♈Æ aſcenſio recta ſolis, ſeu puncti L, & latus ♈L quod eſt ejuſdem longitudo, imò datur etiam angulus ÆL♈, quem circulus declinationis efficit cum Eclipticâ; Cum verò præter angulum Æ♈L, data fuerit longitudo ♈L, dabitur tum ♈Æ aſcenſio recta, tum ÆL, declinatio.



15. Si

15. Si quotidie obſervetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipſius declinatio, aſcenſio recta & longitudo, dabuntur motus Solis in Eclipticâ, motus puncti declinationis in Æquatore & temporis momenta quibus declinatio vel nulla eſt vel maxima, ſeu dabuntur Æquinoctiorum & Solſtitiorum momenta (4). Porrò obſervatum eſt nec longitudinem nec aſcenſionem rectam ſolis uniformiter creſcere & proindè dies ſolares eſſe inæquales. Nam dies ſolaris eſt tempus unius revolutionis diurnæ ſolis à meridiano ad eundem meridianum; dies ſidereus ſeu primi mobilis (qui ſemper idem manet) eſt tempus revolutionis diurnæ ſtellæ fixæ à meridiano ad eumdem. Undè cum Sol motu proprio ab occaſu in ortum feratur, ſi ſtella fixa & Sol in eodem meridiano ſimul obſerventur, ſtella ad eumdem meridianum priùs redibit quam Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen ſi aſcenſio recta Solis ex ipſius motu proprio in Eclipticâ uniformiter creſceret, dies Solares, licet diebus ſidereis longiores, eſſent tamen inter ſe æquales; Quarè cum Solis aſcenſio rectâ non augeatur uniformiter, neceſſe eſt ut dies Solares inæquales ſint. Simili modo collatis inter ſeſe Æquinoctiorum & Solſtitiorum obſervationibus deprehenſum eſt Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in ſignis borealibus quam in ſignis auſtralibus; ac tandem comparando antiquas obſervationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel ſolſtitiorum cum recentioribus, definita eſt quantitas anni æquinoctialis, ſivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno ſolſtitio ad idem ſolſtitium progreditur & ab Authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Caſſino & Blanchinio inventa eſt $365^{dier.}\ 5^{hor.}\ 49'$.

16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc eſt motus qui Soli competeret ſi uniformiter in Eclipticâ ferretur. Eſt enim ut $365^{d.}\ 5^{h.}\ 49'$ ad tempus datum, ità 360° quos Sol anni æquinoctialis tempore deſcribit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{dier.}$ deſcribendus eſt XI Signorum $29^{o}.\ 45'\ 40''$, die uno eſt $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ eſt $2'\ 28''$, minuto uno eſt $2''\ 28'''$.

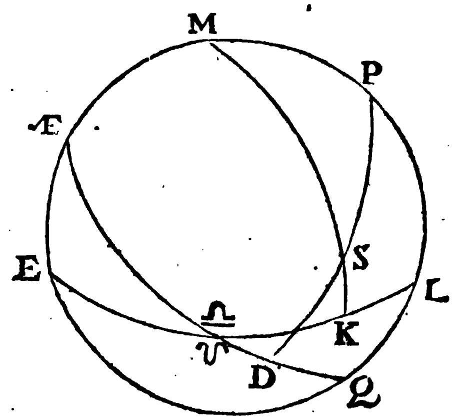
Arcus æquatoris qui dato tempore ſub Meridiano tranſit ſimili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore ſidereo ſub meridiano tranſiens, dicendum eſt: ut 24 horæ ſidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæſitum, is ergo horâ unâ erit 15° 5 minuto uno primo $15'$, minuto ſecundo $15''$. Cum autem Sol die uno deſcribat motu proprio medio ad Æquatorem reluto arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occaſu ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore ſolari medio ſub Meridiano tranſiens, dicatur ut 24 horæ Solares ad datum tempus Solare, ità 360°

59'

59ʹ 8ʺ 20‴ ad arcum quæſitum. His igitur proportionibus tempus ſolare medium vel tempus ſidereum convertitur in gradus æquatoris & contrà. Facilè autem patet ex dictis diem ſolarem medium æqualem eſſe 24 horis ſidereis cum 3ʹ 56ʺ 32‴.

17. Si obſervetur altitudo meridiana Solis & dato ante vel poſt meridiem tempore obſervetur etiam altitudo meridiana ſtellæ alicujus, ſtellæ hujus dabuntur declinatio & aſcenſio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus aſcenſio recta (14) & tempore quod inter duas obſervationes intercedit in arcum æquatoris converſo (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas obſervationes elapſo per Meridianum tranſit; hic arcus addatur vel ſubducatur aſcenſioni rectæ Solis, & ſumma vel differentia erit aſcenſio recta ſtellæ. Declinatio autem ſtellæ ex ipſâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod ſi centrum Solis & centrum ſtellæ in meridiano ſimul reperiantur, eadem eſt utriuſque aſcenſio recta.

18. Datis declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ, dantur ipſius longitudo & latitudo. Sunto ÆQ æquator, EL ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S ſtella, PSD quadrans circuli declinationis, & MSK, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K & KS. In triangulo PSM datur latus PM ſeu diſtantia polorum P & M 23° 29ʹ, datur quoque latus PS declinationis SD complementum & angulus MPS ſeu ÆPD, cujus menſura eſt arcus ÆD datus ob datos per aſcenſionem rectam arcum ♈ D vel



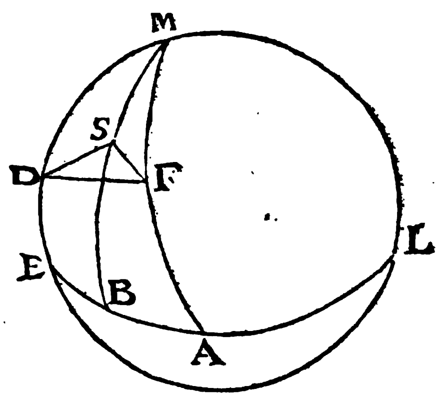
♎ D & quadrantem Æ♈. Quarè (per trig. ſphær.) invenitur latus MS latitudinis SK complementum & angulus M, cujus menſura eſt arcus KL; ex circuli quadrantè ♈L vel ♎L ſubducatur KL, & dabitur ♈K longitudo ſtellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodò datis longitudine ♈K & latitudine KS ſtellæ S inveniri poſſit ipſius aſcenſio recta & declinatio. Nam dato ♈K datur KL, & indè datur angulus SMP, & dato SK, datur SM, undè cum datum ſit MP, dantur in triangulo SMP latus PS complementum declinationis & angulus ÆPD, cujus eſt menſura ÆD, ex quâ ſi auferatur quadrans Æ♈, dabitur aſcenſio recta ♈D.

19. Ex hujuſmodi obſervationibus & calculis inventum eſt fixa-

 rum

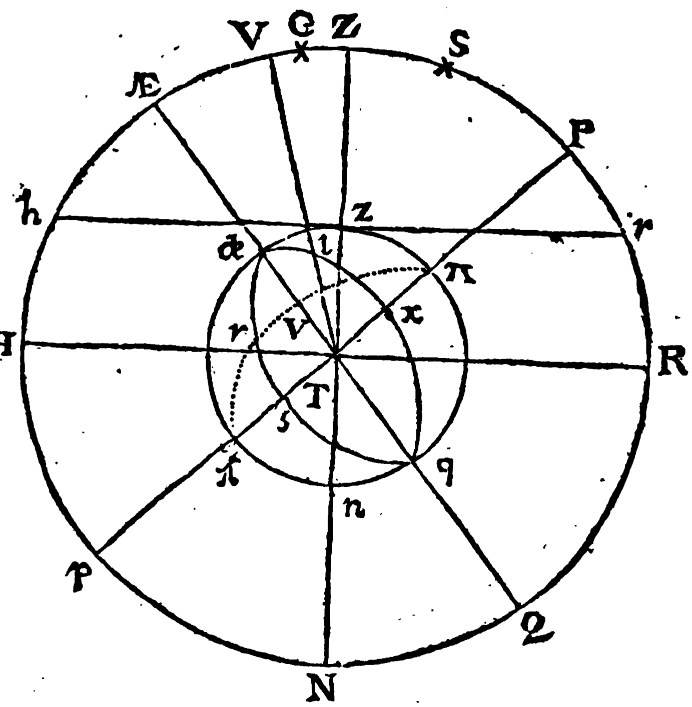
rum latitudines immutabiles eſſe, longitudines verò per ſingulos annos 50 ſecundis, & per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifeſtum fit ſtellas fixas motu proprio ſed lentiſſimo in circulis eclipticæ parallelis progredi in conſequentia, aut ſi ſtellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia ſingulis annis in antecedentia moveri per arcum $50''$, atquè hæc eſt præceſſio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quam à ſtellâ fixâ ad eandem. Annus igitur Solaris æquinoctialis brevior eſt anno Solari ſidereo, hoc eſt brevior eſt tempore unius revolutionis Solis à ſtellâ fixâ ad eandem fixam; differentia eſt $20' \, 17''$ quo tempore Sol motu proprio arcum $50''$ conficit. Eſt ergò annus ſidereus $365^{\text{dier.}} \, 6^{\text{hor.}} \, 9' \, 17''$.

20. Stellarum diſtantiam dicimus arcum circuli maximi inter ſtellarum centra comprehenſum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ à centris ſtellarum ad oculum ſpectatoris ductæ efficiunt. Si ope ſemicirculi vel quadrantis obſerventur diſtantiæ ſtellæ alicujus ab aliis duabus ſtellis quarum longitudo & latitudo notæ ſunt, illiùs quoque longitudo & latitudo dabuntur. Nam eſto ecliptica E L, polus ejus M, ſtellæ notæ longitudinis & latitudinis S & F, tertia ſtella D. Ducantur tres circuli latitudinis M D E, M S B & M F A, ſintque datæ diſtantiæ D S & D F. Quia dantur latitudines S B & F A ſtellarum S & F, dabuntur earum complementa S M & F M cum angulo B M A, cujus menſura eſt arcus B A, differentia longitudinis ſtellarum S & F, & ideò in triangulo S F M, dabitur S F, cum angulo M S F. Datis in triangulo D S F, tribus lateribus dabitur angulus D S F, & ſi ex 360° ſeu quatuor angulis rectis ſubducatur ſumma angulorum datorum D S F & F S M, dabitur angulus D S M, cum quo & notis lateribus D S & S M, reperientur latus M D complementum quæſitæ latitudinis ſtellæ D, & angulus E M B cujus menſura eſt arcus E B, differentia longitudinum ſtellarum D & S; hæ autem obſervationes diſtantiarum Aſtrorum inter ſe propter Aſtrorum continuam converſionem non facile ad ſummam acribeiam perducuntur.



21. Sit Πzæπq telluris globus per cujus centrum T tranſit axis mundi P p. Loci z ſit horizon ſenſibilis h r, horizon rationalis H R, &

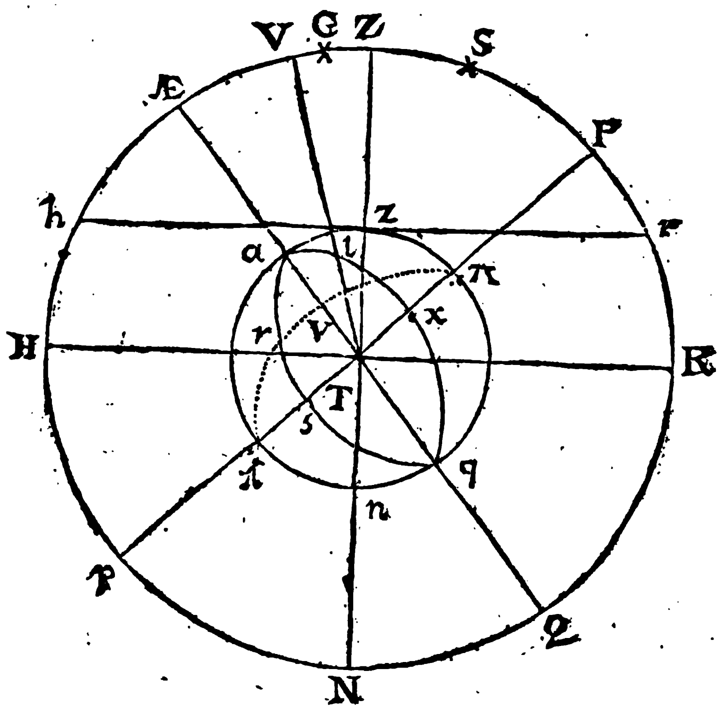
& meridianus PZHN. His ità conſtitutis, axis telluris dicitur pars Π π, axis mundi Pp telluris ſuperficie terminata in punctis Π & π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœleſti P nobis conſpicuo ſubjectus borealis vel arcticus, alter π auſtralis vel antarcticus appellatur. Interſectio plani æquatoris cœleſtis cujus eſt diameter ÆQ, cum telluris ſuperficie, ſivè circulus maximus æ s q x, cujus poli ſunt Π & π, dicitur æquator terreſtris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ' ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujuſvis z in ſuperficie terræ eſt diſtantia ejus ab æquatore, ſi-



vè eſt meridiani terreſtris arcus zæ inter locum z & æquatorem æzqx interceptus. Undè patet latitudinem loci z in ſuperficie terræ numero graduum æqualem eſſe declinationi cœleſti verticis Z ejuſdem loci, ſeu elevationi poli PR. Nam arcus PR & ZÆ, ſunt æquales (10) & arcus ZÆ ac zæ ſimiles; Per locum in ſuperficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x ſecans in r; dicaturque Π r π primus meridianus, & loci cujuſvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r π & meridia-

ridianum z æ π q loci z interceptus atquè ab occaſu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam menſuretur diſtantia z I duorum locorum z & I ſub eodem meridiano ſitorum & ope quadrantis circuli ex iiſdem locis obſerventur diſtantiæ S Z & S V, ſtellæ fixæ S à locorum verticibus Z & V, dabitur telluris ſemidiameter z T. Nam datis arcubus S V & S Z, dabitur eorum differentia vel ſumma V Z, & hinc



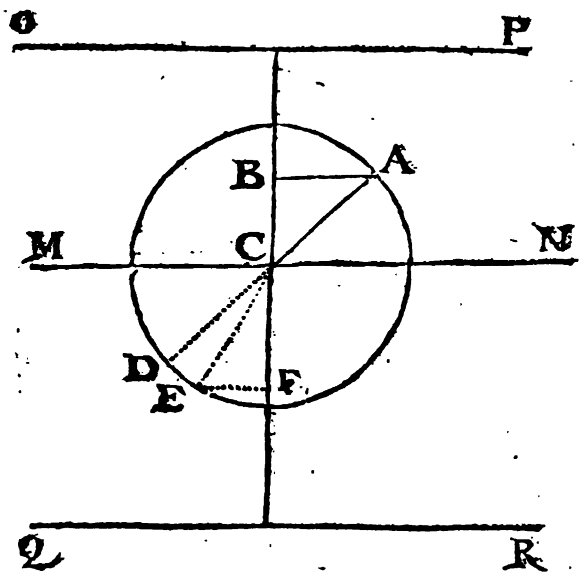
datur arcus I z qui arcui V Z ſimilis eſt. Quarè per obſervationes aſtronomicas notum erit quot gradus vel minuta in arcu I z contineantur & per trigonometricas menſuras ejuſdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis menſuris notis data erit, & indè inferendo ut numerus minutorum in arcu I z contentorum ad 360° ſeu ad 21600', ità longitudo I z menſuris notis expreſſa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur ſemidiameter z T.

CAPUT

CAPUT II.

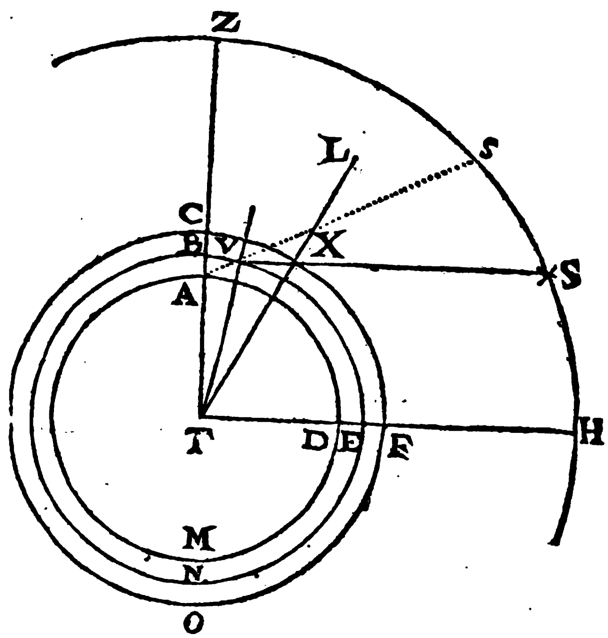
Siderum refractio & parallaxis breviter explicantur.

23. SIt MN plana ſuperficies quâ aer rarior MOPN aerem denſiorem contingit. Radius lucis per rectam AC propagatus



ex aere rariori in denſiorem obliquè tranſeat per punctum C & indè feratur per CE, per C ducatur BF ad MN perpendicularis, experientiâ certum eſt radium AC in aere denſiori non propagari per rectam continuam ACD, ſed in puncto C ità refrangi per CE accedendo ad perpendicularem BCF, ut ſinus anguli cujuſvis ACB ſit ſemper ad ſinum anguli ECF in datâ ratione. AC dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, CE radius refractus, ACB angulus inclinationis, ECF angulus refractus, & DCE angulus refractionis.

24. Si atmoſphæra CXFOMA terræ ADM circumfuſa, diviſa intelligatur in innumeras ſuperficies ſphæricas telluris ſuperficiei concentricas CXFO, BVEN aer inter duas hujuſmodi ſuperficies contentus & aeris ſuperioris pondere compreſſus eò denſior erit quò minùs à telluris centro T diſtabit. Sit ZSH circulus verticalis ex centro telluris T deſcriptus, arcus SH altitudo ſideris S ſuprà horizontem rationalem TH, & ZS diſtantia ſideris à vertice Z. Si radius lucis SX è ſidere S propagatus incidat in atmoſphæram in X, is refringetur in X per XV accedendo ad ſemidiametrum TX ſuperficiei ſphæricæ CXFO perpendicularem (23) & quoniam aëris denſitas in V major eſt quam in X radius in puncto V, ſuperficiei BVE rursùs refringetur accedendo ad TV, atquè ità continuò incurvabitur & in lineam

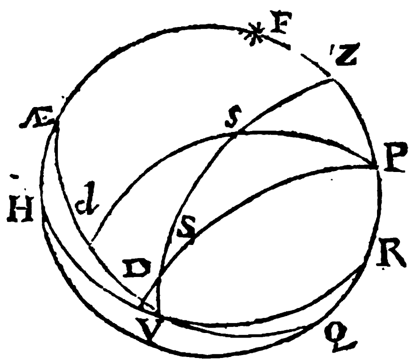


XVA versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta As, circulo verticali ZH occurrens in s, & quoniam radius lucis SXVA oculum ſpectatoris in A ingreditur ſecundum directionem tangentis As, ſidus, quod eſt reverâ in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim eſt ex opticâ objectum videri in eâ rectâ ſecundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.

25. Producatur TX ad L, ut ſit SXL angulus inclinationis radii SX in atmoſphæram incidentis, & VXT angulus refractus, data erit ratio ſinus anguli SXL, ad ſinum anguli VXT (23) ac proindè ſinus angulorum inclinationis erunt ſemper ut ſinus angulorum refractorum. Quarè ſideris in vertice Z conſtituti, ubi nullus eſt angulus inclinationis, nulla erit refractio, & ſiderum in æqualibus à vertice diſtantiis ſitorum, ubi æquales ſunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis igitur, Lunæ, fixarum ac ſiderum omnium extrà terreſtrem atmoſphæram conſtitutorum, in paribus à vertice diſtantiis refractiones ſunt æquales.

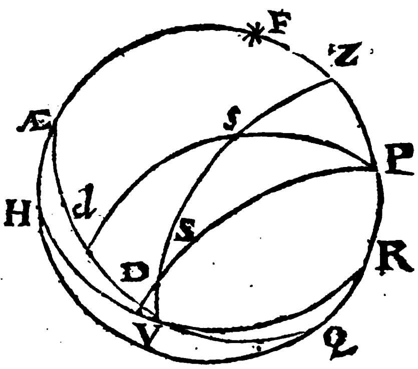
26. Si-

26. Siderum refractio ad ſingulos altitudinis gradus, obſervatione definiri poteſt. Eſto HR horizon, P polus mundi, ÆQ æquator, PZH Meridianus, ZSV circulus verticalis, PSD & Psd, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propé Zenith conſtitutæ obſervetur altitudo meridiana HF, quæ à refractione libera eſt, & indè eruatur ejus declinatio FE (14). Deindè obſervetur ejuſdem ſtellæ in S poſitæ altitudo quælibet SV, & ope horologii oſcillatorii notetur tempus quod inter primam & ſecundam obſervationem intercedit, & inveniatur arcus æquatoris ÆD qui eo tempore per meridianum tranſiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet ſit reverâ in S, erit PSD circulus declinationis ſtellæ in S conſtitutæ, & in triangulo PZS, dabitur angulus ZPS, cujus menſura eſt arcus ÆD cum latere PZ quod eſt diſtantiâ poli à vertice & latere PS, quod eſt declinationis DS ſeu ÆF complementum, undè invenitur latus ZS cum altitudine SV, complemento lateris ZS. Si ergò ex altitudine obſervatâ SV, ſubducatur altitudo inventa SV, quæ à refractione libera eſt, dabitur arcus Ss, refractio ſtellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in tabulis Aſtronomicis obſervavit refractiones ſiderum diverſis anni tempeſtatibus, in pari altitudine eaſdem eſſe exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconſtantiis obnoxias expertus eſt, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipſis obſervationibus deductam conſtituit, quam poſtea correxit D. Caſſinus & eâ correctâ utuntur Aſtronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmoſphæram incidentium obliquitas cum ſideris à vertice diſtantiâ creſcit, iiſdem obſervationibus invenit refractiones ſiderum à vertice ad horizontem uſquè ubi maximæ ſunt, continuò augeri; at quod ex alienis obſervationibus ſupponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æſtate, longè majores eſſe quam in zonis temperatis, id minimè verum eſſe oſtendunt accuratiores obſervationes ab Academicis Pariſienſibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Pariſienſibus æquales invenerunt. Vide Domini De Maupertuis nobiliſſimum opus de figurâ telluris per obſervationes ad circulum polarem definitâ.



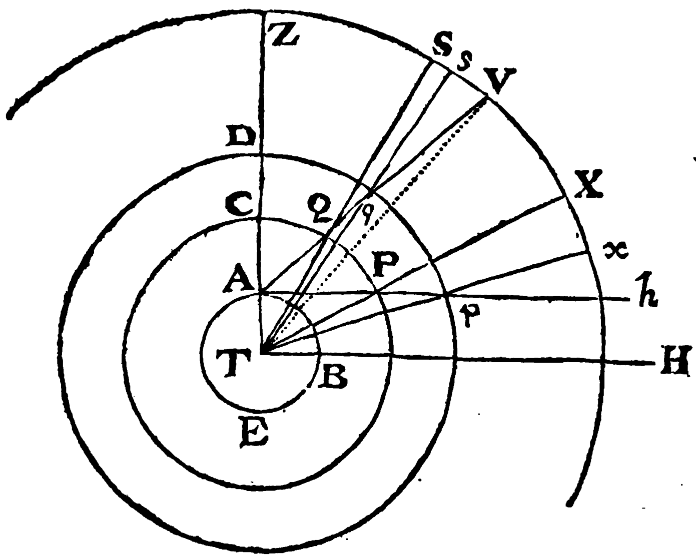
27. Refractio ſideris declinationem, aſcenſionem rectam, longitudinem ac latitudinem afficit & arcus circuli maximi quo ſideris declinatio, aſcenſio recta, longitudo & latitudo minuitur vel augetur per refractio-

fractionem, dicitur refractio declinationis vel aſcenſionis rectæ &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum ſpecies inveniri poſſunt. Nam in figurâ ſuperiori dantur in triangulo sZP latera Zs & ZP cum angulo sZP & indè reperitur latus sP cum angulo sPZ cujus menſura eſt arcus Æd, undè cum detur arcus ÆD, dabitur arcus dD refractio aſcenſionis rectæ ſideris S; & quia dantur arcus ds & DS, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ eſt refractio declinationis. Sed datis declinatione & aſcenſione rectâ puncti cujuſvis in ſphærâ mundanâ, dantur ipſius latitudo & longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis & longitudinis refractiones poſſint inveniri.



28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda ſunt. Cætera, ubi opus fuerit, ſuis locis exponemus. Itaque diſtantia locorum in ſphærâ cæleſti ad quæ ſidus vel phænomenon quodvis è ſuperficie telluris & ex ejus centro ſpectatum refertur, ſivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipſius ſideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla eſt niſi terræ ſemidiameter ſenſibilem habeat rationem ad diſtantiam ſideris à terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in ſuperficie terræ; Z zenith loci A; Q ſidus vel phænomenon quodvis; CQP verticalis per Q tranſiens; ZSXH verticalis in ſuperficie ſphæræ cæleſtis; ABE verticalis in ſuperficie terræ; TH horizon rationalis & Ah horizon ſenſibilis. His ità conſtitutis, locus phyſicus ſideris Q, eſt punctum illud in quo ſideris centrum hæret. Locus opticus apparens ſeu viſus eſt punctum V in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, in quo recta ex oculo A per centrum ſideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus eſt punctum S in ſuperficie ſphæræ cæleſtis in quo terminatur recta linea TQS ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* eſt arcus SV ſivè differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, eſt angulus AQT quem in centro ſideris efficiunt rectæ AQ & TQ ex oculo A & ex centro terræ T ad ſideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ & parallaxis ſimpliciter dicitur, eſt differentia inter diſtantiam ZV à zenith Z ex loco A viſam & diſtantiam veram ZS, ſivè eſt arcus SV in circulo verticali ZSVH, undè manifeſtum eſt altitudinem ſideris veram per parallaxim minui & ejus à vertice diſtantiam augeri, atquè ideò parallaxim eſſe refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis eſt parallaxis Xh, ſideris P in horizonte ſenſibili Ah apparentis. 29.

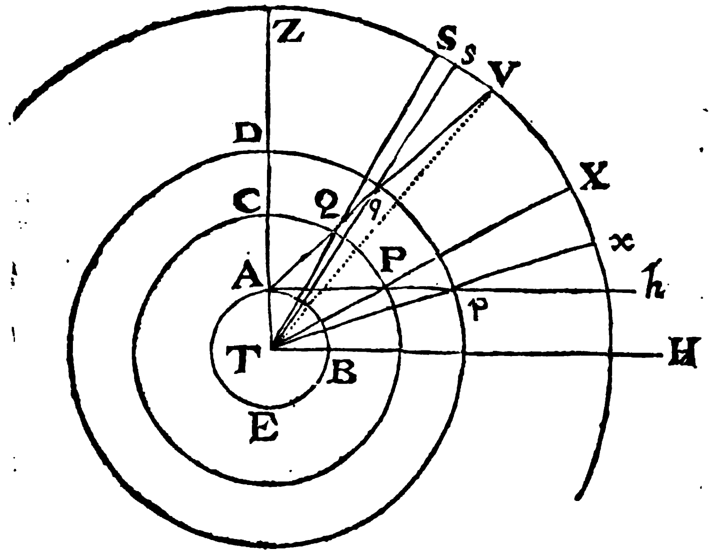
29. Parallaxis S V eſt menſura anguli parallactici A Q T. Jungatur T V, & angulus externus A Q T æqualis erit duobus internis oppoſitis Q T V & Q V T; ſed angulus Q V T ſivè A V T, evaneſcente A T reſpectu T V, nullus eſt (9), ergò angulus parallacticus A Q T, æqualis eſt angulo Q T V, ſeu S T V, cujus menſura eſt arcus S V.



30. Manente ſideris à centro terræ diſtantiâ; ſinus parallaxeos eſt ad ſinum diſtantiæ viſæ ſideris à vertice in ratione datâ ſemidiametri telluris ad diſtantiam ſideris à centro terræ. Nam in triangulo A Q T, eſt A T ad Q T, in ratione ſinûs anguli parallactici A Q T ſeù ſinus parallaxeos ad ſinum anguli T A Q ſivè ad ſinum diſtantiæ viſæ Z V à vertice, & ideò, datis A T & Q T, data eſt ratio ſinuum illorum. Hinc verò ſequitur ſideris in vertice Z, conſtituti parallaxim eſſe nullam, eandem creſcere cum diſtantiâ à vertice & in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè ſinus parallaxium in paribus ſideris à centro terræ diſtantiis eſſe ut ſinus diſtantiarum viſarum à vertice, & ideò ſi detur parallaxis ſideris in aliquâ à vertice diſtantiâ, dabitur in aliâ quâvis diſtantiâ à vertice.

31. Datâ ſideris Q, parallaxi A Q T; cum angulo Z A V ſeu diſtantiâ apparente à vertice, datur in ſemidiametris terræ tum diſtantia Q T ſideris Q à centro terræ, tum diſtantia ejus A Q à loco A. Dato enim angulo Z A Q datur T A Q complementum illius ad duos rectos,

ctos, undè, ob datum etiam angulum A Q T, dantur tres anguli trianguli Q A T, ex quibus datur ratio laterum inter ſe. Hinc datâ ſideris P parallaxi horizontali, ſi inferatur ut ſinus parallexeos ad ſinum totum, itâ ſemidiameter telluris A T ad quartum obtinebitur diſtantia P T ſideris à centro terræ ob angulum T A P rectum.



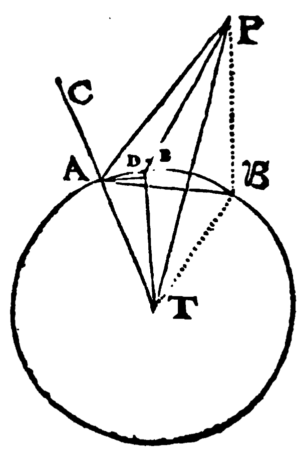
32. Sinus parallaxeon ſiderum Q & q in æqualibus diſtantiis apparentibus à vertice, ſunt in ratione reciprocâ diſtantiarum ſiderum à centro terræ. Etenim ut ſinus parallaxeos A Q T, ad ſinum anguli Z A V, ita eſt A T ad Q T & ut ſinus anguli Z A V, ad ſinum parallaxeos A q T, itâ q T ad A T, ideòque ex æquo, ſinus parallaxeos A Q T eſt ad ſinum parallaxeos A q T ut q T ad Q T. Ex quo etiam ſequitur ſiderum in eâdem altitudine apparente exiſtentium, hujus majorem eſſe parallaxim quod minùs diſtat à centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum eſt, ſideris declinationem, aſcenſionem rectam; longitudinem & latitudinem mutat; & eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum ſpecies, ſic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, aſcenſionis rectæ, longitudinis & latitudinis; illud quoque obſervandum eſt ſideris in meridiano exiſtentis nullam eſſe aſcenſionis rectæ refractionem nec parallaxim; cum enim altitudinis refractio ſidus attollat, & altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano

ſeu

ſeu circulo declinationis (per hyp.) aſcenſio recta indè non mutatur. Similiter ſi circulus verticalis in quo ſidus reperitur ſit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc caſu circulus verticalis eſt ſimul circulus latitudinis, & ſiderum in eodem latitudinis circulo exiſtentium longitudo eſt eadem.

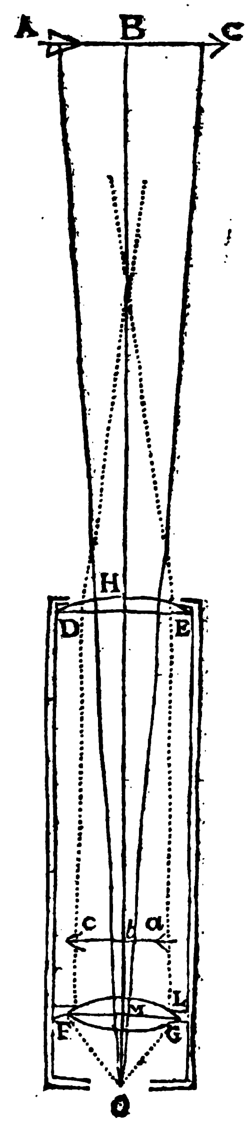
34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in ſuperficie terræ, ſeu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel ſtella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno tranſit (16); & indè definiri poteſt utrum obſervationes in illis duobus locis habitæ, reſpondeant eidem temporis abſoluti momento an non. Facilè idem innoteſcit per Lunæ & Jovis Satellitum eclipſes; eodem enim momento temporis eclipſis initium ac finis, & macularum in Lunâ notarum immerſio in umbram vel emerſio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conſpici poſſunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His poſitis ſi ex locis duobus A & B, quorum diſtantia ADB data eſt, Phænomeni vel ſideris P in plano verticali APBT, exiſtentis altitudines apparentes & à refractionibus liberæ obſervatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis & diſtantia à centro terræ PT. Nam per obſervationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus CAP, diſtantia apparens ſideris à vertice & indè datur angulus PAT, anguli CAP complementum ad duos rectos, eodemque modo per obſervationem in loco B factam invenitur angulus PBT. Sed dato arcu ADB, datur angulus ATB & hinc in triangulo iſoſcele ATB, dantur anguli æquales TAB & TBA. Quarè dantur etiam in triangulo ABP, anguli PAB, & PBA quos latera PA & PB efficiunt cum chordâ AB. Ergò triangula duo ABT & ABP dantur ſpecie ac proindè datur ratio PB ad BT, & quia datis angulis ABT & ABP datur angulus PBT, ductâ rectâ PT, dabuntur in triangulo PTB, angulus TBP, & ratio laterum TB & BP, atquè ideò triangulum hoc ſpecie dabitur. Innoteſcet igitur tum angulus parallacticus BPT, tùm diſtantia PT, ſeu ejus ratio ad telluris notam ſemidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri poteſt parallaxis ſideris aut Phænomeni vel quieſcentis vel utlibet moti. Verùm Aſtronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus obſervator in eodem loco manens ſiderum



motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes poteſt determinare. De his, ubi è re viſum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad veram Aſtronomiam.

CAPUT III.

De Teleſcopii ac Micrometri uſu & Phænomenis horum Inſtrumentorum beneficio obſervatis pauca.



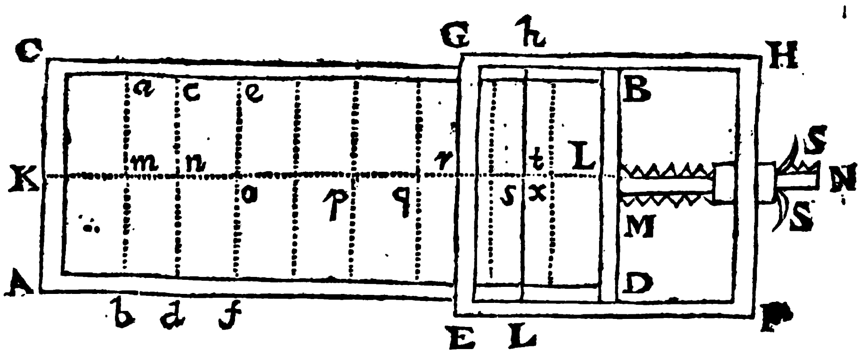
35. SIt Teleſcopium Aſtronomicum D F G E, vitrum objectivum D E, oculare F G; objectum A C; ità remotum ut radii qui ex ſingulo illius puncto in totam vitri objectivi ſuperficiem incidunt pro parallelis poſſint uſurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, à vitro objectivo ità franguntur ut poſt vitrum D E coeant in unum punctum a, quod eſt puncti A imago, & ſimiliter punctum C pingitur in c, totumque objectum A C in ac, ſitu inverſo, eſtque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans virtum oculare F G, videt objectum A C, ſeu ipſius imaginem a c. Hinc ſi in foci loco c a poſitum ſit corpus aliquod opacum, oculus illud diſtinctè videbit tanquam objecto A C, ſeu potiùs imagini ejus a c contiguum.

36. Sit B O Radius ad A C normalis & per centra H & M vitrorum tranſiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta A O, & objectum A B, oculo nudo videretur ſub angulo A O B, eſtque proindè angulus A O B, magnitudo apparens objecti A B. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b & a parallelè propagati colliguntur à vitro oculari F G in ejus foco O ubi oculus verſatur, pars objecti A B, ſeu ejus imago a b, videtur ſub angulo M O L, & (per probl. 31. Element. Dioptr. Clariſſ. Wolf.) diſtantia foci lentis objectivæ H b, eſt ad diſtantiam foci lentis ocularis b M, ut angulus MOL ad angulum AOB, ſeu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti A B nudo oculo viſi, ex quo pa-

cet

ter quod in eodem Teleſcopio magnitudines apparentes objectorum ſunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco poſitarum & trans vitrum oculare viſarum.

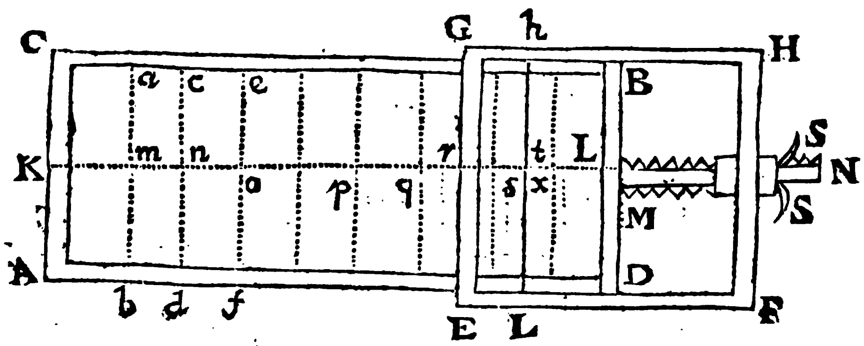
37. His poſitis, facile eſt micrometri uſum intelligere. Eſt autem micrometrum inſtrumentum quod in foco lentis objectivæ teleſcopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum ſemiſſe non ſuperant, dimetiendas. Illius conſtructionem quam D. De-la-Hire in tabulis Aſtronomicis veluti uſibus Aſtronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Conſtat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum ABCD, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum ſemiſſe & latitudinem unius pollicis cum ſemiſſe. Hujus quadri, latera longa AD, CB, in partes æquales & tertiâ parte unius pollicis inter ſe diſtantes dividuntur, ità tamen ut lineæ ductæ per ſingu-



las diviſiones ſint ad latera AD, CB, perpendiculares. Hiſce diviſionibus fila ſerica benè tenſa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur filum ſericum KL, dictum tranſverſale, quod ad angulos rectos fila parallela modò deſcripta ab, cd, ef, &c. ſecet & in medio laterum AC, BD glutinatur. Alterum quadrum EFGH cujus longitudo EF non ſuperat unum pollicem cum ſemiſſe, ita priori accommodatur ut ejus latera EF, GH, moveantur ſuper latera AD, CB, alterius quadri nec ab ipſo ſeparentur. Facies hujus ſecundi quadri quæ diviſam faciem prioris reſpicit, filo etiam ſerico & tenſo hL, inſtruitur, quod, cum movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eàque ſuperlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè MN, lateri BD, longioris quadri affigitur, cujus ſtriatum receptaculum lateri FH alterius adhæret & in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejuſque receptaculum auriculis S, S inſtructum ità inter ſe aptari debent ut receptaculum & quadrum EH, ne minimùm quidem moveri poſſit, niſi receptaculi motu converſionis.

 Qua-

Quadrum ABCD, teleſcopii cujuſvis longitudinis tubo in diſtantiâ foci objectivæ lentis ità aptatur ut ipſius quadri planum perpendiculare ſit ad teleſcopii axem. His ità conſtitutis, teleſcopium in cœlum convertatur & ità diſponatur ut duæ ſtellæ fixæ quarum diſtantia apparens in minutis ſecundis aliundè nota ſit, ſint in filo tranſverſali KL, poſitæ verſeturque cochlea donec filum mobile hL, per centrum x, ſtellæ unius tranſeat, alterius ſtellæ centro m, vel n, exiſtente in alio filo ab, vel cd. Hâc obſervatione notum erit cuinam diſtantiæ apparenti reſpondeat longitudo mx, vel nx, in lineis & lineæ partibus data, & indè per proportionis regulam, obſervatâ quâlibet aliâ ſiderum diſtantiâ



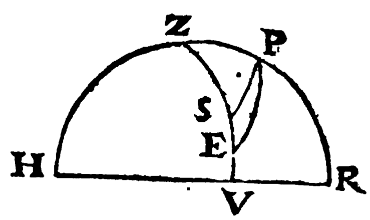
nq, dabitur angulus ſub quo hæc diſtantia nudo oculo videretur; inferendo ſic: ut mx vel nx ad nq, ità diſtantia apparens ſtellarum duarum m, vel n, & x ad diſtantiam apparentem punctorum n & q. Moveatur jam quadrum EFGH ope receptaculi ſtriati donec filum ejus ſericum hl, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque poſitio auricularum receptaculi & iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri EFGH proximo filo alterius congruat, vel, quod idem eſt, moveatur quadrum EFGH, per ſpatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi & partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi & partium ejus quæ ſingulis minutis primis & ſecundis ex noto ſuperiùs toto intervallo debentur.

38. Ubi diameter planetarum erit obſervanda, directo teleſcopio cum micrometro ad planetam ità diſponantur fila movendo teleſcopium ut ſideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum Planetæ contingat. Manifeſtum eſt ex diſtantiâ cognitâ inter fila micrometri quæ

quæ planetam comprehendunt, notam fieri Planetæ diametrum apparentem.

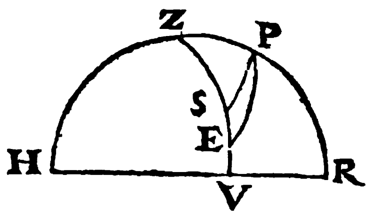
39. Datâ declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ fixæ, inveniri poteſt alterius ſtellæ declinatio & aſcenſio recta, modò tamen duæ illæ ſtellæ tranſire viciſſim poſſint per campum teleſcopii immoti. Ità enim diſponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus ſtellæ quæ alteram præcedit fiat ſuper unum ex illis V G. Super a b, in quo ſitu filum c d, exponet portionem exiguam paralleli quem ſtella deſcribit, & filum K L illud ad angulos rectos interſecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo ſtella præcedens filo tranſverſali occurrit in m. Similiter immoto teleſcopio obſervetur tempus appulsûs alterius ſeu ſequentis ſideris ad idem filum tranſverſale ſeu circulum declinationis, & ſi intereà filum parallelum mobile h L, ſideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope diſtantiæ m x, filorum a b & h L, diſtantiam apparentem inter parallelos ſiderum duorum quæ eſt differentia declinationis ſiderum, obtinebimus. Sed ſi differentia temporis inter utriuſque ſideris tranſitum per filum tranſverſale in minuta tam prima quam ſecunda gradûs convertatur (16) differentiam aſcenſionalem ſiderum habebimus.

40. Hæc obſervatio ſupponit nullum eſſe ſideris motum proprium nullamque parallaxim. Si ſidus motum proprium habeat, illum oportet ex obſervationibus determinare quoad declinationem & aſcenſionem rectam illiúſque rationem habere. Quo peracto, ſi aliqua ſit ſideris parallaxis poterit ità reperiri. Obſervetur ſideris ad meridianum appellentis aſcenſio recta quæ parallaxi obnoxia non eſt (33), & differentia inter hanc aſcenſionem rectam ſideris in meridiano exiſtentis & aſcenſionem rectam ejuſdem ſideris alibi exiſtentis obſervatam, erit parallaxis aſcenſionis rectæ ex qua parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R horizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S ſidus obſervatum in loco S & deindè in meridiano, E locus ſideris viſus, S locus verus, & ideò S E parallaxis altitudinis; S P & P E circuli declinationis. Datur, (per hyp.) angulus S P E, cujus menſura eſt parallaxis aſcenſionis rectæ ſideris obſervata. Datur etiam punctum illud quod eſt interſectio æquatoris & meridiani tempore obſervationis ſideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H & circulum declinationis P E interceptus qui eſt menſura anguli Z P E. Quarè in triangulo Z P E, dantur latus Z P diſtantia poli à vertice, & latus Z E diſtantia viſa



ſideris

ſideris à vertice cum angulo ZPE. Innoteſcet igitur angulus PZE ab angulo ZPE, ſubducatur datus SPE, & dabitur angulus ZPS. Denique in triangulo ZPS, ex datis angulis PZS & ZPS, cum latere ZP, dabitur latus ZS, vera ſideris à vertice diſtantia quæ ex viſâ ZE, ablata relinquet SE parallaxim altitudinis.



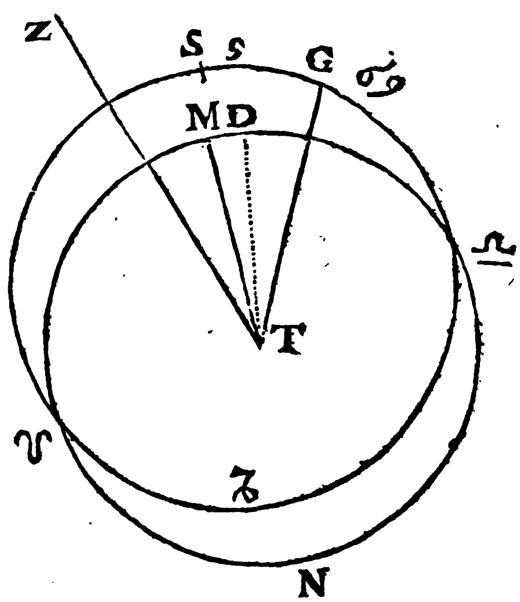
41. Teleſcopium maculas quampluri-mas variabiles quæ ſuper corpus Solis incedere videntur oſtendit, ex earum motu ſolem circà proprium axem $25\frac{1}{2}$ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem & Terram poſitione phaſes diverſæ conſpiciuntur phaſibus Lunaribus ſimiles ità ut partem illuminatam Soli conſtanter obvertat. Præterea Mercurius & Venus tanquam maculæ nigræ & rotundæ diſcum Solis trajicere viſi ſunt. Undè notum factum eſt Planetas illos eſſe corpora opaca à Sole illuſtrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ obſervatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut & Jupiter ipſe corpora opaca lumen ſuum à Sole mutuantia; nam Jove inter ipſas & Solem diametraliter interpoſito, lumine privantur & cælo ſereno evaneſcunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem & Jovem tranſit, ejus umbra inſtar maculæ nigræ ac rotundæ obſervatur in ipſo Jovis diſco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur & circà eum revolutiones ſuas agunt lumineque privantur dum radii Solares à Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis obſervationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nuſquam cohærente cum corpore Saturni & ad Eclipticam inclinato; quæ hypotheſis, ſi ità nunc poteſt appellari, non ſolùm Phænomenis ab Hugenio obſervatis, ſed & aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ à Caſſino & Maraldo obſervata fuere ſatisfacit. Tandem per teleſcopium ſtellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebuloſas dicunt & integra via lactea nihil aliud ſunt quam plurimarum ſtellarum quæ oculo non diſtinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis ſtellæ apparent & quæ antè videbantur, nonnunquam inconſpicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis & diſparitionis periodos habent quæ quámdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo ſub initio apparitionis creſcit & ſub finem decreſcit.

42. Si ſæpius obſervetur tum motus Solis in Eclipticâ (15) tum ipſius diameter apparens (39) quam fieri poteſt accuratiſſimè, circà datum punctum in plano deſcribi poterit curva ſimilis orbitæ quam Sol circà terram, percurrere videtur. Nam cum diametri Solis apparentes ſint

ſint reciprocè ut ipſius à tellure diſtantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur diſtantiarum rationes & ex dato Solis motu in Eclipticâ, dantur anguli inter illas diſtantias contenti. Si verò ex hujuſmodi obſervationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipſius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, eſſe temporibus proportionales, Soliſque orbitam non multum differre à circulo & haberi poſſe pro ellipſi cujus umbilicum alterum occupat terra. Eſt autem Solis diameter apparens maxima 32′ 40″, & minima 31′ 36″ juxtà D. Caſſini in tabulis Aſtronomicis & ideò maxima diſtantia Solis à terrâ eſt ad diſtantiam minimam ut 32′ 40″ ad 31′ 36″, ſivè ut 1960 ad 1896 circiter, ſive 245 ad 237. Ex ſimilibus obſervationibus, tum diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipſius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas deſcribere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè obſervetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipſius velocitas tum diameter apparens minima eſt, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis & collatis plurium annorum obſervationibus innoteſcet Apogæi motus annuus qui juxtà D. Caſſini eſt 1′ 2″ & indè per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc ſi tempore quovis obſervetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis & ipſius anomalia vera ex quâ eruetur ejuſdem anomalia media (per ſchol. ad prop. 31. lib. 1.) ac proindè longitudo media habebitur tempore obſervationis. Hæc longitudo media aſſumatur tanquam radix ſeu principium motuum mediorum Solis & tempus obſervationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum & dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, & indè habebitur ipſius longitudo media & diſtantia ejus media ab Apogæo ſeu anomalia media dabitur ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares ſunt inæquales (15), neceſſe eſt ut tempus apparens quod diebus ſolaribus conſtat, fluat etiam inæquabiliter. Differentia quæ eſt inter tempus apparens ſeu verum & tempus æquabile ſeu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens & viceverſâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero & contrà.



45. Sit T, Cœli & Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ Ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ S ejuſdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, & ♈ D ſit Solis aſcenſio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M & D radii æquatoris T M & T D qui ſemper moveantur cum punctis M & D, in conſequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui ſit ab oriente in occidentem, tranſit; ſi punctum D aſcenſionis rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares ſeu revolutiones ſingulæ puncti D à circulo horario T Z ad eundem, eſſent æquales & tempus apparens à medio non differret. Sed cum motus aſcenſionis rectæ D, inæquabilis ſit, dies & horæ Solares ſunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occaſu ad ortum, & ideò motus illius conſtitui poteſt pro menſurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ S vel æqualis eſt aſcenſioni rectæ ♈ D vel eâ major eſt aut minor. In primo caſu punctum M coincidit cum puncto D, in ſecundo caſu eſt ultrà D, versùs orientem & in tertio caſu eſt citrà D, versùs occidentem. Temporis abſoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, ſumatur tanquam principium à quo tempus apparens & tempus medium incipiunt computari & quo ſimul coincidunt; & in aliis caſibus tempus apparens à medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus ſolare converſi (16); Nam dum punctum D, eſt ſub meridiano T Z, horâ 12ª computatur in loco cujus meridianus eſt T Z, & ubi punctum M diſtat à puncto D, arcus M D, in tempus ſolare converſus, dabit differentiam inter meridiem apparentem & meridiem medium qui contingit quandò punctum M eſt in meridiano T Z.

46.

46. Itaquè tempus medium in apparens ſic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato reſpondens (44) indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta (14), ſi hæc major eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa ſubtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur ſi minor eſt. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium conſideratur, & inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, & indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta; ſi hæc mediam Solis longitudinem ſuperat, differentia in tempus ſolare converſa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ aſcenſio recta minor eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa à tempore apparente ſubducitur. Quod ſi media Solis longitudo æqualis ſit aſcenſioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifeſta ſunt; ſi enim punctum D eſt orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum TZ, pervenit quam illud, ac proindè hora 12ª temporis medii computatur, cum nondùm eſt meridies temporis apparentis, & contrarium contingit, ſi punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam medio ad locum Solis inveniendum; cum enim tempus apparens non multum differat à tempore medio, differentia inter aſcenſionem rectam & longitudinem mediam Solis eſt quam proximè eadem, ſivè per tempus medium, ſivè per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò ſi tempore quovis apparente obſervetur Solis aſcenſio & longitudo vera, indèque eruatur ipſius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, & hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus ſemel conſtitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in Eclipticâ & contrà. Expoſuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum ſit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium uſurpetur & quæratur locus Solis verus huic correſpondens (44); Deindè longitudini Solis ſic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur & ità prodibit locus Solis tempori apparenti reſpondens. Facile eſt ex dictis problema inverſum ſolvere, ſeu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco reſpondens invenire.

 48. Nec

48. Nec opus eſt ut moneamus eaſdem eſſe motuum cæleſtium apparentias, ſive cœlum omne cum ſtellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, ſive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti ſupponatur immoto cœlo; ſive etiam terra immota maneat & Sol proprio motu ab occaſu ad ortum feratur, ſeu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in Eclipticâ. Nam in utrâque ſuppoſitione diametri apparentes & velocitates relativæ ſunt eædem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque lucis & ſonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem ſyſtematis mundani. De hoc argumento compoſueram librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis definitiones, leges motuum & ſectiones tres priores libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc librum de mundi ſyſtemate, & reliquas librorum priorum propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

DE MUNDI SYSTEMATE

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. (a).

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ ſint & earum phænomenis explicandis ſufficiant.

Dicunt utique philoſophi: Natura nihil agit fruſtra, & fruſtra fit per plura quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideóque effectuum naturalium ejuſdem generis eædem aſſignandæ ſunt cauſæ, quâtenus fieri poteſt.

Uti reſpirationis in homine & in beſtiâ; deſcenſus lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in terrâ & in planetis.

RE-

(a) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima eſt, ne Philoſophia in vana abeat opinionum commenta, cauſæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quam quæ reverâ exiſtunt & quæ phenomenis explicandis ſufficiunt; undè ſi velimus cum evidentiâ ac certitudine philoſophari, omnes hypotheſes negligendæ nobis ſunt; hypotheſis enim ſi legitima eſt, cauſæ quidem poſſibilitatem, minimè verò exiſtentiam adſtruit, cum effectus idem pluribus modis produci poſſit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab Experimentis & indè Mathematicâ via procedendo ſpes non affulget hypotheſibus quibuſdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum Aſtronomi varias adhibuerunt hypotheſes ut phænomena cæleſtia prædicere & accuratius obſervare, atquè ità veras eorum cauſas conjectando inveſtigare poſſent. Altera pars regulæ ea ſcilicet quæ præſcribit non plures admittendas eſſe rerum naturalium cauſas quam quæ eorum phænomenis explicandis ſufficiunt, manifeſta eſt; nam cum vera effectûs cauſa per experientiam ſemel inventa eſt, & matheſeos ope præſertim demonſtratum eſt cauſæ illius eam eſſe vim quæ ad effectum producendum ſufficiat, liquet aliam quamlibet cauſam eſſe inutilem.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeant, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem ſomnia temerè confingenda non ſunt, nec à naturæ analogiâ recedendum eſt, cum ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium, & inde non horum tantùm corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuò contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe (b) ex mathematicâ certum eſt. Utrum verò partes illæ diſtinctæ

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum eſt.* Demonſtrationes paſſim reperiuntur apud eos autores qui de materiæ diviſibilitate tractant, ut ex incommenſurabilitate lateris quadrati & ejus Diagonalis &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tinctæ & nondum diviſæ per vires naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: ([c]) concluderemus vi hujus regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu terræ gravia eſſe in terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & lunam gravem eſſe in terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in lunam, & planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & cometarum ſimilem eſſe gravitatem in Solem, per experimenta & obſervationes aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minimè affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. ([d]) Gravitas recedendo à terrâ, diminuitur.

RE-

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ*, ſeu ex analogiâ naturæ quæ ſimplex eſſe ſolet & ſibi ſemper conſona. * Hinc patet differentia Newtonianiſmi & hypotheſeos Atomorum; Atomiſtæ neceſſario & Metaphyſice atomos eſſe indiviſibiles volunt, ut ſint corporum Unitates; Metaphyſicam hanc quæſtionem miſſam facit Newtonus, & huc redit ejus ſententia, ſi illæ partes quas Deus condidit indiviſas, quæque ideo ſunt corporum Phyſica Elementa ſeu Phyſicæ Monades, frangendo dividerentur, tunc exinde edocti, ſtatueremus eas poſſe dividi, ideoque ulterius ulteriuſque ſine fine diviſibiles eſſe diceremus, omnem hâc de re Theoriam Metaphyſicam experimentis facile poſtponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ agnoſcimus qualitates eſſentiales, Doctrinâ; Ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum ſubjecti natura ſint conjunctæ ſi rem Metaphyſicè ſpectemus; ſed fit ut experientiâ Magiſtrâ, has aliaſve qualitates ad univerſa ſubjecta quæ ad eamdem Claſſem referimus pertinere deprehendamus, aut ſaltem ad omnia in quæ experimenta inſtituere licuit & eas eſſentiales dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eadem iſtâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoſcendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus Philoſophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, ſed minus obviâ ac vulgari, ſimilem Inductionem inſtituere dabitur. Adjungit quidem præter eam Inductionem, caracterem hunc Metaphyſicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri poſſent, ſicque Univerſorum corporum qualitates non amplius forent.

(d) * *Gravitas recedendo à terrâ diminuitur*, ut infrà demonſtrabitur.

REGULA IV.

In Philoſophiâ experimentali, propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

(c) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

(c) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæſtionibus opticis hoc ferè modo exponit Newtonus. In Phyſicis non ſecus ac in Mathematicis Scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs eſt uſurpanda quam ſynthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo poſita eſt ut adhibeantur experimenta atquè obſervationes ex quibus deindè per inductionem concluſiones generales deducantur, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, niſi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas eſſe contigerit. Nam quod hypotheſes ſpectat, eæ in Philoſophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis & obſervationibus per inductionem deducta ad ſtabiliendas modo demonſtrativo concluſiones generales ſatis non ſint, hic tamen ratiocinandi modus eſt omnium quos rerum naturâ admittere poſſit optimus, iſque eò tutior reputari debet quo generalior eſt inductio; Si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem concluſionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus neceſſariis limitanda erit atquè reſtringenda concluſio. Hujus analyſeos auxilio à compoſitis ad ſimplicia, à motibus ad vires producentes, & generatim ab effectibus ad eorum cauſas perveniri poteſt. Quod ad ſyntheſim pertinet, hæc cauſas cognitas atque probatas tanquam principia aſſumit quorum ope phænomena indè nova explicantur. 5.0.

De Mundi Syſtemate.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

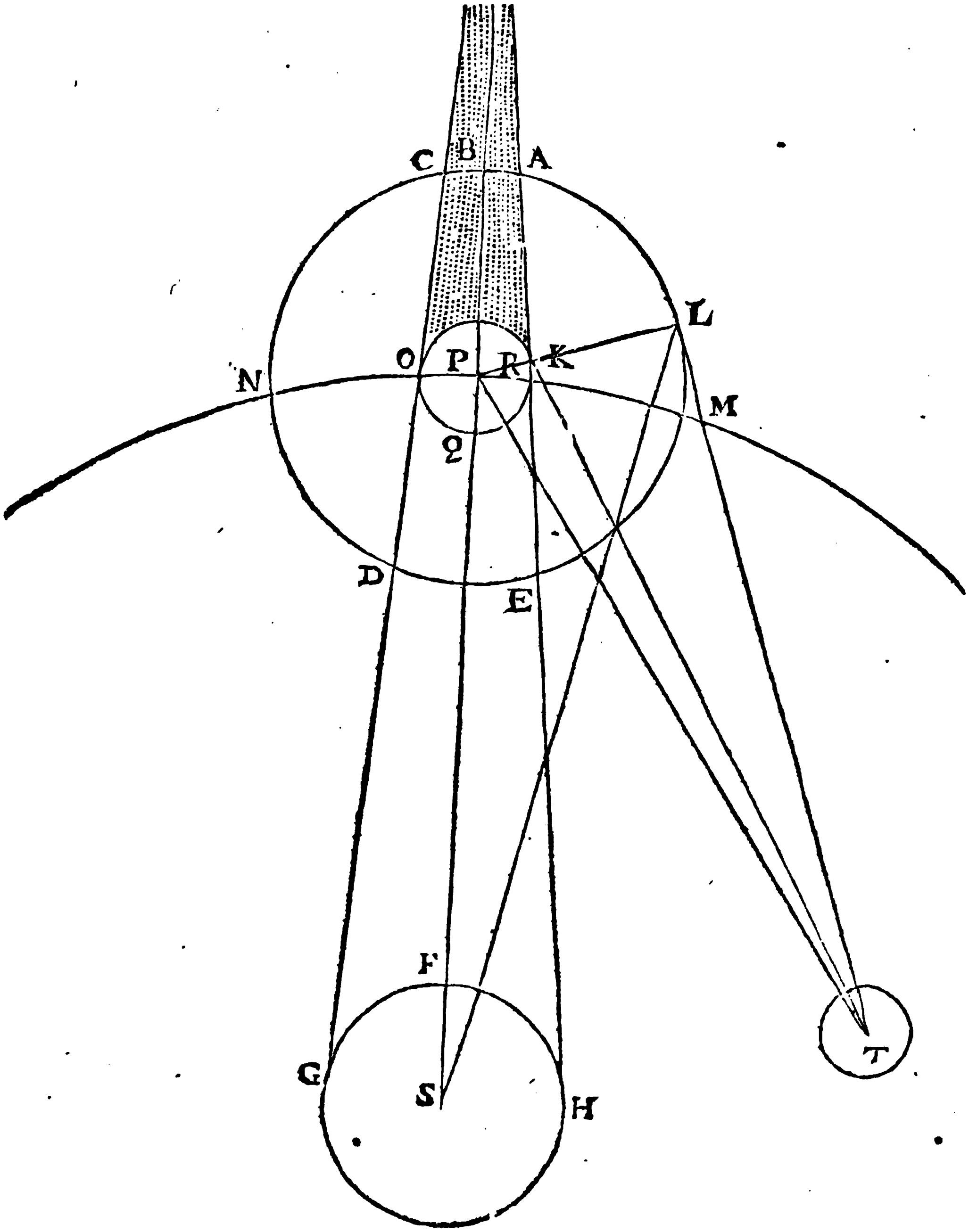
(f) Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.* Lemma..... Satellitum Jovis & Saturni orbes ac motus determinare.

Sit HFGH Sol, cujus centrum S, T Terra; KOQ Jupiter vel Saturnus circà Solem S deſcribens orbitam MPN, ACDEL orbita ſatellitis; radii Solis extremi GO, HR paulo pluſquam dimidium planetæ P illuſtrant, & producti umbram conicam RACO terminant, cujus axis eſt recta SPB per Solis & Planenetæ centra tranſiens. Dum ſatelles in orbitâ ſuâ LCDE girans, conum umbroſum attingit in A, in umbram immergitur & ceſſat videri; deindè ex umbrâ emergens in C rurſus apparet. Attamen ſatellitum Saturni, ob nimiam illorum à Sole & Tellure diſtantiam, eclipſes obſervari huc uſquè non potuerunt, ſed omnium ſatellitum Jovis eclipſes è terrâ conſpici poſſunt, cum hoc tamen diſcrimine quod immerſiones & emerſiones quarti & tertii & nonnunquam ſecundi in eâdem eclipſi cernantur, primi verò immerſio tantum vel emerſio obſervari poſſit. Sit jam ſatelles in L, & ductis è terrâ T rectis TP, TL, angulus PTL dicitur elongatio ſeu digreſſio geocentrica ſatellitis L à Planetâ primario P. Ducatur etiam recta TK diſcum primarii Planetæ tangens in K, & angulus PTK erit ſemidiameter primarii è tellure viſâ ſeu apparens, ideóque elongatio geocentrica erit ad ſemidiametrum apparentem ut angulus PTL ad angulum PTK. Obſervatis pluribus hujuſmodi elongationibus geocentricis & ſemidiametris apparentibus, iiſque inter ſe collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli PTL ad angulum PTK maxima eſt, & hoc modo obſervatum eſt elongationes maximas geocentricas ejuſdem ſatellitis in variis orbitæ ſuæ locis æquales eſſe inter ſe quam proximè, ideóque ſatellites deſcribunt circulos Planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi elongatio maxima eſt, PK eſt quamproximè ad PL, ut angulus PTK ad angulum PTL, ob datam rationem horum angulorum & datam quoquè ſemidiametrum PK, datur & PL, ſeu diſtantia ſatellitis à centro primarii. Angulus PSL ſub quo è centro Solis S videretur diſtantia ſatellitis à centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica quæ maxima eſt, cum angulus SPL rectus eſt. Quia verò PL data eſt, elongationes maximæ heliocentrica & geocentrica æquales ſunt, ubi planeta P à Sole & terrâ æquè diſtat.

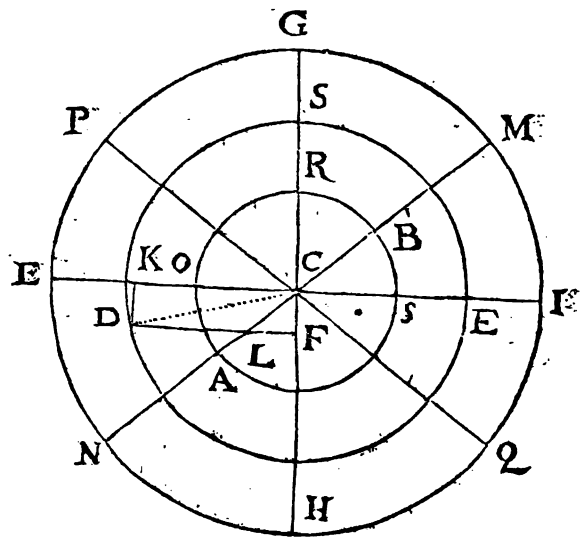
Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica ſatellitum inveniri poſſunt per eorum eclipſes maximæ durationis, atquè etiam per tranſitum ſatellitis aut umbræ illius per medium diſcum Planetæ primarii. Nam cum radius circuli ſit æqualis arcui grad. 57.29578, (lib. 1. not. 372.) & data ſit ratio radii PL ad diametrum Planetæ primarii OR, erit quamproximè ut PL ad OR, ità gradus 57.29578 ad numerum graduum arcûs exigui CA, qui ferè æqualis eſt diametro OR, ob parallelas OC, RA. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradûs CA vel OR ad gradus 360, ità tempus quo deſcribitur CA vel OR ad tempus periodicum ſatellitis, quod ità dabitur. Suppoſitâ

Theo-


C
B
A
L
O
P
R
K
N
M
Q
D
E
F
G
S
H
T

De Mundi Systemate.

Theoriâ primarii Planetæ per obſervationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur menſurando intervalla temporis inter duas ſatellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digreſſiones maximas.



52. 52. Satellitum à centro Jovis diſtantias obſervandi & in diametri partibus æſtimandi triplicem methodum deſcribit Clariſſ. Caſſinus in Elementis Aſtronomiæ anno 1740. editis.

1°. Sit ARB Jupiter, DSED orbita ſatellitis, micrometro capiatur diameter Jovis AB, deinde ubi ſatelles in maximâ elongatione verſatur, capiatur diſtantia DC, inter centrum Jovis C, & ſatellitem D, quo facto, diſtantia DC, conferatur cum diametro Jovis, habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum eſt teleſcopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo GH, EI ſeſe perpendiculariter ſecent, reliqua duo NM, PQ his ad angulos ſemirectos inſiſtant in communi ſectione C. Quibus ità paratis dirigatur teleſcopium & continuò vertatur, donec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filis, putà EI, percurrere videatur, in quo ſitu filum GH circulum aliquem horarium repræſentabit. Obſervetur deindè differentia temporis inter appulſum centri Jovis & appulſum ſatellitis in maximâ ſuâ elongatione verſantis ad eundem circulum horarium GH, differentia temporis convertatur in gradus & minuta, ità ut quatuor minutis horariis reſpondeat gradus unus, habebitur portio DF vel KC, circuli paralleli Jovis. Obſervetur etiam differentia temporis inter appulſum ſatellitis ad L, & appulſum ad F, quæ differentia ſimili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur LF, cui æqualis eſt FC, ob angulos LCF, FLC, ſemirectos. Datis verò DF & FC, datur DC. Jam conferatur DC, cum diametro Jovis AB vel OS, cujus diametri menſura habebitur, ſi tempus quo diameter per filum horarium GH, tranſit in gradus & minuta convertatur, utriuſque diametri DC, OC obtinebitur ratio, & eorumdem abſoluta magnitudo in gradibus circuli maximi ſphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, ità numerus graduum & minutorum in arcu circuli paral-

Conſtat ex obſervationibus aſtronomicis. (g) Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; & idem ex tabulâ ſequente manifeſtum eſt.

(h) *Satellitum jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''$ $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

(i) *Diſtantiæ ſatellitum à centro jovis.*

Ex obſervationibus.	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
(l) *Ex temporibus periodicis.*	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elon-

paralleli ad numerum graduum & minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur eſſe reciprocè ut circulorum radios ex elementis patet.

3°. In Eclipſibus Satellitum centralibus, dum nempè duratio eſt omnium maxima, obſervetur tempus quod ab ingreſſu centri ſatellitis in diſcum Jovis uſquè ad illius egreſſum interfluxit. Deindè fiat, ut tempus periodicum ſatellitis ad tempus moræ in diſco Jovis, ità 360° ad quartum proportionalem, hoc eſt, ad gradus quos continet arcus æqualis diſco Jovis ſatellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut ſinus ſemiſſis ejuſdem arcûs ad ſinum totum, ità ſemidiameter Jovis ad ſemidiametrum orbitæ ſatellitis, ideóque comparari poterit ſemidiameter Jovis cum ſemidiametro orbitæ ſatellitis, hoc eſt, cum diſtantiâ ſatellitis à centro ac proindè habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus ſemidiametri Jovis.

Quod Saturnum ſpectat, ſolis oculis Teleſcopio adjutis diſtantias ſatellitum à centro Saturni cum diametro annuli comparare ſolent Aſtronomi. 52

(g) * *Orbes horum planetarum* (51).

(h) * *Satellitum Jovialium tempora periodica* (ibid.).

* In noviſſimo Caſſini Opere ſuprà laudato tempora Periodica paulo majora conſtituuntur, ſcilicet, primus Satelles, 62", 2us. Sat., 4' 12"; 3us. Sat., 17'; 4us. Sat., 1h., 32', 58", tardius revolutiones ſuas abſolvere ſtatuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis Periodici reſpectu minimæ ſunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecenteſimam partem durationis totius revolutionis.

(i) * *Diſtantiæ ſatellitum à centro Jovis* (52).

(l) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum iniit hoc modo. Aſſumpſit diſtantiam obſervatam primi Satellitis $5\frac{2}{3}$, ſeu 5'667, & deindè per tempora pe-

 riodi-

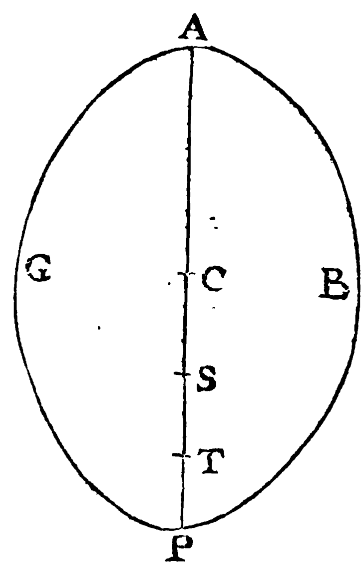
DE MUNDI SYSTEMATE.

Elongationes ſatellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut ſequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica ſatellitis quarti à centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis à terrâ diſtantiâ $8'. 16''$ circiter. Ea ſatellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis à terrâ diſtantiâ $4'. 42''$. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eâdem jovis à terrâ diſtantiâ ex temporibus periodicis prodeunt $2'. 56''. 47'''$, & $1'. 51''. 6'''$.

Diameter jovis micrometto in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & (n) ad mediocrem jovis à ſole vel terrâ

52. riodica etiam obſervata quæſivit aliorum Satellitum diſtantias, ſupponendo quadrata temporum periodicorum cubis diſtantiarum proportionalia. Nam ſi Logarithmi temporum periodicorum primi & ſecundi Satellitis dicantur l, L, & Logarithmi diſtantiarum d, D, erit $2l$ ad $2L$, arithmeticè ut $3d$ ad $3D$, ideóque $2l + 3D = 2L + 3d$, undè invenitur $D = d + \frac{2L}{3} - \frac{2}{3}l$. Eſt autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}L = 2{,}324591$, & $\frac{2}{3}l = 2{,}1228512$, quarè habetur $D = 0{,}955093$, cui reſpondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; & ità inveniuntur cæterorum Satellitum diſtantiæ per eorum tempora periodica.

(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica* ſatellitis in mediocri Jovis à Sole diſtantiâ æqualis eſt ipſius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri diſtantiâ ejuſdem Jovis à Terrâ. Sit enim ABPG orbita Jovis, Sol in S, A aphelium Jovis; P perihelium, T Terra, erit AS maxima diſtantia Jovis à Sole, SP minima; AT verò maxima diſtantia Jovis à Terrâ, PT minima, & ideò mediocris diſtantia Jovis à Sole ſeu $\frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}AS + \frac{1}{2}SP$, & mediocris diſtantia Jovis à Terrâ erit $\frac{1}{2}AT + \frac{1}{2}TP = \frac{1}{2}AP$. Quarè duæ illæ mediocres diſtantiæ ſunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ & geocentricæ in mediocribus illis diſtantiis ſunt etiam æquales.



(n) 54. * *Et ad mediocrem Jovis à Sole.* Datur poſitio lineæ ductâ ab oculo ſpectatoris ad Jovem tempore obſervationis,

râ diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quam 40'', nunquam minor quam 38'', ſæpius 39''. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40'' vel 41''. (o) Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectioribus teleſcopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora

nis, & per theoriam Solis, datur etiam poſitio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; undè datur angulus his duabus lineis interceptus, ſeu elongatio Jovis à Sole. Inſuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, & ideò notus eſt angulus quem comprehendunt duæ lineæ à centro Solis ductæ ad Jovem & ad Terram ſeu oculum obſervatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus eſt in oculo ſpectatoris ſeu in Terrâ, alter in Sole & tertius in Jove, dantur anguli omnes & exindè datur ratio laterum ſeu ratio diſtantiæ Jovis à Sole ad diſtantiam Jovis à Terrâ tempore obſervationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex obſervationibus conſtitutam, ratio diſtantiæ Jovis à Sole tempore obſervationis ad ipſius diſtantiam mediocrem à Sole vel à Terrâ. Quarè datur ratio diſtantiæ Jovis à Terrâ tempore obſervationis ad diſtantiam ejus mediocrem à Sole vel à Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis è Terrâ viſi ſunt inter ſe inversè ut diſtantiæ Jovis à Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore obſervationis ad diametrum apparentem in mediocri diſtantiâ Jovis à Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam Lux Jovis.* Newtonus prop. 7. lib. 1. optices experimentis & calculo invenit quod, ſi ex puncto lucido in axem teleſcopii poſito ad ingentem diſtantiam, radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, diſtincta & minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, eſt circulus, non verò punctum ut eſſe deberet, obſtante nimirum non tantum vitri ſphæricitate, ſed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ Lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur cujuſque ſphæricitas diametrum habet 100 ped. ſeu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri ſphæricitate oritur erit ad diametrum ejuſdem circelli maximè diſtincti qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, ſeu ut 1 ad 1200; diſtincta ſiquidem ejus puncti lucidi imago & maximè ſplendida continet partem 250^{am}. aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce debili & ſubobſcurâ quæ imaginem illam circumdat. Undè in Teleſcopio cujus apertura eſt 4 digit. & longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare viſa occupat 2'' 45''' vel 3'', & in Teleſcopio cujus apertura eſt duorum digitorum & longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago 5'' vel 6''. Itaque in Teleſcopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter 2'' in minoribus major.

* In Teleſcopiis autem rectè conſtitutis ſive ſecundum Theoriam Prop. 56. Dioptrices Hughenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet ſpatium ſuper retinâ, ſed imago ipſius objecti in Teleſcopiis majoribus majus occupat ſpatium in retina idque ſecundum rationem Radicum quadratarum longitudinis Teleſcopiorum, Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus Teleſcopiis quam in minoribus, in ratione nempe inversâ Radicum quadratarum longitudinis Teleſcopiorum.

Hæc omnia ex Doctrina Newtonianâ circa colores ita jam ſunt cognita ut ea fuſius & accuratius demonſtrare neceſſarium non judicemus.

ſo.

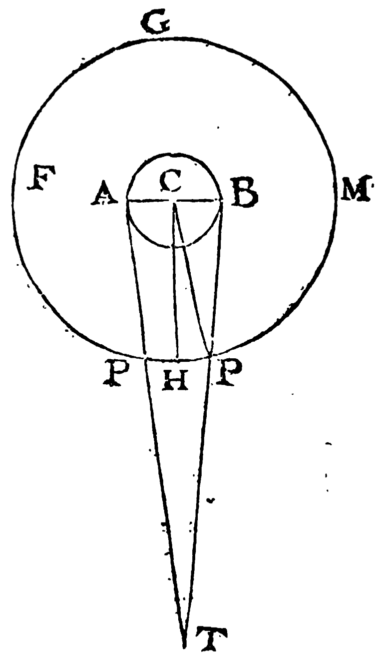
DE MUNDI SYSTEMATE.

pora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et (p) diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}''$, & per tranſitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit $37''$ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

PHÆ-

56 56. Hugenius planetarum lucem obſtaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quam ab aliis micrometro definitum eſt; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob cauſam fit quod planetæ in Sole viſi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole Hevelio, Galletio & Halleio obſervantibus, non ſuperavit 12″ vel 15″, & Venus Crabtrio ſolum 1′ 3″, Horroxio 1′ 12″ occupare viſa eſt, quæ tamen juxtà menſuras Hevelii & Hugenii extrà diſcum Solis captas implere debuiſſet 84″ ad minimum. Sic & Lunæ diameter apparens quæ anno 1684, paucis diebus antè & poſt Eclipſim Solis menſurata fuit in obſervatorio Pariſienſi 31′ 30″, in ipsâ Eclipſi non ſuperabat 30′ vel 30′ 5″. Quarè patet diametros planetarum extrà Solem minuendas eſſe & intrà Solem augendas minutis aliquot ſecundis.

(p) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri &c.* Sit T tellus, AB diameter Jovis, PFGM orbita ſatellitis, ductis è terrâ radiis TA, TB ferè parallelis, dum ſatelles deſcribit arcum Pp, videbitur è terrâ deſcribere diametrum Jovis AB cui æqualis eſt arcus Pp quamproximè, propter diſtantiæ TP magnitudinem. Datis autem tempore periodico & tempore quo deſcribitur Pp, datur ratio Pp ad to-



tum circulum, ſeu datur arcus Pp, in gradibus vel partibus gradûs, & indè datur dimidius arcus PH, hincque habetur angulus PCH ſeu ATC. Jam verò datur PC ob datas per obſervationem elongatio-

PHÆNOMENON II.

Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.

(†) *Caſſinus* utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum ſaturniorum tempora periodica.

$1^{d}. 21^{h}. 18'. 27''.$ $2^{d}. 17^{h}. 41'. 22''.$ $4^{d}. 12^{h}. 25'. 12''.$
$15^{d}. 22^{h}. 41' 14''.$ $79^{d}. 7^{h}. 48'. 00''.$

Diſtantiæ ſatellitum à centro Saturni in ſemidiametris annuli

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè.

gationes maximas ſatellitum à centro Jovis in mediocri Jovis à Tellure diſtantiâ; quarè ſi fiat AB ad PC ut duplus ſinus anguli dati PCH, ad ſinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis ſeu angulus ATB, ſub quo videtur in mediocri ejus à Tellure diſtantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per tranſitum umbræ hanc diametrum percurrentis.

(†) *Caſſinus utique &c.* Hæc ex Philoſophicis Tranſactionibus n. 187. ſunt deprompta: Exigua quædam eſt horum differentia à numeris quos in Elementis Aſtronomiæ aſſignat Caſſinus filius, ille ita determinat ſatellitum Sat. Tempora Periodica, & diſtantias.

Primi	$1^{d}. 21^{h}. 18'. 27''.$	1. 933. &c.
Secundi	$2^{d}. 17^{h}. 44'. 22''.$	2. 5.
Tertii	$4^{d}. 12^{h}. 25'. 12''.$	3. 5.
Quarti	$15^{d}. 22^{h}. 34'. 38''.$	8.
Quinti	$79^{d}. 7^{h}. 47'. 0''.$	23. paulo plus.

Obſervat autem primi & ſecundi ſatellitis diſtantias à Saturno æſtimatione ſolummodo potuiſſe determinari; motibus verò eorum ſatis accuratè nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ diſtantiâ 8 ſemi-Diametrorum annuli per Regulam Kepleri reliquorum diſtantias poſſe exquiri, atque ita inveniri.

Diſtantia primi	1.	93.
Secundi	2.	47.
Tertii	3.	45.
Quarti (ex obſervat.)	8.	
Quinti	23.	23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum obſervationibus immediatis ut ſine errore ſenſibili adhiberi poſſint. *Elem. Aſt. Tom. I. pag. 640. & ſeq.*

De Mundi Syſtemate. mè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum à centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et (q) inde diameter annuli in mediocri ſaturni à terrâ diſtantiâ eſt 42″, & diameter ſaturni 18″. (r) Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quam 16″.

PHÆ-

57. (q) * *Et indè diameter annuli.* Quia diametri apparentes ſunt in diſtantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 & 29 anno 1719, & diſtantiâ Saturni à terrâ iiſdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri diſtantiâ Saturni à terrâ, hæc autem diameter prodiit 42″; ſed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7 (per obſ.) quare diameter Saturni in mediocri à terrâ diſtantiâ eſt 18″.

(r) * *Hæc itâ ſunt* (55). * Si in hoc Teleſcopio Lux erratica ſubtendat angulum duorum ſecundorum, fiet diameter annuli 40″ & Saturni 16″ ut revera ſint in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus cum Parallaxis Solis in diſtantiâ terræ mediocri à Sole ſit 10″ ſive diameter Telluris à Sole tunc viſa ſit 20″, diſtantia verò mediocris terræ à Sole ſit ad mediocrem diſtantiam Saturni à Terrâ vel à Sole, quod idem eſt (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc Diameter terræ erit ad Diametrum annuli ut 100 ad 1908, ſive ut 1 ad 19 & ad Diametrum ipſius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

Pariter, cum Diameter Jovis in mediocri ejus à Sole diſtantiâ ſit $37\frac{1}{4}$″ ſitque mediocris diſtantia terræ ad mediocrem diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52; erit Diameter terræ, ad Diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{52 \times 37\frac{1}{4}}{200}$. Sive ut 1 ad 9: 685; ſicque Diameter Jovis eſt circiter dimidia Diametri annuli Saturni & eſt ad ipſius Saturni Diametrum ut 5 ad 4. Solis autem Diameter vera eſt circiter Decupla Diametri Jovis.

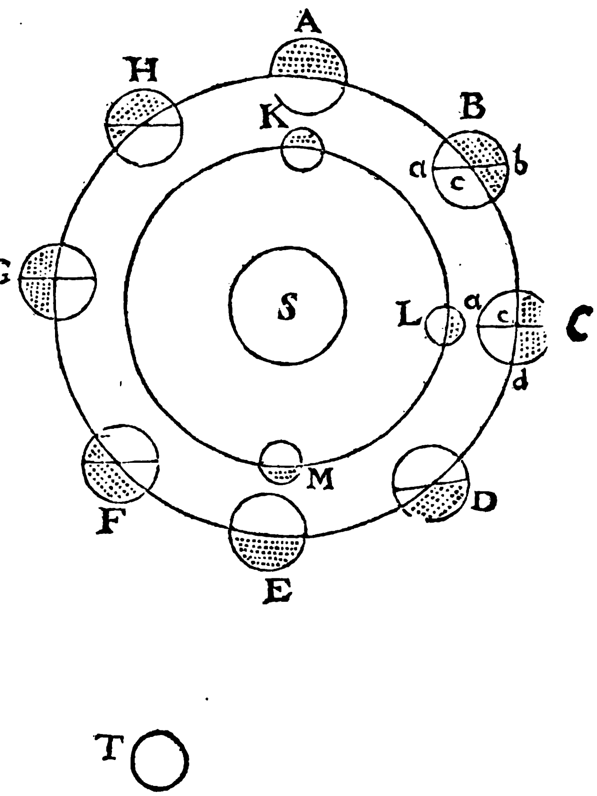
PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem; martem, jovem & ſaturnum orbibus ſuis ſolem cingere.

Mercurium & venerem circa ſolem revolvi ex (ſ) eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra ſolem ſiti ſunt; dimidiatâ è regione ſolis; falcatâ cis ſolem, per diſcum

§ 7.

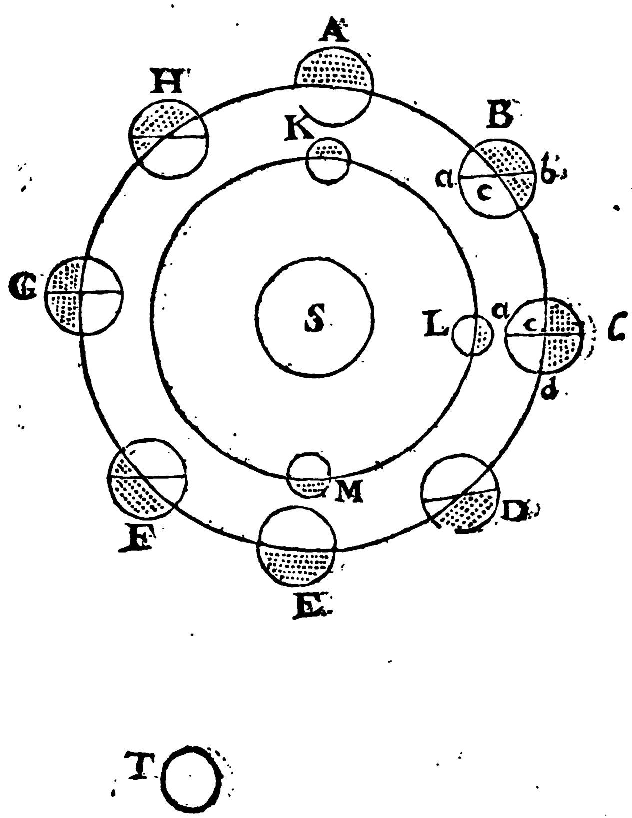
(ſ) * *Ex eorum phaſibus Lunaribus.* Si Veneris faciem teleſcopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole plenâ facie fulgere cernitur, deindè phaſes habere phaſibus Lunaribus ſimillimas partemque illuminatam Soli conſtanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur & nonnunquam per diſcum Solis ad modum maculæ nigræ & rotundæ tranſit, nunquam verò Soli opponitur neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem ferè de Mercurio obſervantur quantùm licet per ejus exiguitatem cum hoc tamen diſcrimine quod ejus elongationes maximæ à Sole 28 gradus nunquam ſuperent. Sunt igitur Venus & Mercurius corpora opaca & rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obverſa illuſtratur & pars altera à Sole averſa lumine privatur. Undè cum Venus & Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemiſphærium obſcurum telluri T obvertant, hemiſphærium verò illuſtratum Soli S, neceſſe eſt ut in illâ conjunctione inter ſolem & tellurem conſtituantur; è contrà ubi in alterâ proximè ſequenti conjunctione in A vel K verſantur, totam faciem illuſtratam & Soli obverſam è tellure T, obſervamus, hinc neceſſe eſt ut tunc temporis Sol S, inter ipſos atquè tellurem T poſitus ſit. Ubi verò Venus aut Mercurius à Sole digreditur, primum gibboſa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, poſteà falcata ſit & denique tota obſcuratur ut in locis B, C, D, E, & contrariâ ratione ſplendeſcere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per



centrum Veneris tranſiens, ea pars tantum apparet quæ eſt inter planum a c, & planum c d, undè cum projectio plani C c d, ſit ellipſis, hinc gibboſa apparet planetæ pars viſa in B, in C dimidiata & in D, falcata &c., quia à puncto A, con-

diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex martis quoque plenâ facie prope ſolis conjunctionem, & gibboſâ in quadraturis, certum eſt, quod is ſolem ambit. De jove etiam & ſaturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur: hos enim luce à ſole mutuatâ ſplendere ex umbris ſatellitum in ipſos projectis manifeſtum eſt.

PHÆ-



57. Conjunctionis ſuperioris cum Sole, elongatio ſeu angulus ATB, creſcit uſquè ad ſitum C è regione Solis, ubi digreſſio maxima eſt & deindè decreſcit in D, atque evaneſcit in E, ac poſteà rurſùs creſcit uſquè ad G, ac deindè decreſcit & denique rurſùs evaneſcit in A. Evidens ergò eſt quod Venus & Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ tellurem excludunt. Jam cum maximæ elongationes Veneris à Sole majores ſint elongationibus maximis Mercurii, neceſſe eſt ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter & Saturnus Soli S oppoſiti, è tellure M in E plenâ facie lucentes conſpiciuntur, ideóque tellus tunc temporis inter ſolem & planetas illos colloca-

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel ſolis circa terram vel terræ circa ſolem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ mediocrium diſtantiarum à ſole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. (t) Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive ſol circa terram, ſive terra circa ſolem revolvatur. Ac de menſurâ quidem temporum periodicorum convenit inter aſtro-

locatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindéque partem illuſtratam ſoli ac terræ obvertentes, ſunt ultrà ſolem poſiti; deindè verò digrediuntur à Sole & Mars quidem in quadrato cum Sole aſpectu ut in C, aliquantulum gibboſus apparet, quod hemiſpherium ipſius illuſtratum & ſoli obverſum non poſſit totum terræ ſenſibiliter obverti, quia non ſatis magna eſt ejus à tellure diſtantia. At Jupiter & Saturnus cum longiùs à Sole & tellure diſtent, hemiſphærium illuminatum Soli ac telluri ſemper obvertunt ſenſibiliter; nam cum (ex obſ.) Mars Jovem & Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, neceſſe eſt ut orbita Saturni orbitam Jovis & hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ terram & ſolem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum ſuperiorum multò minores videntur in oppoſitionibus quam in conjunctionibus planetarum, & diſtantiæ à terrâ ſunt ut diametri apparentes inverſè, neceſſe eſt ut orbitæ Martis, Jovis & Saturni ſint telluri admodum excentricæ.

(t) 58. * *Eadem utiquè ſunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà ſolem hoc modo poſſunt inveniri. Obſerventur planetarum oppoſitiones & conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta è Sole videtur in loco qui oppoſitus eſt loco Solis è terrâ viſi, undè dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò obſervatis pluribus oppoſitionibus cum temporum intervallis inter ſingulas oppoſitiones interceptis, datur tempus quo planeta circà ſolem motu vero deſcribit angulos ad ſolem inter oppoſitiones contentos & per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus ſeu revolutionem unam abſolvit. Tempore periodico ità craſsè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore ſatis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppoſitiones valdè diſſitæ iiſque addatur arcus neceſſarius ut planeta ad idem orbitæ ſuæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, ſupponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quam fixæ. Sufficit verò in his Newtoni Phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, definiantur.

Poteſt etiam tempus periodicum determinari per obſervationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla eſt, planeta verſatur in plano Eclipticæ, ſeu in nodo orbitæ ſuæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla eſt, obſervando illam antequam nulla ſit & ubi decreſcit, aut poſtquam nulla fuit & ubi creſcit, atquè per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque obſervetur hoc modo tempus elapſum inter appulſum planetæ ad nodum & reditum ejuſdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; conſtat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ ob-

De Mundi Systemate.

aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

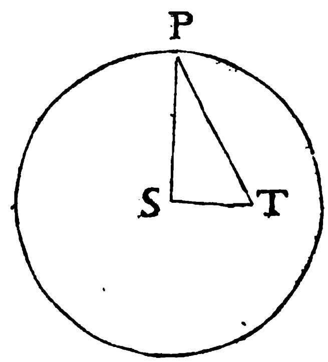
Planetarum ac telluris diſtantiæ (u) *mediocres à ſole.*

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000,	72333.	38710.

De

59. ſervari poſſunt (per not. 17. 18. 20.) & indè determinatur tempus Syzigiarum, cum videlicet longitudo planetæ non differt à longitudine ſolis quo tempore fit conjunctio, vel differt ſemicirculo ut in oppoſitione. Quod Mercurium ſpectat, determinatur ipſius conjunctio inferior cum ſole per ipſius tranſitum in diſco ſolis qui vicibus octo obſervatus fuit, dum tranſitus Veneris ſemel tantum viſus eſt, in his verò non ſupponitur telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ & ex obſervatis pluribus locis planetæ è Sole viſis per oppoſitiones vel conjunctiones aut per digreſſiones, dantur etiam ipſius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros & motus medios. Indè verò determinantur aphelia & perihelia planetarum cum ipſorum excentricitate, atquè conſtrui poſſunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri poteſt eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex obſervationibus determinari poſſint independenter ab hypotheſibus tom. 1. Element. Aſtronom. expoſuit celeberrimus Caſſinus.

(u) 60. * *Diſtantiæ mediocres à Sole.*



Planetarum diſtantiæ à Sole per obſervationes poſſunt definiri. Hic autem non quæruntur abſolutæ diſtantiæ planetarum à Sole, ſed ſolummodò rationes illarum diſtantiarum ad diſtantias ſolis à tellure. Itaque ſit Sol in S, terra quieſcens vel mota in T, planeta in P; obſervetur locus planetæ in cœlo, & per theoriam ſolis, dabitur locus ſolis tempore obſervationis ſeu poſitio lineæ TS, unde datur angulus STP. Quæratur etiam locus plane-

ta

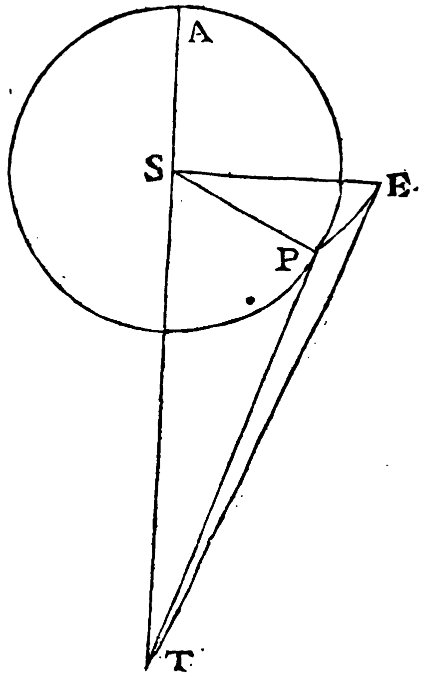
(x) De diſtantiis mercurii & veneris à ſole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum elongationes à ſole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum à ſole tollitur

PHÆNOMENA.

61.

tæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, & quia datur locus terræ T e Sole viſus atque locus planetæ P, dabitur angulus PST. In triangulo igitur PST, dantur tres anguli ac proinde datur etiam ratio laterum PS & ST, ſed, per theoriam ſolis, datur ratio ST ad mediocrem diſtantiam Solis à terrâ, & per theoriam planetæ P, datur ratio diſtantiæ SP, ad mediocrem diſtantiam planetæ à Sole, ergò dabitur ratio diſtantiæ mediocris planetæ à Sole ad diſtantiam mediocrem ſolis à terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri poſſunt, & prætereà obſervationes poſſunt fieri dum planeta eſt prope nodos, ubi ferè in plano Eclipticæ verſatur.

(x) 61. * *De diſtantiis Mercurii & Veneris.* Sit ABP orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ ſuâ elongatione. Quia orbita Veneris eſt ferè circularis, linea TP tanget orbitam in P, ideóque angulus SPT, rectus. Undè eſt ut ſinus totus ad ſinum elongationis maximæ ſeu anguli obſervati STP, ità diſtantia Solis à Terrâ ST ad diſtantiam SP, Veneris à Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur à Sole ultrà 47° 30′ & ejus elongationes maximæ nunquam minores ſunt gradibus 45° 30′. Quarè angulus SPT eſt ferè rectus. Si verò conſiderare velimus inclinationem orbitæ Veneris, ſit latitudo Veneris ex tellure obſervatâ PTE, è Sole viſa PSE, E punctum in Eclipticâ, erit ut PS ad PT, ità tangens latitudinis PTE, ad tangentem latitudinis PSE. Nam ob angulos EPT & EPS rectos, eſt PT ad PE ut ſinus totus ad tangentem anguli PTE; & ſimiliter PS ad PE ut ſinus totus ad tangentem anguli PSE, ideóque ut PS ad PT, ità tangens anguli PTE ad tangentem anguli PSE, quarè dabitur angulus iſte cum recto EPS, & ideò erit SP ad SE ut ſinus anguli SEP, complementi PSE ad rectum, ad ſinum anguli PSE, dabitur ergò SE, ſeu ratio ejus ad ST, ſicque obſervatis variis diſtantiis SP, dabitur mediocris; quia verò datur ratio ST ad mediocrem diſtantiam Solis à terrâ tempore obſervationis, dabitur ratio diſtantiæ mediocris Veneris ad diſtantiam mediocrem Solis à terrâ. Mercurii diſtantiæ à terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas à Sole, ſed quia orbita Mercurii eſt admodum excentrica, ſi Mercurius ſit in P, in maximâ digreſſione, per obſervationem notus ſit oportet angulus STP & per Theoriam motuum Mercurii angulus PST unde deducetur angulus TPS, quia angulus ille rectus non eſt, unde tandem cætera determinentur ut in Venere neglectis minutiis.

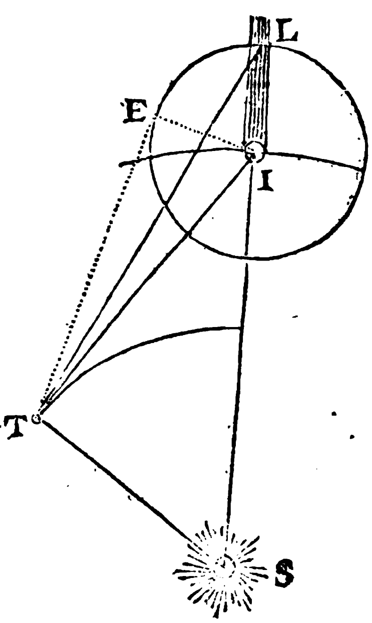


De Mundi Syſtemate. tur omnis diſputatio per eclipſes ſatellitum jovis. (*y*) Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter ſe collatis determinatur diſtantia jovis.

PHÆ

62. (*y*) 62. * *Etenim per Eclipſes Jovis determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentricâ.*

* Sit S Sol; T terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L tranſiens: Ex Terrâ T obſervetur in partibus ſemi-Diametri Jovis, diſtantia centri Jovis à Satellite in umbram ſeſe immergente & ex eâ emergente, medium inter eas diſtantias erit diſtantia à centro Jovis ad Satellitem in medio umbræ immerſum in partibus ſemi-Diametri Jovis, eadem diſtantia in minutis & ſecundis obſervari poterit, eritque menſura anguli I T L; Ducatur T E tangens ad orbitam ſatellitis, & I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoſcitur ratio maximæ elongationis hujus ſatellitis ad ſemi-Diametrum Jovis, & hic habetur in ſecundis ſemi Diameter Jovis, habebitur in ſecundis angulus I T E ſub quo apparere deberet lineâ I E, ſi Satelles foret in maximâ ſuâ elongatione eo temporis momento; ſed ex Trigonometricis, eſt ſinus anguli I T E, ad ſinum totum ſive ſinum anguli E, ut eſt I E ad T I, rurſus in Triangulo T I L eſt I L (ſive I E ipſi æqualis) ad T I ut ſinus anguli obſervati I T L ad ſinum anguli T L I; Itaque ut ſinus anguli I T E ad ſinum totum, ita ſinus anguli I T L ad ſinum anguli T L I ſive TLS; unde in Triangulo T L S, cognito per obſervationem angulo S T L & invento ut



indicatum eſt angulo TLS, habetur angulus T S L, qui additus vel detractus è longitudine Heliocentricâ terræ dat Jovis Heliocentricam longitudinem. Q. E. I.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas deſcribere temporibus minimè proportionales; at radiis ad ſolem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At ſolis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt aſtronomis notiſſima, & (z) in jove apprimè demonſtratur per eclipſes ſatellitum, quibus eclipſibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & diſtantias à ſole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi ſolis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonſtratur.* Nam per eclipſes ſatellitum determinatur locus Jovis è Sole viſus ejuſque à Sole diſtantia, & ideò collatis plurium eclipſium obſervationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem & orbita ipſa deſcribi poteſt; undè quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem deſcribere areas temporibus proportionales circà Solem. 62;

De Mundi Systemate.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum jovis, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon primum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per phænomenon primum, & corollarium ſextum propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem; & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon quintum; & propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per phænomenon quartum, & propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars propoſitionis per (a) quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicatâ (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apſidum

(a) * *Per quietem apheliorum.* * Aſtronomi motus cœleſtes calculant referendo Aſtra ad Eclipticam, cujus initium per interſectionem æquatoris & Eclipticæ determinatur; ſed illud initium fixum non eſt, & propter axis terræ nutationem interſectio illa in antecedentia fertur 5x circiter ſecundis ſingulo anno, hinc fixæ totidem ſecundis progredi videntur, Aphelia Planetarum etiam progredi videntur reſpectu ejus initii Eclipticæ, progreditur ergo ſingulo anno - - -

ſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet. LIBER TERTIUS. PROP. III. THEOR. III.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere terram, & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per phænomenon ſextum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod ſi diſtantia lunæ à centro terræ ſit ad ſemidiametrum terræ ut D ad 1; vis à quâ motus talis oriatur ſit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciprocè ut

Aphelium terræ - - -	81″.
Saturni - - -	78″.
Jovis - - -	57″.
Martis - - -	72″.
Veneris - - -	86″.
Mercurii - - -	80″.

Sed multum abeſt quam ut ille Apheliorum motus, certiſſimè determinetur, & uniformis eſſe deprehendatur; ex obſervationibus motûs Aphelii terræ nunc plus procedere quam 50″ nunc minus deprehenditur, unde quidam Aſtronomi non alium eſſe ejus motum præter motum ipſius initii Eclipticæ cenſent. Pariter ex obſervationibus Aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis ferè 33 retroceſſiſſe teſtatur Caſſinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde conſtat, Aphelia quamproximè quieſcere, & eam quantitatem exiguam motus ipſis aſſignati quæ excedit motum fixarum, forte obſervationum erroribus deberi, forte actioni mutuæ vicinorum Planetarum inter ſe; ſic cum anno 1703 Saturnus & Jupiter conjuncti fuerint, & cum nonniſi quinque annis nonaginta gradibus à ſe mutuo diſcedant patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem & Saturnum erat verſatus, ejuſque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; Poſito autem quod reverâ vis Solis in Saturnum decreſcat ſecundum quadrata diſtantiarum, & Jovis interpoſitione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propoſitione XLV. primi Libri habebitur angulum Apſidis imæ cum ſumma eſſe $180^{gr.}\sqrt{\frac{1+X.}{1+3X}}$ ſed $\frac{1+X}{1+3X}$ eſt fractio ideóque ille angulus eſt minor $180^{gr.}$ regreditur itaque Apſis ex his hypotheſibus planè ut obſervatione conſtat: Unde non obſcurè colligitur Apheliorum fixarum reſpectu quies (ſemotis his accidentalibus cauſis) ac per conſequens quod vires quibus Planetæ ad Solem retrahuntur ſunt in duplicatâ diſtantiarum ratione accuratè, ſiquidem ſi vel unâ ſexageſimâ parte, accederet ratio à duplicata ad triplicatam, Apſides tribus ad minimum gradibus progrederentur ut demonſtratum fuit in fine 1ⁱ. Coroll. Prop. 45ᵃ. Lib. I.

De Mundi Systemate. ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicatâ inversè, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ proprius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione ſolis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. (b) Actio ſolis quâtenus lunam diſtrahit à terrâ, eſt (c) ut diſtantia lunæ à terrâ quamproximè; (d) ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) eſt ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ ſolis vi tantillâ, vis reliqua quâ lunâ

§ 2. (b) * *Actio Solis quâtenus Lunam diſtrahit à terrâ.* * Motus Apogæi Lunaris uniformis non eſt, ſed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quieſcit, ſed ita ut omnibus compenſatis progrediatur, & octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; Pariter & actio Solis quâ Lunam diſtrahit à terrâ non eſt continua, actio Solis Lunam à terrâ diſtrahit dum Luna à Syzygiâ non plus quam 55. gradibus hinc inde diſceſſit, circa quadraturas verò actio Solis cum terræ attractione conſentit, Lunamque ad terram attrahit, ſed tunc & debilior eſt & per pauciores gradus agit, quam circa Syzygias, hinc effectus qui reſultat pendet ex actione Solis quâ Luna diſtrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8. cum notis).

(c) * *Eſt ut diſtantia Lunæ à Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta Lunaris Orbitæ ſucceſſivè obvertuntur Soli, & verſantur in Syzygiâ, poſtea verò in quadraturâ, & cum ea orbita non ſit circulus cujus terra ſit centrum, patet puncta Syzygiarum & quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore terræ; Jam verò vis quâ Sol diſtrahit Lunam à terrâ, in Syzygiis, ſicut & vis quâ Sol Lunam attrahit terram verſus in Quadraturis creſcit ſecundum diſtantias Lunæ à terrâ, in iis autem punctis præcipua eſt Solis actio ad Apogæum Lunæ movendum, unde effectus reſultans pendebit à differentiâ earum actionum quæ erit ſicut diſtantia Lunæ à terrâ: Vel ut melius res concipiatur, fingatur Orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter à terrâ diſtantibus, ita ut ſingulum punctum Orbitæ Lunaris ſit ſimul in Syzygiâ & quadraturâ; cum actio Solis in Syzygia ſicut & actio Solis in quadratura ſit ut diſtantiæ Lunæ à terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut diſtantia Lunæ à terra, ſed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod reſultabit ex tranſlatione dicti puncti per Syzygiam & poſtea per Quadraturam, hinc ſi motus Apogæi medius aſſumatur is pendebit ab actione quæ erit ut diſtantia Terræ à Lunâ; addit autem Newtonus quam proxime propter actionem in punctis inter Syzygias & quadraturas, ſed quæ parum hanc rationem turbant nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna diſtrahitur à Terra magis recederet ab hac ratione actiones compoſitæ ſeſe mutuò deſtruunt & in punctis à Syzygiis aut à quadraturis non remotis actio Solis ſequitur proxime eaſdem rationes ac in ipſis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam diſtrahit à terra eſt proximè ut diſtantia terræ à Lunâ.

(d) * *Ideoque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod ſi ex vi decreſcente ſecundum quadrata diſtantiarum auferatur vis quæ creſcat ſecundum ipſas diſtantias, quæ ſit ad priorem ut 1 ad ¹57.45, motus progreſſivus Apogæi etit 1ᵈ. 31ʹ. 28ʹʹ in ſingulâ revolutione; motus autem progreſſivus Apogæi Lunaris eſt circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitiâ debet eſſe ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 ſive ut 1. ad 178.725.

lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propoſitione ſequente.

Corol. Si (e) vis centripeta mediocris quâ lunâ retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ ſemidiametri terræ ad mediocrem diſtantiam centri lunæ à centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad ſuperficiem terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuo augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris à terrâ in ſyzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum* & pleroſque aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones ſolis & lunæ (omnino (f) contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, (g) auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecimâ vel decimâ quintâ par-

te

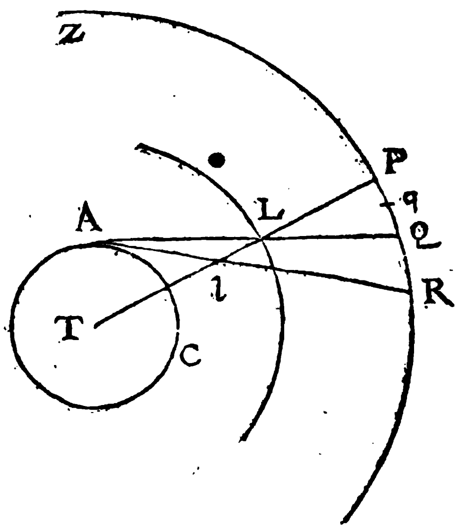
(e) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis eſt ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, ſi vis ablatitia Solis ſit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideóque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ ſuâ per vim terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quarè ſi vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret ſi nulla eſſet actio Solis. Hinc poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ſeu diſtantiæ à centro terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in ſuperficie terræ, dicendum eſt ut quadratum ſemidiametri terræ ad quadratum diſtantiæ mediocris centri Lunæ à centro terræ, ità vis centripeta ad quartum quod erit vis in ſuperficie terræ.

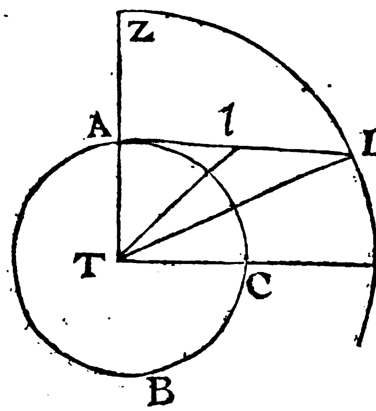
(f) * *Omninò contrà naturam lucis* (25).

(g) * *Auxerunt parallaxim Lunæ.* Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantùm augetur refractio, patet ſi determinetur pa-

De Mundi Systemate.

te totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & (h) diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti (i) à *Gallis* menſurantibus definitum eſt: &





6 a. rallaxis Lunæ, quòd ità præſtari poteſt. ACT, tellus cujus centrum T, obſervetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q à refractionibus libera, & ex tabulis eruatur pro tempore obſervationis longitudo & latitudo Lunæ; deindè (per trigon.) quæratur ipſius declinatio, habebitur ejus diſtantia à vertice Z ſeu locus P è terræ centro T viſus, differentia PQ ſeu angulus PLQ aut æqualis ALT eſt parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q è loco A viſus à refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, ſit locus viſus q, Q q metietur refractionem, undè arcus Q q, addendus eſt arcui P q ut habeatur parallaxis tota PQ; ſi verò refractio major aſſumatur ut q R, parallaxis erit major nempè PR, quaſi Luna eſſet in l; undè tantum augetur parallaxis quantum refractio ipſa.

(h) * *Diſtantia evadet.* Sit T centrum terræ & angulus ALT parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum LAT rectum, erit ſemidiameter terræ AT ad diſtantiam mediocrem Lunæ à terrâ TL, ut ſinus parallaxeos mediocris ad ſinum totum. Eſt autem parallaxis iſta 58′ circiter. Jam ducatur Tl, ſitque angulus AlT 63′ vel 62′, ob refractionem malè conſtitutam, erit TL ad Tl ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideoquè cum ſit juxtà Tychonem $Tl = 56\frac{1}{2}$ ſemid. terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{23}{58}$ vel $61\frac{43}{116}$. Quarè ſi corrigatur error qui ex refractione malè conſtitutâ oritur, diſtantia mediocris Lunæ à terrâ evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemid. terreſtr.

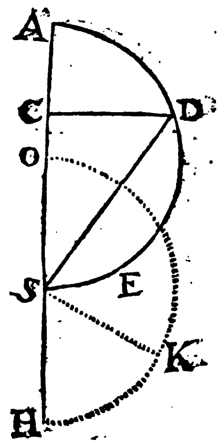
(i) * *A menſurantibus Gallis*, à Picar-

& ſi luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per corol. prop. III.) in orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per propoſitionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propoſitionis quartæ ejuſdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti

Liber Tertius. Prop. IV. Theor. IV.

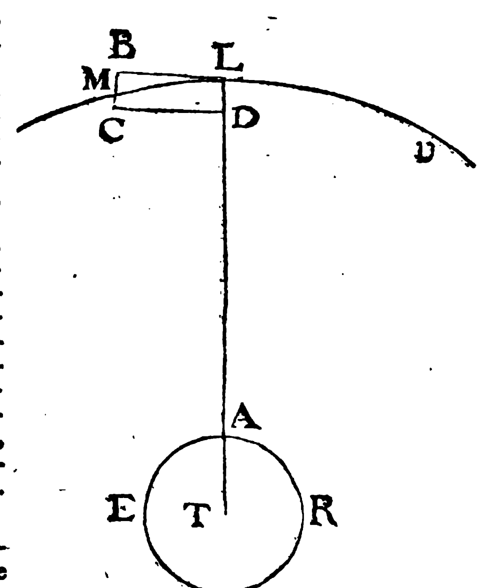
carto nimirum inventum eſt gradui circuli maximi terreſtris reſpondere hexapedas 57060 ſeu ped. Pariſ. 342360. Quare inferatur (22) ut numerus graduum arcus diſtantiæ duorum locorum ad 360°. ſeu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expreſſus ad ambitum telluris in eâdem menſurâ inveniendum, ſicque definitum eſt ambitum telluris eſſe ped. Pariſ. 123249600 ejuſque proindè diameter eſt ped. Pariſ. 39231566.

(k) 63. * *Colligitur hoc per propoſitionem XXXVI. lib. I.* * In hâc Propoſitione 36. ſit S centrum terræ, S A diſtantia mediocris Lunæ à Terra, S O dimidium ejus diſtantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi poteſt in circulo O K H erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\surd 2$ ad 1, ſit X arcus quem Luna in propriâ orbita uno minuto primo deſcribit, erit $X\surd 2$ arcus O K eodem tempore deſcriptus in circulo O K H & area O K S erit $\frac{1}{2} SO \times X\surd 2$, æqualis areæ $ASD = \frac{1}{2} AS \times CD$ (nam ob exiguitatem arcus A D pro rectâ ſumi poteſt ſive $\frac{1}{2} SO \times X\surd 2 = SO \times CD$ unde eſt $CD = \frac{X}{\surd 2}$, ſed eſt S C ad C D ut C D ad A C ergo $AC = \frac{CD^2}{SC} = \frac{X^2}{2SC}$ ſed S C eſt proximè æqualis S A ergo $AC = \frac{X^2}{2SA}$; rurſus ſit 1 ad p ut radius ad circumferentiam, orbitæ Lunaris Peripheria erit p. S A, & quoniam tota à Luna



deſcribitur tempore 27^d. 7^h. 43′. ſive minutis 39343; erit arcus $X = \frac{pSA}{39343}$ & $AC = \frac{p^2 \overline{SA}^2}{2 \times 39343^2 \times SA} = \frac{p^2 SA}{3095743298}$, eſt verò $\frac{pSA}{60}$ ambitus terræ qui pedum 123249600 ex Picarto adſumptus fuit; ideoque $pSA = 7394976000$; unde diviſione factâ eſt $AC = 2.388756$; ſed Radius eſt ad Peripheriam ut 1 ad 6.283185 &c. unde tandem habetur $AC = 15.00878$ &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. I V. deductus ita ſe habet. 63.

DE MUNDI SYSTEMATE. minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ diſtantiæ ratione inverſâ, ideoque ad ſuperficiem terræ major ſit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illâ in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ deſcendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Luteriæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſien-



ß 3 Sit R A E terra, cujus centrum T, V L orbita Lunæ cujus pars L M à Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum ſuam reſpectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur, hoc eſt, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus terræ eſt ped. Pariſ. 123249600, unde dabitur orbitæ Lunaris circumferentia quæ ejus eſt ſexagecupla 7394976000 ped. Pariſ. quæ ſi dividatur per 39343, quotus dabit longitudinem arcûs à Lunâ minuto primo deſcripti pedibus Pariſienſibus expreſſam ſcilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum diviſo, quæ eſt pedum 2353893976 habebitur ſinus verſus L D ped. Pariſ. 15.0093 &c. proximè ut priori calculo.

* Sed ex Corollario propoſitionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe ſuo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur vis ejus per Solis actionem diminutionem, & ſpatia per diverſas vires iiſdem temporibus percurſa ſunt ut illæ vires, ergo linea A C inventa $15^{ped}.009$ eſt ad ſpatium quod Luna dempta vi Solis deſcriberet ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo ſpatium eſt $15^{ped}.0934$, quæ $\frac{934}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1. lin. $1\frac{4}{9}$.

riſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et ([l]) altitudo, quam grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) ([m]) ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. 1. & 11.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab eâ diverſa eſſet, corpora viribus utriſque conjunctis terram petendo duplo velocius deſcenderent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omninò contra experientiam.

([n]) Calculus hic fundatur in hypotheſi quod terra quieſcit. Nam ſi terra & luna moveantur circum ſolem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per prop. LX. lib. I.

Scho-

(l) * *Et altitudo.* (471. lib. 1.).

(m) * *Ideòque eſt ped. Pariſ.* (ibid.).

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypotheſi quod terra quieſcit.* * Undecima Sectione Libri I. quæſivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (ſicut res ſe habet) attractione mutuâ in ſe agunt, & demonſtravit Propoſitione 58 & 59. Quod ſi è duobus corporibus ſe mutuo attrahentibus & circa commune gravitatis centrum Ellipſes ſimiles deſcribentibus, alterutrum ſit noſtra ſedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos Ellipſim deſcribere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem Ellipſim circa nos ſi immoti reverâ foremus nonniſi longiori tempore deſcriberet, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos *motos* revolvi videretur, foret ad tempus 64.
quo circa nos *immotos* revolveretur in ratione ſubduplicatâ corporis Centralis immoti ad ſummam duorum Corporum revolventium; Unde, manente eâdem gravitatis Lege, Ellipſis quæ deſcriberetur circa nos *immotos* eodem tempore quo deſcribitur Ellipſis relativa circa nos *motos*, minor foret quam ea Ellipſis relativa, & ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc Ellipſis deſcribitur ſive (ex hyp.) quadratum temporis quo deſcribitur Ellipſis relativa circa nos, eſt ad quadratum temporis quo Ellipſis relativæ ellipſi æqualis circa nos verè immotos deſcribitur, ut Cubus ſemi Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad Cubum ſemi Axis Ellipſis majoris deſcriptæ circa corpus etiam immotum & quæ Ellipſi relativæ eſt æqualis, ſed illa tempora erant in ſubduplicatâ ratione maſſæ corporis immoti

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium.

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures* circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum à *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro terræ, per prop. 1. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius deſcenderet. Qua-

65. moti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ergo, ut maſſa corporis immoti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ſic Cubus ſemi-Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad cubum ſemi-axis Ellipſis majoris reverâ deſcriptæ; Hinc cum hactenus immotam terram ſuppoſuerimus Lunamque revolventem tempore quo reverâ revolvitur & ſemiaxem orbitæ Lunaris 60 ſemi Diametrorum terræ aſſumſerimus, ſitque maſſa terræ ad maſſam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut Cubus 60. ad Cubum ſemi axeos ejus Ellipſeos quam (manente eadem gravitatis Lege eodemque tempore Periodico) Lunâ relativè deſcribet circa terram dum ipſâ terrâ mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvetur; ille ergo ſemi-Axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus Radix Cubica eſt 60.47 ferè $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ ſuâ revolvitur circà tellurem ità aliud quodvis grave ex puncto extrà telluris ſuperficiem ſecundum rectam horizontalem ſatis validè projectum orbitam deſcriberet & planetæ, inſtar periodum ſuam compleret (10. lib. 1.). Sed quò altius eſt ſuprà terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus eſt vi projectili ut projectum in planetam mutetur, & quò humilius eſt eò majori (ibid.) hoc eſt, celeritas per vim projectilem impreſſa erit inverſè ut diſtantia, v. gr. Si Luna eâdem celeri-

Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, quâ luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos gravitatem dicere ſolemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quam corpora gravia ſolent cadere.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumſaturnios in ſaturnum, & circumſolares in ſolem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumſaturniorum circa ſaturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumſolarium circa ſolem ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. II.) à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra jovis, ſaturni ac ſolis, & recedendo à jove, ſaturno & ſole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in receſſu à terrâ.

Corol. I. (o) Gravitas igitur datur in planetas univerſos. Nam venerem, mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis

leritate quâ nunc in orbitâ ſuâ revolvitur juxta terram projiceretur ſecundùm directionem horizontalem, circà tellurem non giraret, ſed terreſtrium projectilium more in terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti eſſet mota. Nam arcus quem Luna 20 ſcrupulis ſecundis horariis in ſuo circulo percurrit eſt 11″ ſi juxta tellurem accedat & eadem celeritate moveatur ille arcus erit 11′; ſinus verſus Arcus 11′ eſt $\frac{51}{10.000.000}$ Radii qui Radius cum ſit pedum 19615783 erit ſinus ille verſus pedum centum circiter, ſed grave prope terram viginti iſtis ſcrupulis ſecundis cadendo percurrit 20 × 20 × 15 $\frac{1}{12}$, ſivè 6033 ped. Unde Luna in circulo ſuo non manebit ſed longè prius in terram impegerit quam 20 ſecunda elapſa fuiſſent.

(o) 66. * *Gravitas igitur datur in Planetas univerſos;* * Datur gravitas in terram & eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV; datur gravitas in Jovem & Saturnum, nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & circum-

DE MUNDI SYSTEMATE.

generis cum jove & ſaturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua ſit, jupiter in ſatellites ſuos omnes, ſaturnus in ſuos, terraque in lunam, & ſol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (p) Gravitatem, quæ planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt planetæ omnes in ſe mutuò per corol. 1. & 2. Et (q) hinc jupiter & ſaturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, ſol perturbat motus lunares, ſol & luna perturbant mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem eſſe conſtat, & propterea gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ lunâ retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. & IV.

PRO-

66. circumſaturniorum circa Saturnum ſunt ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa terram, pendent ergo (per reg. 2.) ex gravitate eorum Satellitum in eos Planetas; Quamvis autem non ſint aut non obſervati ſint Satellites circa Martem, Venerem & Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita ſunt ſimiles ut dubitandi locus non relinquatur quod ſi Satellites juxta ipſos collocarentur idem eveniret illis ac Lunæ & circumſaturniis aut circumjovialibus, unde ſequitur Gravitatem etiam dari in illos Planetas, Poſtea propter mutuam attractionem, terram eſſe gravem in Lunam, &c. conſtabit.

(p) * *Coroll.* 2. Patet (ex reg. I. & prop. I.).

(q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio ut potè cum ſequentibus propoſitionibus conjuncta deinceps convenientius explicabitur, * ſufficiant in præſentiarum quæ de eâ ſuperius dictum eſt, occaſione quietis Apheliorum, vide notam a ad Prop. 2.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis à centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

([r]) Deſcenſus gravium omnium in terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, ſale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. ([ſ]) Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & unà cum lunâ motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; & per

(r) * *Deſcenſus gravium omnium* (3. lib. 1.).

(ſ) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non reſiſtente eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè (per cor. 6. prop. 24. lib. 2.) ideóque datis tempore & longitudine penduli, ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum eſt actio vis motricis (per cor. 6. prop. 20. lib. 2.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in lignum, hoc eſt, (per cor. 1. prop. 24. lib. 2.) ut pondus ad pondus.

De Mundi Systemate.

(t) per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum lunâ, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis, (u) erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro jovis; & propterea in æqualibus à jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc terrâ noſtrâ. Et (x) eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus à ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. (y) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maximè regulari; per corol. 3. prop. LXV. lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicatâ quam

66. (t) * *Per jam antè oſtenſa* (prop. 4. lib. hujus).

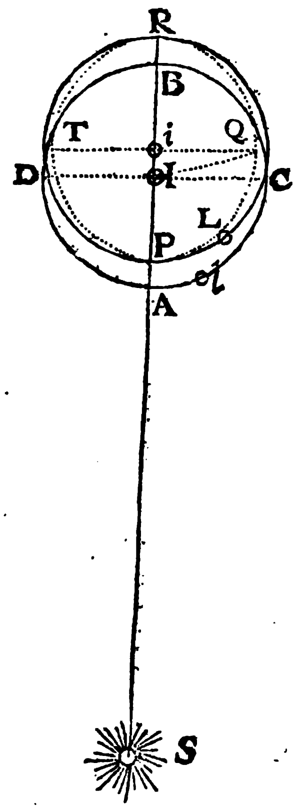
(u) * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per cor. 2. prop. 5.).

(x) * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis (cor. 2. prop. 5.) & proptereà in æqualibus à Sole diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindéque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent ſpatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumſolaris omni motu revolutionis privatus ſolâ vi centripetâ deſcenderet & ad ſolem uſquè perveniret ex datâ ejus à Sole diſtantiâ innoteſcit per not. 401. lib. 1. dimidio ſcilicet temporis periodici quo planeta ad diſtantiam duplò minorem revolvi poſſet, ſivè tempore quod eſt ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo ſolem attingeret.

(y) * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. 7. & not. 15. lib. 1.).

quam proximè; (z) uti calculo quodam inito inveni. Et ſi ſatelles minus gravis eſſet in ſolem in ratione illa d ad e, diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole minor foret quam diſtantia centri jovis à ſole in ratione illâ ſubduplicatâ. Ideoque ſi in æquali-

(z) * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L Satelles gravior in Solem quam Jupiter paribus in diſtantiis in ratione d ad e, Fiat SI ad Si ſicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ & quoniam gravitas eſt inversè ut quadrata diſtantiarum, gravitas in Solem ad diſtantiam SI erit ad gravitatem in Solem ad diſtantiam Si ut d ad e; unde ſi gravitas Jovis in I poſiti ſit ut e, & gravitas ſatellitis gravioris in I etiam poſiti ſit ut d, ejuſdem ſatellitis gravitas in i poſiti erit ut e, quare erit æqualis gravitati Jovis in I poſiti: Fingatur ſatelles l qui Jove nec gravior nec levior ſit, qui circa Jovem I circulum deſcribat ACBD; & fingatur in i corpus centrale Jovi ſimile circa quod, ſemotâ Solis actione, ſatelles gravior L deſcribere poterit orbitam PQRT priori ACBD æqualem; Reſtituatur Solis actio, actio ejus in utrumque ſatellitem erit æqualis, in ſimilibus orbitarum punctis nam propter ingentem puncti S diſtantiam erit SA ad SP, & SB ad SR ut SI ad Si, ideoque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ideóque ſi ſatellites forent æque graves, paribus in diſtantiis gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ſed quia gravitas ſatellitis l eſt ad gravitatem ſatellitis L ut e ad d compenſatur diſcrimen gravitatis ex diſtantiâ ortum per diſcrimen gravitatis ex Hypotheſi conſtitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam ſatellitis relatè ad ejus primarium pendet ex diſcrimine actionis Solis in ſatellitem & in primarium, hoc eſt in oppoſitione pendet ex reſiduo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in ſatellitem; & in conjunctione ea mutatio pendet ex reſiduo actionis Solis in ſatellitem demptâ Solis actione im primarium: Cum ergo actio Solis in ſatellites L & l ſit eadem;



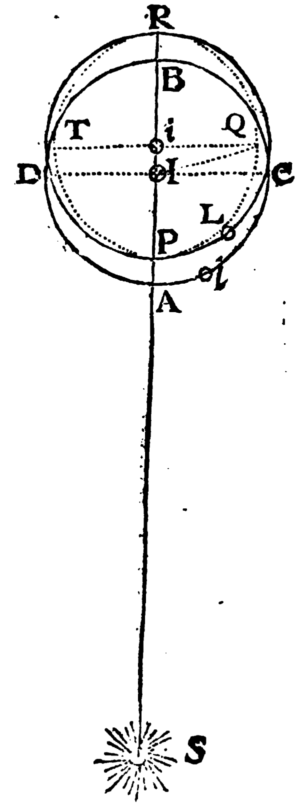
ſed actio Solis in primarium i ſit minor quam in primarium I, in oppoſitione minus eſt reſiduum quod mutationem pariet in orbita ſatellitis L, quam reſiduum quod mutationem ſatellitis l parit in orbitâ & majus è contra eſt reſiduum in conjunctione reſpectu orbitæ ſatellitis L quam reſpectu orbitæ ſatellitis l; ſed illa Reſidua tam in oppoſitione quam in conjunctione vim centripetam minuunt; Ergo vis centripeta major manet in R quam in B, & minor è contra in P quam in A, unde patet

De Mundi Syſtemate.

æqualibus à ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſ-vis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole major vel minor quam diſ-tantia

36. patet quod ut reſtituatur ſimilitudo inter orbitam ſatellitis L, & orbitam ſatellitis *l* corpus centrale debeat removeri à puncto R & accedere verſus P, hoc eſt transferri ex i verſus I; ita ut centrum orbitæ ſatellitis L remotius eſſe debeat à Sole quam ipſius corpus Centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam ſit corpus centrale in I, ſemotâ Solis actione, ſatelles L eodem tempore Periodico ac prius deſcribet Ellipſim cujus centrum i, focus verò I & axis major R P, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) & in mediocri ſuâ diſtantia I Q (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eamdem habebit quam habet ſatelles *l* in ſuo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones ſunt Parallelæ tam inter ſe quam diametro R P, & ob diſtantiarum I Q & I C æqualitatem vires centrales ſunt æquales directionis obliquitate paulum differentes; Addatur jam actio Solis, & cum ſit S Q ad S C ut S i ad S I actiones illæ Solis (ex Hyp. & demonſtratis) in ſatellites diverſæ gravitatis ſed poſitos in Q & C erunt etiam æquales; Movebitur ergo ſatelles L in mediocribus diſtantiis Q & T ut ſatelles *l* movetur in C & D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quam etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A & P, & in R & B æquales ſunt, quia ſunt differentia ejuſdem vis Solis in in I & virium Solis in A & P, ut & virium Solis in R & P, vires autem in A & P ſunt æquales ex Hyp. & dem. ut & in R & P. Unde cum vis Primarii magna cenſenda ſit reſpectu vis S; rationes virium Centripetarum reſiduarum in P & A, B & R manent inter ſe in eadem ratione ac ſi nulla foret actio Solis, & ut ſemotâ actione Solis curvas ſuas iiſdem temporibus deſcribere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media



verò in A & B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio deſcriptionis curvarum; cum ergo demonſtratum ſit quod in punctis P Q R T, A C B D actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ P Q R T, A C B D deſcribuntur cum virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde ſequitur quod ſatelles L in orbita P Q R T revolvi poterit eodem tempore iiſdemque proximè Legibus ac Satelles

ſtantia jovis à ſole ([a]) parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quintâ diſtantiæ ſatellitis extimi à centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera ſaturni & comitum ejus in ſolem, in æqualibus à ſole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera lunæ ac terræ in ſolem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia. Aliqua autem ſunt per corol. 1. & 3. prop. v. LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

Quinetiam pondera partium ſingularum planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

telles L in orbitâ ſuâ A C B D, ſi gravior ſit Jove paribus in diſtantiis in ratione duplicatâ diſtantiæ Solis à centro ſuæ orbitæ ad diſtantiam Solis ab ipſo Jove. Q. E. D.

Eamdem demonſtrationem applicari poſſe ad caſum ubi ſatelles ſupponeretur levior Jove paribus in diſtantiis, illumque tunc deſcripturum Ellipſim cujus centrum Sole vicinius erit quam Jupiter ita ut ſit gravitas ſatellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione diſtantiæ Solis à centro Orbitæ ad diſtantiam Solis à Jove. Q. alterum E. D.

Hâc ratione ſatis conſtare aſſertum Newtoni credimus, idem tamen aliter *inito calculo* magis ad mentem Newtoni demonſtrari poſſe non negamus; ſed ratio eum calculum ineundi ex iis quæ poſtea de motibus Lunaribus dicentur, erit deducenda.

(a) * *Parte* $\frac{1}{2000}$ *diſtantiæ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis ſit 1, erit (per hyp.) gravitas acceleratrix ſatellitis $1+\frac{1}{1000}$, ſed (ex dem.) diſtantia inter centrum Solis & centrum orbis ſatellitis major eſt quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione illâ ſubduplicatâ quamproximè, hoc eſt, ut 1, ad $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}$. Quarè utriuſque diſtantiæ differentia eſt $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1$ ſeu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1=\sqrt{1.001}-1=1.0004998$ &c. $-1=.0004998$ &c. ſive $=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$, ideóque diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole major erit quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius 66

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in formâ materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol.

6.61 tiùs, id eſt parte quintâ diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis.

* Nam eſt Diameter Jovis circiter decima pars Diametri Solis ut ſupra indicavimus ſive ut 997 ad 10.000, diſtantiâ extimi ſatellitis eſt 26.63 ſemi Diametrorum Jovis, ergo ea diſtantiæ ſemi Diametros Solis continebit 2.663 aut accuratiùs 2.655.

Solis ſemi Diameter mediocris è terrâ viſus ſecundum Caſſini tabulas eſt 16′. 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in Triangulo Rectangulo cujus angulus verticis eſt 16′. 4″ altitudo continet Baſim 213.96 vicibus; ergo inter ſolem & terram intervallum eſt quod Solis ſemi Diametros 213.96 contineret, ſive proximè, Solis Diametros 107.

Jovis autem diſtantiâ mediocris à Sole eſt ad diſtantiam mediocrem terræ à Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit ſemi Diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis milleſima pars eſt .556296 quæ eſt excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000â. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis, ille verò numerus .556296 eſt quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quam 2.655 ſed diſtantiâ extimi ſatellitis à Jove continebat Solis ſemi Diametros 2.655; Ergo excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000â. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis eſt ad minimum quintâ pars diſtantiæ ſatellitis extimi à Jove. Q. E. D.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, (z) vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, (a) quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis (b) gravitatis diverſi eſt generis à vi magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora

(z) * *Vacuum datur.* Quibus reſponſionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Carteſiani jam diximus (lib. 2. num. 187.).

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cum enim vis inertiæ ſit quantitati materiæ proportionalis, ſi vires inertiæ ſunt ut magnitudines, magnitudines ſunt ut quantitates materiæ, hoc eſt, ſunt ejuſdem denſitatis.

(b) * *Vis gravitatis diverſi eſt generis.* Clariſſ. Muskenbroek in Diſſertatione de Magnete plurima atque accuratiſſima de hujuſce lapidis actione refert experimenta. Ex deſcriptâ à diligentiſſimo viro experimentorum ſerie palam quidem fit æqualem non eſſe magnetis in varia corpora actionem, eamque tempeſtatum viciſſitudinibus obnoxiam & modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quam triplicatâ diſtantiarum decreſcere eadem oſtendunt experimenta. Hinc poſt tranſcriptum hoc ipſum Corollarium V., ſubdit Muskenbroek: « utinam memoriæ prodita fuiſſent « experimenta ex quibus Newtonus hæc « collegit; forſitan enim vir ſtupendæ ſub« tilitatis in Mathematicis diſciplinis me« thodum invenit ſeparandi attractiones à « repulſionibus quarum proportionem in di« ſtantiæ ratione triplicatâ decreſcere de« prehendit, ſed quia nihil de hâc re ulte« rius determinavit nec amplecti ejus ſen« tentiam poſſumus: ». Ut intelligantur hæc Clariſſ. Muskenbroekii verba, ſciendum eſt virum doctiſſimum ſuis experimentis in eam inductum fuiſſe ſuſpicionem, quod ſcilicet magnes conſtaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent quædam repellerent ità ut duæ illæ vires oppoſitæ vel ſimplicis repulſionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret veriſimilitudine, cum experimentis notiſſimum ſit magnetes non ſolùm ſeſe mutuò attrahere, ſed etiam alterutro magnete in contrariam partem converſo, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atquè attrahentem æquè oſtendit & idcircò ex eodem polo vis attrahens & repellens emanat. Si amici magnetum poli ſibi obvertantur, attractio præpollet repulſioni, ſi e contrà inimici poli ſeſe invicem reſpiciant, prævalet repulſio. Quamobrem qui ſolam attractionem vult cognoſcere, perſpectam habere debet eorumdem polorum vim repulſivam eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, ſumma indica-

De Mundi Syſtemate. pora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ

66. dicabit vim totam attrahentem. Hinc forſan fieri poſſet ut ſeparatis ab invicem attractionis repulſionisque viribus, conſtans quam Newtonus deprehendit inter attractiones & diſtantias proportio obtineret. At verò cum ex craſſis obſervationibus duntaxat id ſe animadvertiſſe fateatur Newtonus, non ità longè quærenda videtur mens noſtri autoris.

* Vim magneticam decreſcere in ratione triplicatâ diſtantiarum ab experimentis ſtatuit Wiſthonus in egregio opuſculo, De Acus magneticæ inclinatione: ipſe autem Muyſchenbroekius in Tomo primo Phyſices ſuæ, Rationem diminutionis vis magneticæ eſſe ferè quadruplicatam diſtantiarum deducit ingenioſiſſimis experimentis, ſcilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium inſtituendum impoſitis, tum admovet magnetem ſub eo qui ſuſpenſus eſt, ſic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus reſtituitur; & pondera illa addenda varia ſunt pro varia diſtantia magnetum inter ſe, ita ut videantur ſequi rationem quadruplicatam inverſam ſpatii vacui inter magnetes intercepti, quod ſpatium vacuum non eſt Cylindricum aut Priſmaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. Muyſchenbroekius erant Sphærici unde hæc ratio non eſt accurate ratio quadruplicata inverſa diſtantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta poſſunt inſtitui, nempe conſiderando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis diſtantiâ à magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta à Wiſthono inſtituta fuiſſe (niſi memoria fallit) puto, quæ forte Methodus ea eſt etiam quâ Newtonus uſus fuerat, & ſane omnibus probè notatis quæ ad æſtimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem ſecundum triplicatam rationem procedere experimentis quam accuratiſſimè potui inſtitutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cum non ſint ad manum ea quæ Wiſthonus hîc de re tradidit) referre noſtri puto eſſe inſtituti.

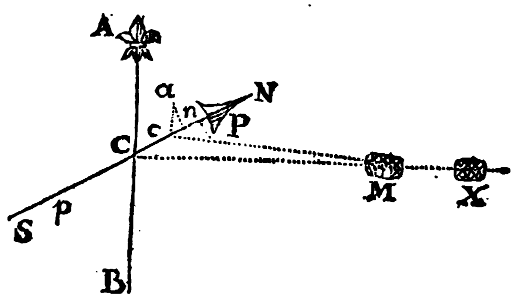
Sit ergo A C B, meridianus magneticus, N C S acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, ſitque linea C m à centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis & ſtatim ſupponatur diſtantiam C m à centro acus ad centrum magnetis eſſe Phyſicè infinitam.

Vis magnetica terræ retrahit acum a ſitu S C N ad B C A, ſed quia illi ſitui eſt obliqua, reſolvenda eſt in duas vires unam lineæ S C N perpendicularem alteram ipſi Parallelam; hæc fruſtra agit obnitente centro C, illa vero gyrationem acus efficit, itaque ſi in puncto quovis c, a c repræſentet vim magneticam totam, a n repræſentabit vim quâ convertitur acus quæ ideo eſt ad vim magneticam totam in eo puncto ut ſinus auguli a c n (declinationis acus à meridiano magnetico) ad Radium; In omnibus punctis C N vim æqualem exerceri ſupponi poteſt, ſed in parte C S vis ea repulſivè agit, ideoque conſentit cum vi quæ convertit partem C N, & ejus efficaciam geminat: Notum eſt verò quod ſi vires æquales in omnibus punctis C N agant æqualiter & perpendiculariter ut eam lineam convertant earum omnium efficacia eadem erit ac ſi ſumma omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus C N à centro C remoto, hic ergo collecta cenſeri poteſt tota vis magnetica convertens partem C N, & eodem ratiocinio vis repulſiva convertens partem C S, in puncto p, duabus tertiis arcus C S à centro C remoto, collecta cenſeri poteſt; & propter æqualitatem linearum C N, C S, ideoque partium C P ac C p, tota vis magnetica tam attractiva quam repulſiva acumconvertens puncto P applicata cenſeri poteſt.

Si magnes M ab acu infinitè diſtaret, pari ratiocinio oſtenderetur vim totam quâ con-

terræ quam vis gravitatis, & in receſſu à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantùm ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

PRO-



convertit acum in puncto P eſſe collectam, & per reſolutionem virium, vim quâ convertit acum, eſſe ad vim totam ejus magnetis M ut ſinus anguli NCM (deviationis nempe acus à magnete) ad Radium.

Hinc in caſu, in quo acus quieſcit, vis magnetica terræ convertens acum eſt æqualis vi magnetis convertenti acum, ſiquidem manet acus in æquilibrio in ſitu NSC, cum ergo ſit vis magnetica terræ tota, ad vim magneticam terræ convertentem acum ut Radius ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico; & ſit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut ſinus deviationis acus à magnete ad Radium; ex æquo & per compoſitionem rationum habebitur vis tota magnetica terræ ad vim totam magnetis M ut ſinus deviationis acus à magnete, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico, quod etiam per compoſitionem virium demonſtrari potuiſſet.

Itaque ſi idem magnes ad aliam diſtantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio ſitu acum conſtituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam terræ, ut ſinus declinationis acus à meridiano magnetico ad ſinum deviationis acus à magnete. Quare per compoſitionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut ſinus declinationis acûs à meridiano magnetico cum magnes eſt in X diviſus per ſinum deviationis ab eo magnete in X poſito, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico cum magnes eſt in M diviſum per ſinum deviationis à magnete, in M poſito, hoc eſt, vis magnetis in diverſis diſtantiis, (infinitis, reſpectu magnitudinis acus) eſt ut ſinus declinationis acus à magnetico meridiano diviſus per ſinum deviationis ejus à magnete.

Equidem quando magnes ſatis eſt vicinus ab acu ut diverſa cenſeri poſſit ejus diſtantia à diverſis punctis acus, & fortior ſit ejus vis in puncta viciniora quam in remotiora, ſimulque actio magnetis ad diverſa puncta acus diverſa cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acus magneticæ quæ ſpiculi inſtar formata circa punctum P latior eſt, centrum rotationis acus in puncto P manere cenſeri poteſt niſi nimia ſit magnetis vicinia. 66.

Ideoque diſtantia magnetis ab acu & angulus deviationis acus à magnete determinabuntur ducendo lineam à centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recenſenda vires magnetum in diverſis diſtantiis poſitorum fuerunt æſtimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum; quæ ut ſolet, attingebat utrâque extremitate circulum diviſum in ſuos gradus, ductaque linea perpendiculari in centrum acus cùm ſponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes Parallelepipedon ſuper eam lineam ita ut ejus facies Polares perpendiculares eſſent ei lineæ, Poluſque ejus meridionalis acum ſpectaret, Borealemque ejus extremum ad ſe traheret, menſurabantur diſtantiæ à centro acus ad centrum magnetis in Pollicibus lineiſque Pariſienſibus, & obſervabatur quantùm in ſingulis magnetis diſtantiis diſcederet acus à meridiano magnetico, tum, primò graphicè, poſtea calculo Trigonometrico, diſtantia centri magnetis, à centro Rota-

De Mundi Systemate.

tionis acus, ut & angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur; diviſo itaque ſinu declinationis acus per ſinum iſtius anguli Quotiens exprimit Rationem vis magneticæ
66. in diſtantia ſingula inventa, ſive Logarithmis utendo, Differentia Logarithmorum Sinuum angulorum deviationis à meridiano magnetico & à magnete erit Logarithmus vis magneticæ, in diſtantia in quâ anguli illi habentur, & tertia pars ejus differentiæ erit Logarithmus Radicis cubicæ vis magneticæ, & aſſumptis iis Radicibus cubicis in numeris, ſi per eas dividatur numerus aliquis conſtans (qui hic eſt $57\frac{3}{4}$) Quotientes erunt ipſæ diſtantiæ; Unde liquet quod Radices cubicæ virium magnetis ſunt inverſè ut diſtantiæ ſive quod vis magnetica ſit inverſè in ratione triplicatâ diſtantiarum: ſequenti verò tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ inſtituta, cum calculo inde deducto; Prima columna deſignat diſtantias à Centro acus ad Centrum magnetis; Secunda columna deſignat diſtantiam à Centro rotationis acus ad centrum magnetis; Tertia declinationem acus à meridiano magnetico cum ſuo Logarithmo & tertiâ ejus parte; Quarta, declinationem acus à lineâ ductâ à centro rotationis acus ad centrum magnetis cum ſuo Logarithmo & tertiâ parte; Quinta, differentias earum tertiarum partium, cum ſuis numeris qui rationem exprimunt Radicum cubicarum virium magnetis in diverſis diſtantiis; Sexta denique Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per iſtos numeros diviſi, qui Quotientes ipſas diſtantias quamproximè æquant.

Diſtantia à Centr. magn. ad Centrum acus.	Diſtantia à Contr. magn. ad Cent. rotat. acus.	Declin. à merid. magnetico cum Logar. & ejus tertiâ parte obſervata.	Declin. à magnete cum Logarith. & ejus tert. parte.	Differentia tertiar. part. Logar. cum ſuis numeris.	Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. quâ Radic. Cubic. virium magneticarum exhibent diviſi.
51.46	40	75^{d}.	19^{d}. 27		
		9.9849438	9.5224235	0.1541734	
		3.3283146	3.1741412	n. 1.426	40.4
60.16	50	61	35. 41		
		9.9418193	9.7658957	0.2586412	
		3.3139398	3.2552986	n. 1.144	50.4
67.49	60	44^{d}. 30.′	53^{d}. 42′		
		9.8456618	9.9062964	—1.9797885	
		3.2818873	3.3020988	n. 0.9545	60.5
83	80	21	77°. 6′		
		9.5543292	9.9888982	—1.8541437	
		3.1837764	3.3296327	n. 0.7147	80.8
101	100	11^{d}.	85^{d}. 46′		
		9.2805988	9.9988135	—1.7605951	
		3.0935329	3.3329378	n. 0.5762	100.2
120.7	120	6. 20′	89′ 22′		
		9.0426249	9.9999735	—1.6809838	
		3.0142083	3.3333245	n. 0.4797	120.4
150.2	150	3. 20	91. 15		
		8.7645111	9.9998966	—1.5882049	
		2.9215037	3.3332988	n. 0.3874	149.
160.1	160	2^{d}. 40′	91^{d}. 38′		
		8.6676893	9.9998235	—1.5559553	
		2.8892298	3.3332745	n. 0.3597	160.5

Eodem

LIBER TERTIUS. PROP. VII. THEOR. VII.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Planetas omnes in ſe mutuò graves eſſe jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque ſeorſim ſpectatum eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à centro planetæ. Et inde conſequens eſt (per prop. LXIX. lib. I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porro cum planetæ cujuſvis *A* partes omnes graves ſint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; & actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis ſit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas.

Res

Eodem modo experimenta inſtituta ſunt linea à centro magnetis ad centrum acus angulum 45 graduum cum meridiano magnetico conſtituente.

Repetita fuere ea experimenta cum duobus diverſis magnetibus, & vires quidem diverſæ ſunt repertæ ſed decreſcere ſecundum eamdem diſtantiarum rationem deprehenſæ ſunt.

Repetita fuere cum magnetibus iiſdem & armatis & armatura ſpoliatis & quod omninò obſervabile eſt, idem magnes eamdem declinationem acus magneticæ produxit ſive armatus foret ſive non armatus, in eadem nempe centri magnetis à centro acus diſtantia ac directione; Quod quidem Paradoxon videbitur cum vis quâ magnes armatus ferrum ſuſtinet, multum differat à vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen Phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet diſtantiâ ac directione ita ut cum tutius menſurarentur diſtantiæ centri acus & centri magnetis, magnete non armato ſum uſus in experimentis præcedentibus, ex quibus ſatis probari credo; *In receſſu à magnete vim magneticam decreſcere in ratione ferè triplicatâ quantum ſaltem craſſis illis obſervationibus animadverti poteſt.*

(c) * *In attractionibus magneticis & electricis*, ubi ut plurimùm quò majûs eſt attrahens, eò cæteris paribus, major eſt attractio.

De Mundi Systemate.

Res (d) intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. (e) Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hâc lege gravitare deberent in ſe mutuò, cum tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: reſpondeo quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in terram totam ut ſunt hæc corpora ad terram totam, longè minor eſt quàm quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis. Patet per corol. 3. prop. LXXIV. lib. I.

PRO-

66. (d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ ſunt ut materia in omnium formarum corporibus atquè ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus univerſis ſingulisque corporum partibus & eſſe proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem & Satellites ejus ad ſe invicem accedere ut globum unicum componant, pergent ſinguli ſeſe mutuò trahere, & viceversâ ſi corpus Jovis reſolveretur in globos plures, hi quoque globi ſatellitum inſtar ſeſe mutuò traherent.

67. Globi cujuſque vis abſoluta eſt ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unuſquiſque trahitur in alterum & quæ ponderis nomine vulgò deſignatur, eſt ut contentum ſub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum diſtantiæ inter centra (per cor. 4. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis eſt quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (def. 8. lib. 1.) vis autem acceleratrix quâ globus unuſquiſque pro ratione materiæ ſuæ attrahitur in alterum eſt ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra (per cor. 2. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis eſt velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (def. 7. lib. 1.). Hinc coporum cæleſtium motus inter ſe poſſunt facilè determinari. Quia verò reſpectu terræ totius exigua admodum ſunt corpora terreſtria, patet minimam quoque eſſe mutuam horum corporum attractionem reſpectu attractionis in terram totam. Sic ſphæra terræ homogenea diametroque pedis unius deſcripta minus trahet corpuſculum juxtà ſuperficiem ſuam quam terra juxtà ſuam in ratione diametri ſphæræ ad diametrum terræ (prop. 72. lib. 1.) hoc eſt in ratione 1 ad *39231566* ſive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis ſentiri non poteſt.

(e) * *Si quis objiciat* &c. Majora etiam quæ in terrâ concipi poſſunt corpora haud magnos effectus producent. Sit enim EMNK, tellus cujus centrum C, eaque ponatur ſphærica & homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, ſublato omni impedimento, ad telluris ſuperficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam BEC; in ipsâ telluris ſuperficie addatur ſphæra T, telluri homogenea triumque milliarium ſive Leucæ unius marinæ diametro deſcripta quam tangat recta BEC; deſignet EC vim gravitatis in ipſa ſuperficie terræ & deſignabit TB gravitatem in ipſa ſuperficie ſphæræ T (prop. 72. lib. 1.) gravitas in E, in tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut BC^2 ad EC^2 (prop. 74. lib. 1.). Quare ponendo

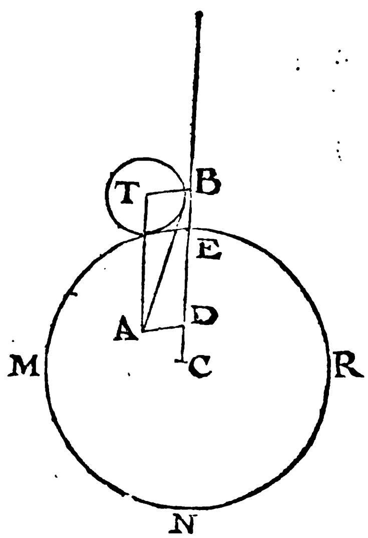
PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciprocè proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compoſitâ, an verò quam proximè. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis accuratè obtineret, prope ſuperficiem planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret.

Cùm BC^2 ad EC^2 ut EC ad BD, recta BD exibebit gravitatem in terram in loco B, ac proinde completo rectangulo TBAD, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. *lib.* 1.). Jam in triangulo rectangulo BAD, eſt BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA. Quia verò telluris ſemidiameter mediocris eſt fere 1145 Leucarum Marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari ſingulo gradus minuto reſpondenti) poni etiam poteſt recta BD æqualis EC, ideoque erit ad TB, ſive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco ſphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuſcumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipſiuſmet ſphæræ, pendulum ad radicem hujuſce montis conſtitutum vi montis attractum deviabit à perpendiculo magis quam minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, ſi pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpoſitis trahatur, ſi denſitas partium internarum terræ, major ſit quam denſitas partium montis, denique ex Piramidali montium figura, aliiſque forte cauſis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ ſenſibiles fiant niſi in maximis montibus; ut etiam D[nus]. Bouguer attractionem montis Chimboraço in Peruvio ſenſibilem deprehendit.



DE MUNDI SYSTEMATE.

raret. Tandem verò, (f) per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipſarum corollaria, intellexi veritatem propoſitionis de quâ hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium ſunt (per corol. 2. prop. IV. lib. 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad ſuperficies planetarum, aliaſve quaſvis à centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc propoſitionem) in duplicatâ ratione diſtantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis veneris circum ſolem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, ſatellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, ſatellitis Hugeniani circum ſaturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantiâ mediocri veneris à ſole & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis à centro jovis 8′. 16″. ſatellitis Hugeniani à centro ſaturni 3′. 4″. & lunæ à centro terræ 10′. 33″. (g) computum ineundo inveni quod corporum

58.

(f) * *Per prop. 75. & 76. lib. 1.* Ex ſingularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (cor. 1. prop. 7.) & gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis (per cor. 2. prop. ejuſdem). Hinc vis planetæ totius decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ conſtare ponantur (prop. 75. lib. 1.) & hujuſmodi planetæ duo ſe mutuò trahent vi decreſcente in duplicatâ ratione diſtantiæ inter centra (per corollaria ejuſdem prop.). Quamvis autem planetæ in progreſſu à centro ad circumferentiam non ſint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ diſtantiæ (prop. 76. lib. 1.) ſi ſecundùm quamcumque Legem creſcat vel decreſcat denſitas in progreſſu à centro ad circumferentiam, & ſimiliter hujuſmodi planetæ duo ſeſe invicem trahent viribus in ratione duplicatâ diſtantiarum inter centra decreſcentibus.

(g) 68. * *Computum ineundo,* * ut hæc omnia ad Algebrica ſigna revocentur; ſit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius Planetæ Primarii, L ſatelles in maximâ ſuâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus LSP, unde angulus SLP eſt rectus.

Dicatur tempus Periodicum Veneris t; tempus Periodicum ſatellitis L circa primarium P dicatur θ.

Diſtantia SP qualiſcumque ſit dicatur z;

Ratio SP ad SV quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $SV = \frac{bz}{a}$;

& Radio exiſtente 1 ſinus elongationis maximæ heliocentricæ ſatellitis L, ſive ſinus anguli LSP dicatur e;

Hinc in Triangulo SLP Rectangulo, erit ſinus

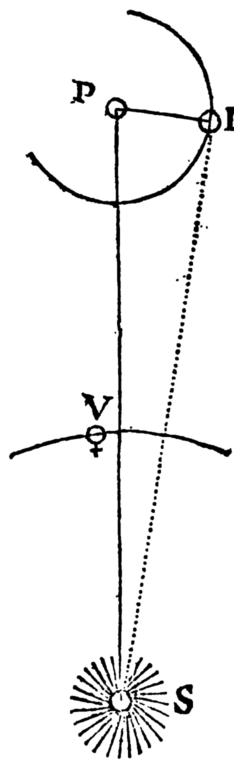
porum æqualium & à centro ſolis, jovis, ſaturni ac terræ æqualiter diſtantium pondera ſint in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram

ſinus totus anguli SLP (1) ad ſinum anguli LSP (e) ut latus SP (z) ad latus PL quod erit ergo ez;

Quoniam vis Solis in venerem & vis Primarii in ſatellitem, ſunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. 1. ut Diſtantiæ Veneris & Satellitis à Centro Solis & Primarii diviſæ per quadrata temporum Periodicorum, ſive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, ſive, ſi vis Solis dicatur 1, erit vis Primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$.

Sed vis Primarii in ſatellitem in diſtantia PL, eſt ad vim quâ in ipſum ageret ſi tantumdem diſtaret quantùm diſtat Venus à Sole, inversè ut quadrata diſtantiarum, ſiat ergo $\frac{1}{e^2z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2z^2}$ ut $\frac{aett}{b\theta\theta}$ ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ & habebitur tandem quod vis Solis in venerem eſt ad vim Primarii P in ſatellitem, ſi tantumdem diſtaret ab ipſo quantum diſtat Venus à Sole ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$.

Jam verò transferantur Venus & Satelles in alia quâcumque diſtantiâ ſed ita ut ambo iterum æqualiter diſtent à Corpore ſuo Centrali; Vires quidem Centralium corporum in ipſos mutabuntur, ſed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ diſtantiæ ad quadratum prioris diſtantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; & in eadem ratione erit vis prior Primarii in ſatellitem ad ejuſdem vim novam unde alternando, vis Prior Solis in Venerem eſt ad vim Priorem Primarii in ſatellitem, ut vis nova Solis in venerem ad vim novam primarii in Satellitem, ergo in qualicumque diſtantia, ſi modo æqualiter diſtent Venus & Satelles à ſuo Corpore Centrali vis Solis erit ad vim Primarii ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$.



Denique; cum pondera Corporum ſint ut Vires Centrales & quantitates materiæ quæ per eas Vires urgentur conjunctim, & in hoc Corollario Newtonus ſupponat *Corpora æqualia & æqualiter à Corporibus centralibus diſtantia* Pondera talium Corporum erunt ut Vires Centrales ideoque Pondus in Solem erit ad Pondus in Primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$. 81.

Computus per Logarithmos commodè initur, exempli gratia ſit P centrum Jovis, & L hujus extimus ſatelles, eſt b ad a ut 72333 ad 520096 quorum Logarithmi ſunt 4.8593365 & 5.7160855; eſt e ſinus anguli 8′ 16″ cujus Logarithmus eſt

De Mundi Systemate.

terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) reſpectivè, & auctis vel diminutis diſtantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram in diſtantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideò in eorum ſuperficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, & 435 reſpectivè. Quanta ſint pondera corporum in ſuperficie lunæ dicetur in ſequentibus.

Corol.

68. —3.3810609 (Radio exiſtente 1) hinc Logarithmus $\frac{ae}{b} = -2.2378099$, & Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3}$ hujus triplus eſt —6.7134297.

Præterea Logarithmus t (ſive 224^d. horar. 16$\frac{3}{4}$, hoc eſt, horarum 5392$\frac{3}{4}$) eſt 3.7318103, Logarithmus θ (ſive 16^d. 16$\frac{8}{15}$ horar., hoc eſt, horarum 400$\frac{8}{15}$ eſt 2.6026384 ideoque Log. $\frac{t}{\theta}$ eſt 1.1291719 & Log. $\frac{tt}{\theta\theta}$ hujus duplus eſt 2.2583438.

Unde tandem Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ eſt —4.9717735, quæ fractio in Decimalibus potuiſſet exprimi, ſed eam Newtonus exprimit unitate diviſâ per Denominatorem quemdam, cujus Logarithmus obtinebitur hunc Logarithmum —4.9717735 ex Logarithmo unitatis nempe o. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus Logarithmi numerus eſt 1067 ut eum Newtonus invenit.

(h) * *Reſpectivè &c.* * In præcedentibus Editionibus (ante Londinenſem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum Diametrorum Jovis, Saturni & Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis obſervationibus, quibuſdam minutiis immutavit, illa hæc eſſe nobis videntur.

Primò, Diametrum Solis ex mediocri Terræ diſtantiâ viſam, 32′ 8″ aſſumit, qualem etiam Caſſinus in noviſſimis Aſtronomicis Tabulis eam conſtituit, cum prius 32. 12″ ſtatueretur; tum Diametrum Jovis in mediocri ejus à Tellure diſtantia 37″ facit qualem eam prodiiſſe ſub finem primi Phænomeni dicit, cum prius fieret 40″. Ex his, cùm diſtantia mediocris Solis (ſive Telluris n. 53.) à Jove ſit ad mediocrem diſtantiam Solis à Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phænom. IV.) & Diametri veræ Sphærarum ſub parvis angulis viſarum ſint directè ut anguli ſub quibus videntur & ut Diſtantiæ ex quibus ſpectantur erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Jovis ut 1928″×100000 ad 37″×520096 ſive 10.000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, Diametrum Saturni in mediocri ejus à Sole ſive Tellure diſtantia aſſumit 16″, quem 22″ in prioribus Edit. faciebat, inde cum diſtantia ejus mediocris à Sole ſive Tellure, ſit ad mediocrem diſtantiam Solis à terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Saturni ut 1928″×100000 ad 16″×954006, ſive 10000 ad 791.

Denique Parallaxim Solis, in diſtantia ejus mediocri 10″ 30‴ conſtituit, Parallaxis verò Solis eſt ipſa ſemi-Diameter Terræ è Sole viſa, ergo Diametri veræ Solis & Terræ, ſunt ut Diameter Solis apparens ad duplum Parallaxeos Solis, hoc eſt, 1928, ad 21, ſive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut*; * Ut inſiſtere pergamus ei Analyſi quâ Newtonus uſus eſſe videtur, aſſumptis omnibus ut in Notâ 68.

Tangens ſemi-Diametri apparentis Solis dicatur s, Radio exiſtente 1.

Sinus Parallaxeos Solis (quæ eſt ſemi-Diameter primarii P è Sole viſi) dicatur p.

Vera ſemi-Diameter Primarii dicatur d.

Erit ex natura Parallaxeon p ad 1 ſicut

d ad

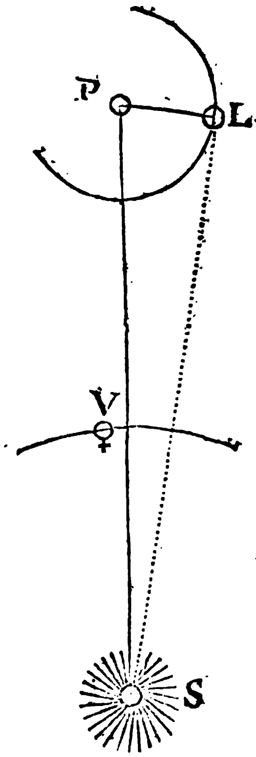
Corol. 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in planetis ſingulis. Nam quantitates materiæ in planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris, id eſt, in ſole, jove, LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

68

d ad PS quæ dicebatur z quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter ſicut 1 ad s, diſtantia z ſive $\frac{d}{p}$ ad ſemidiametrum veram Solis quæ erit $\frac{sd}{p}$.

Rurſus Parallaxis ſatellitis L dicatur q. Ex naturâ Parallaxeωn erit q ad 1 ut d ad PL, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ & numerus ſemi-Diametrorum Primarii P in ea linea PL contentus erit $\frac{1}{q}$, & cum ſingula ſemi-Diameter è Sole ſpectata, videatur ſub angulo cujus ſinus eſt p, propter iſtorum ſinuum parvitatem, anguli erunt ut ſinus, & ſinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit ſinum p numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideoque erit $e=\frac{p}{q}$.



Si autem fingatur Corpus in Solis ſuperficie poſitum, quod itaque ab ejus Centro diſtet quantitate æquali ejus veræ ſemi-Diametro $\frac{sd}{p}$, vis Solis in id Corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem diſtantiam à Centro ejus Primarii poſiti ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ per not. 68, ſive ſubſtitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3, ut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis Primarii in id corpus, erit ad vim ejuſdem corporis in ſuperficie Primarii poſiti inversè ut Quadrata diſtantiarum ſive inversè ut Quadrata Diametrorum verarum Solis & Primarii ſive erit $\frac{p^2}{s^2d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ ſicut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim Primarii in corpus in ſuâ ſuperficie poſitum, dum vis Solis in Corpus æquale in ſuâ ſuperficie etiam poſitum erit 1: Quæ quantitas $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ eſt æqualis quantitati $\frac{a^3p^3}{b^3q^3}\times\frac{tt}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus diſtantiis exprimit) diviſæ per $\frac{p^2}{s^2}$. Sed ob æqualitatem corporum vires in Corpora ſunt ut Pondera Corporum; hinc ergo habetur ratio Ponderis Corporum æqualium in ſuperficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare ſi Logarithmis utamur; Ex Logarithmo p tollatur Logarithmus s, & reſidui duplum tollatur ex Logarithmo numeri

De Mundi Systemate.

jove, ſaturno ac terrâ ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quam $10''. 30'''$, (k) debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates (l) ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, jovis, ſaturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè, & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. (m) Denſitas terræ

68. meri qui exprimebat vim Primarii in æqualibus diſtantiis, reſiduum erit Logarithmus vis Primarii in Corpora in ejus ſuperficie poſita.

Calculus iſte reſpectu Terræ commodè fieri poteſt, quia datur ex obſervatione Parallaxis Solis p, & apparens Solis ſemidiameter: In Jove & Saturno Parallaxis ipſorum eſt æqualis eorum ſemidiametro apparenti in mediocri ipſorum diſtantiâ, & ſemidiameter apparens Solis in ipſis eſt ad ſemidiametrum Solis apparentem in terrâ, inverſè ut diſtantiæ eorum & Terræ à Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* Parallaxeωn *ratione.* * Nam cum quantitates materiæ in Planetis ſingulis, ſint ut eorum vires in æqualibus diſtantiis; Quantitas materiæ in Sole eſt ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione a ad b diſtantiarum nempe Terræ & Veneris à Sole, manentibus temporibus Periodicis Veneris & Lunæ t & θ, & ſinu Parallaxeos Lunæ q, liquet quod ſi varietur ſinus Parallaxeos Solis p & ex novis obſervationibus, putà ex obſervatione tranſitus Veneris ſuper diſcum Solis, alia Parallaxis cujus ſinus ſit π deprehendatur, eo caſu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \pi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ terræ in præcedenti Hypotheſi Parallaxeos p reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut p^3 ad π^3 ſive (ob exiguitatem angulorum Parallacticorum) ut cubi Parallaxeωn.

(l) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas & inæquales ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri (loco cit.), & pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & æquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt ut quantitates materiæ in ſphæris, hoc eſt, ut denſitates ſphærarum (2. lib. 1.). Undè pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & inæquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione denſitatum & diametrorum ſphærarum, conſequenter denſitates ſphærarum ſunt pondera illa directè & ſphærarum diametri inverſè.

(m) * *Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi Solis* &c. * Ratio Ponderum in ipſis ſuperficiebus Solis & Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^5 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iiſdem

terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi ſolis, ſed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic rectè definitur. Eſt igitur ſol paulò denſior quam jupiter, & jupiter quam ſaturnus, & terra quadruplo denſior quam ſol. Nam per ingentem ſuum calorem ſol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam terra, ut in ſequentibus patebit. LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic (n) enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propiores; ut jupiter ſaturno, & terra jove. In diverſis utique diſtantiis à ſole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi terra locaretur in orbe ſaturni, rigeſceret, ſi in orbe mercurii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, (o) ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro

dem adhibitis quæ in Notis (g) & (i) aſſignantur. Denſitates verò ſunt ut illa pondera applicata ad ſphærarum Diametros vel ſemi-Diametros; ſemi-Diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, & ſemi-Diameter vera terræ erat d; Quare denſitates Solis & terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ſive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate Parallaxis Solis quæ dubia eſt non amplius adhibetur, ſed tantum quantitates de quibus conſtat apud Aſtronomos, Parallaxis nempe Lunæ; ſemi-diameter apparens mediocris Solis, Ratio diſtantiarum terræ & Veneris à Sole, & ratio temporum Periodicorum Veneris & Lunæ, quare ea *Denſitas terræ hic rectè definitur.*

(n) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera in earum ſuperficiebus ad ſphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut denſitates & ſphærarum diametri conjunctim, ſi denſiores ſint planetæ qui ſunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem denſitatem quâdam ex parte compenſabitur ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedet quam ſi planetæ omnes vel denſitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus denſiores. 68

(o) * *Septuplo denſior eſt.* Nam (14. lib. 1.) denſitas lucis decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiarum à Sole, ſed (phæn. 4.) diſtantia terræ eſt ad diſtantiam Mercurii ut 1000 ad 387 proximè. Eſt igitur denſitas lucis in Mercurii ad denſitatem lucis in terrâ ut 1000000 ad 149769 ſeu ut 6,68 ad 1, hoc eſt ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus *Thermometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit*, hæc videntur referri ad n. 270 Tranſactionum Philoſophicarum qui continet ſcalam de caloris gradibus; ingenioſè ſane conſtructam, cujus author non indicatur: «Conſtructa fuit hæc Tabula ope Thermometri & ferri candentis; Per Thermometrum ex oleo lini «conſtructum inveni (inquit author) quod «ſi oleum ubi Thermometer in nive liqueſcente

DE MUNDI SYSTEMATE.

metro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PRO-

62. «cente locabatur (computus enim in hæc Tabula inchoatur à calore quo aqua incipit rigeſcere tanquam ab infimo caloris gradu ſeu communi termino caloris & frigoris) occupabat ſpatium partium 10000 idem oleum calore corporis humani rarefactum occupabat ſpatium 10256 & calore aquæ jamjam ebullire incipientis ſpatium 10705 & calore aquæ vehementer ebullientis 10725, & calore ſtanni liquefacti ubi incipit rigeſcere 11516 &c.; Rarefactio aëris æquali calore fuit decuplo major quam rarefactio olei quaſi quindecim vicibus major quam rarefactio ſpiritus vini. Et ex his inventis ponendo calores olei ipſius rarefactioni proportionales & pro calore corporis humani ſcribendo partes 12 prodiit calor aquæ ubi vehementer ebullit partium 34 ». In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aeris æſtivi 4, 5, vel 6. Quare medium aſſumendo, eſt ut quinque ad 34 ſive proxime ut 1 ad 7, ita calor aeris æſtivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo ſeptuplus eſt caloris aeris æſtivi ſecundum aſſertum Newtonianum.

Diſputari autem poſſet, quod calor rarefactioni olei proportionalis ſupponatur abſque ſufficienti ratione, & quod terminus à quo rarefactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigeſcere) ſit ad arbitrium aſſumptus; cum ea rarefactio numerari debuiſſet ab abſoluto frigore eo nempe frigoris gradu quo partes olei nullam ulteriorem compreſſionem per vim frigoris pati poſſent, qui gradus eſt ignotus; At hujus Tabellæ conſtructio, ingenioſe demonſtratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; Locavit enim ferrum candens in vento uniformiter ſpirante, ut aer à ferro calefactus ſemper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu ſuccederet, ſic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus calefactæ ſunt & concipiebant calorem calori ferri proportionatam; Hinc ſi dividatur tempus refrigerii ferri in inſtantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi inſtantis, ad calorem durante eo inſtanti amiſſum, ſic calor ferri initio ſecundi inſtantis ad calorem durante eo ſecundo inſtanti amiſſum, &c. ideóque fingatur lineam rectam duci cujus abſciſſæ deſignent tempora; ordinatæ in extremis abſciſſis erigantur, quæ calores ferri ſingulis momentis deſignent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipſis ordinatis proportionales Geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices tranſiens erit Logarithmica, creſcentibus ergo temporibus Arithmeticè, calor ferri Geometricè decreſcit & propterea calorum eorum Geometrica ratio per Logarithmorum tabulam haberi poterit.

Quo ſuppoſito, imponebat Autor candenti ferro particulas diverſorum metallorum, & aliorum corporum liquabilium, & notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amiſsâ fluiditate rigeſcerent & tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, biſmuthum, ſtamnum, plumbum, Regulus ſtibii, eorumque variæ miſcelæ liqueſcunt innotuere, ſive eorum Geometricæ rationes, cumque calores ita inventi eamdem habuerint inter ſe rationem cum caloribus per Thermometrum inventis, propterea rectè aſſumptum fuit, rarefactiones olei ipſis caloribus eſſe proportionales,

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo à ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accuratè: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.

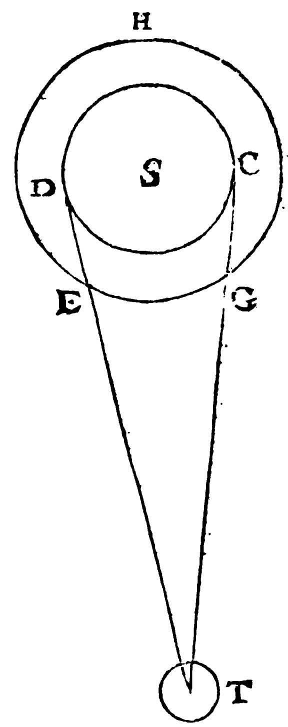
In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex aquâ conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſitâ. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus.

Eodem argumento (p) maculæ ſolares leviores ſunt quàm materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materiâ omnis gravior, quo tempore

(p) 69. *Maculæ Solares.* Si radii Solares teleſcopio duobus vitris inſtructo excipiantur, locuſque circumpoſitus obſcuretur, inverſa Solis imago ſuprà chartam ad axem teleſcopii normalem pingitur & maculæ conſpiciuntur quæ nunc emergere nunc evaneſcere obſervantur. Maculas illas in materiâ Solari ſupernatare vel ſaltem Soli quam proximas eſſe certum eſt. 69.

pore maſſa fluida erat, centrum petebat. Unde cum terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulò inferiùs in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quod copia materiæ totius

62. Sit enim Sol in S, ex Tellure T viſus ſub angulo DTC 32′. Si macula orbitam aliquam HEGH extrà Solis ſuperficiem deſcriberet, non videretur Solis diſcum ingredi antequam ad E perveniſſet ubi recta TED ex terrâ ducta diſcumque Solis tangens maculæ orbitam ſecat, & ductâ TGC Solem quoque tangente, per Solis ſuperficiem tantummodò progredi videretur, quandiù deſcriberet arcum EG qui ſemiperipheriâ minor eſt, ideóque arcus ille tempore quod ſemiperiodo minus eſt percurreretur. Sed ex obſervationibus notum eſt quamplures maculas, duas aut tres integras periodos abſolviſſe 27 dierum ſpatio atquè 13 $\frac{1}{2}$ dies impendiſſe ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipſâ ſuperficie Solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximè.



* Newtonus hic loci receptam opinionem ſequitur maculas Solares ipſi Solari ſuperficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis diſco latiores videantur quam juxta ejus limbum ubi anguſtiſſimæ apparent; & quidem hoc demonſtrat maculas eas non eſſe Planetas rotundos, ut quidam volebant, ſed eſſe corpora lata, non verò ſpiſſa, & à Sole non multum diſtare, nullomodotamen exinde probatur eas eſſe in ipſâ ſuperficie Solis: 2um. Argumentum eſt, Quod ſpatium quod maculæ emetiuntur in medio diſco Solis diurno ſpatio, ſit proportionatum revolutioni ipſarum, quod majus eſſe debuiſſet ſi forent cis Solem, ſed rurſus hoc argumentum proximitatem macularum ſuperficiei Solis, non verò earum ipſi ſuperficiei Solis adhærentiam probat.

Denique, aſſerit Keillius (Lection. Aſt. V.) obſervationibus conſtare maculas quæ integram revolutionem 27 dierum abſolvunt tredecim cum ſemiſſe dies impendere ut à limbo Occidentali Solis ad Orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cum dimidium tempus Periodi ſuæ in tranſcurrendo Solis diſco impendant, ipſarum orbita in ipsâ ſuperficie Solari extet; At Wolfius (Aſt. n°. 413.). Quoniam, inquit, maculæ Solares tribus circiter diebus diutius poſt Solem latent quam Hemiſphærium nobis conſpicuum peragrantes conſumunt, Soli quidem proximæ ſunt, non ipſi tamen ſuperficiei Solari inhærent, ſed aliquam ab eâ diſtantiam habent.

Et quidem in Aſtronomorum faſtis quæ in

tius in terrâ quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quàm ſi tota ex aquâ conſtaret; præſertim cùm terram quaſi quadruplo denſiorem eſſe quam jovem jam ante oſtenſum ſit. Quare ſi Jupiter

LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.

in manibus venerunt, numquam deprehendi maculam per tredecim ſuper diſcum Solis actu viſam fuiſſe, nullam reducem ante decimum quintum diem obſervatam & quidem cum anno 1739 plurimæ maculæ Solis diſcum percurrerent, multaſque ab ingreſſu ad egreſſum uſque perſequerer, nulla integros tredecim dies in diſco perſtare mihi viſa eſt; Cum autem quæſtio hæc tota, ſit de facto, referam obſervationes duas quæ accuratiſſimè inſtitutæ videntur, deſumetur altera è Tranſactionibus Philoſophicis Anglicanis n. 294, altera è Diario eruditorum ad annos 1676. 1677.

«15. Maii anni 1703 Septempedali Teleſcopio circa Centrum Solis maculam detexit D^{nus}. Stannyan, eamdem obſervavit diebus ſequentibus, & 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23^{a}. Maii horâ ſextâ matutina appulerat ad ipſum limbum Solis, anguſta & tenuis, ſimilis ariſtæ, & ejus diſtantia à limbo Solis non excedebat ipſius maculæ parvam Diametrum, Octava, Decima, Duodecimaque hora illam adhuc videbat; ſecunda hora ipſi circumferentiæ applicata erat nec viſibilis ipſi fuiſſet niſi totâ die oculos in ipſam intentos habuiſſet; Quarta denique hora nullum ejus veſtigium teleſcopio decem & octo pedum optimo apparebat, unde ſtatuendum illam omninò e Sole exiviſſe hora 3^{a}. poſt Meridiem 23^{æ}. diei Maii.

Tertia Junii & ſequentibus diebus ad obſervationes rediit noſter, uſus Teleſcopio decem & octo pedum, tandem die ſeptima Junii, hora tertia pomeridiana, eamdem maculam (ut poſtea certior ejus factus eſt) Solis diſcum ſubeuntem vidit, hora quarta decem & octo pedum Teleſcopio Sole luccidiſſimo eam diſtinctè vidit, ſed tenuem admodum & Elliptica atmoſphæra cinctam, ſequentibus verò diebus ex via cui inſtitit, eamdem eſſe quam prius viderat agnovit, & eam eſt perſecutus ſequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit, die verò decima nona ab hora 5ta. matutina eam obſervare cæpit Teleſcopio decem & octo pedum ferè ſingulis ſemihoris, hora duodecima Atmoſphæra & ſenſibili latitudine ſpoliatam vidit & adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipſam & limbum Solis lucis radius perciperetur; hora ſecunda evaneſcebat, ita ut hora ſecunda cum ſemiſſe evanuiſſe cenſenda ſit. 69.

Ergo à 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad ſeptimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros ſcilicet quindecim dies, ab eo tempore ad 19 Diſcum pertranſivit, per duodecim nempe dies.

Altera obſervatio Ill^{mi}. Caſſini huic omninò congrua exſtat in primo Eruditorum diario anni 1677., illic exhibet Caſſinus figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. obſervari cæpit, evanuit Novembris 3^{a}. Iterum conſpicua facta eſt quindecim poſt dies nempe 18^{a}. Novembris; evanuit verò poſt duodecim dies, nempe horâ quartâ diei 30^{æ}. Novembris, obſervationibus magnâ curâ inſtitutis ad ſingulas fere horas, poſtea verò 15^{a}. Decembris hora meridiana cum ſemiſſe Teleſcopio 35. pedum in limbo orientali Solis viſa eſt, ut inſtar lineæ obſcuræ nec aliis Teleſcopiis obſervari poterat, ſequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere per duodecim dies Solis diſcum tranſcurrere liquet.

Ex quibus ſequitur æqualitatem temporum occultationis & apparentiæ macularum obſervationibus non conſtare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate à Solis diſco diſtare maculas deducatur, & quidem cum differentia temporum eorum ſit circiter dierum trium, in ſingulo quadrante erit horarum decem & octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; ſed ſinus verſus decem graduum ſunt 15. Centeſimæ Radii, hinc tandem deducetur quod ſemi-Diameter Solis ſit ad ſemi-Diametrum

Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic (q) ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, (r) amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verùm cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{3}{5}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eâdem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eâdem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, (ſ) aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 7500000000000 ad 1 circiter. Et

62 trum circuli quem deſcribunt maculæ ut 85 ad 100 ſive ut 17 ad 20, & maculæ quindecim circiter ſemi-Diametris terræ ſupra Solis ſuperficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas eſſe Nubes in Solis Atmoſphærâ elatas, conjectatur quæ quidem fuerat Kepleri ſententia.

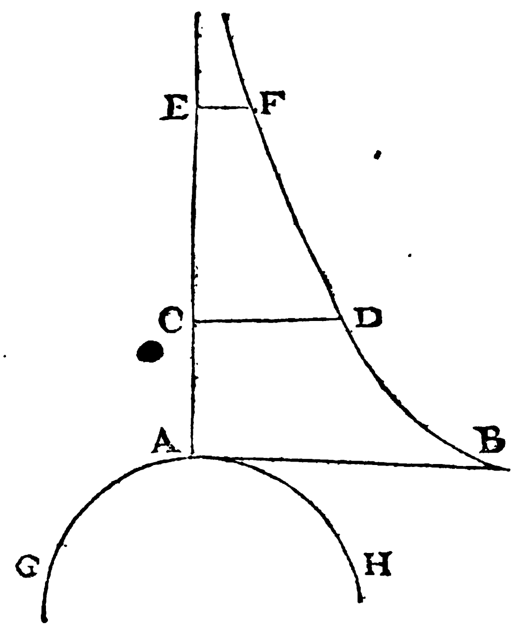
(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem deſcribit multiplicetur per 30 & factum dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis in mediocri ejus diſtantiâ à terrâ, quotus erit numerus ſemidiametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum deſcribit. Poteſt etiam idem inveniri dicendo ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus ità 30 dies ad arcum hoc tempore deſcriptum, hic arcus dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis & quotus erit numerus ſemidiametrorum quas Jupiter 30 diebus deſcribit.

(r) * *Amitteret in medio ejuſdem denſitatis.* (per ſchol. prop. 40. lib. 2. circà finem). Si diameter jovis dicatur D, V velocitas ejus ſub initio motûs, & T tempus quo velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium S quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}D$ ut denſitas jovis ad denſitatem aëris noſtri, hoc eſt, ut 860 ad 1 circiter, jupiter in aëre noſtro projectus cum velocitate V tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ deſcribit, & denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris noſtri ut 860 ad 1 ciciter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, & $459\frac{D}{2} : 30^{dies} = \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Undè ſi ponatur $t = 30$. dieb. erit $T+t = \frac{151370}{459}$, & $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0{,}09096 = \frac{1}{10}$ ferè. Cum autem Jupiter ſupponatur paulò denſior quam aqua, minorem adhuc velocitatis ſuæ partem amitteret in aëre noſtro.

(ſ) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus à terrâ diſtantiis eadem ſit, ſintque diſtantiæ in progreſſione arithmeticâ, demonſtratum eſt (in ſchol. prop. 22. lib. 2.) denſitates fore in progreſſione geometricâ. Hinc patet in variis à terrâ diſtantiis per Logarithmicam exhiberi poſſe varias aëris denſitates. Sit enim F D B Logarithmica, ſumptis abſciſſis A C, A E, in progreſſione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, EF

Et (t) hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentiâ medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem, exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſimè exhauſtis gravia intra vitrum liberrimè & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experien-

LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.



E F denſitates aëris in locis A, C, E, repræſentabunt (33. lib. 2.). Quare datis altitudinibus A C, A E, & ratione $\frac{AB}{CD}$, innoteſcet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ Logarithmicæ, per cor. 2. theor. 2. de Logarithmicâ) $AC : AE = L.\frac{AB}{CD} : L.\frac{AB}{EF}$, ideóque $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = L.\frac{AB}{EF}$.

Jam quia altitudines mercurii in barometro ſunt ut preſſiones atmoſphæræ in diverſis ab horizonte diſtantiis (prop. 20. lib. 2.). Si aëris denſitas compreſſioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus mercurii in barometro in locis A, C, datâque altitudine A E, dabitur altitudo mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit denſitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præſentem caſum transferamus, ſit G A H pars ſuperficiei terreſtris, altitudo mercurii in barometro in $A = 30$ poll. diſtantia $AC = 2280$ ped. Anglicis & altitudo mercurii in barometro in $C = 28$ poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum ſupponit. Sit altitudo $AE = 200$ milliaribus hoc eſt $= 1056000$ ped. Anglicis, ſi milliare ſit menſura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280} L.\frac{30}{28} = 13.8750613$ circiter cui Logarithmo in tabulis reſpondet numerus 7500000000000 erit ergò denſitas aëris in A, hoc eſt, in ſuperficie terræ ad ejuſdem denſitatem in diſtantia 200 milliarum ſeu ped. 1056000 ut 7500000000000 ad 1, circiter.

(t) * *Hinc ſtella Jovis.* Denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris illius ſuperioris ut 860 × 7500000000000 ad 1. Hinc

7 0,

perientiâ compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentiâ ſenſibili per ſpatia illa diutiſſimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum ſyſtematis mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per legum corol. IV.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. VIII.) materia in ſole ſit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & diſtantia jovis à ſole ſit ad ſemi-

70. $1 : 860 \times 7500000000000000 = \frac{8}{3} D : S = 17200000000000000 : D$, & $459 \frac{D}{2}$ eſt ad 17200000000000000, ut anni pars duodecima ſeu $\frac{1}{12}$ ad $T = \frac{8600000000000000}{1367}$, annis $= 6300000000000$ ferè. Ponatur $t = 1000000$ annis & erit pars motûs amiſſa tempore $t = \frac{t}{T+t} = \frac{1000000}{6300000000000 + 1000000} = \frac{1}{6300000 + 1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

ſemidiametrum ſolis in ratione paulò majore (†); incidet commune centrum gravitatis jovis & ſolis in punctum (u) paulo ſupra ſuficiem ſolis. Eodem argumento cùm materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, & diſtantia ſaturni à ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis ſaturni & ſolis in punctum (x) paulò infra ſuperficiem ſolis. (y) Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi terra & planetæ omnes ex unâ ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ ſolis diametro à centro ſolis diſtaret. (z) Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cùm autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum ſolis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

(†) * *Et diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore*, * cum ſemi-Diameter Solis è tellure viſa ſit 16′ 4″ & diſtantia Terræ à Sole ſit ad diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52 circiter, ſintque auguli ſub quo idem objectum videtur è diverſis diſtantiis reciprocè ut illæ diſtantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad ſemi-Diametrum Solis è Jove viſam, quæ itaque erit 3′. 5″ circiter, fingatur ergo Triangulum Rectangulum cujus vertex ſit in Jove & baſis ſit Solis ſemi-Diameter, angulus verticis erit 3′ 5″; Ideóque (per Tabulas Tangentium,) baſis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus; hinc diſtantia Jovis à Sole eſt ad ſemi-Diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideóque in ratione paulò majore quam ratio 1067 ad 1, hoc eſt, quam ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove. 70.

(u) * *Paulò ſuprà ſuperficiem Solis* (60. lib. 1.).

(x) * *Paulò infrà ſuperficiem Solis* (ibid.).

(y) * *Et ejuſdem calculi veſtigiis* (61. lib. 1.).

(z) * *Aliis in caſibus.* Si nempè ad diverſas Solis partes planetæ conſiſtant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quaſi medio loco iis in caſibus poni debet, minor itaque ſit centrorum diſtantia. 71.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro ſolis; ſi ſol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per prop. I. & XI. & corol. I. prop. XIII. lib. I.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minùs perturbant (per prop. LXVI. lib. I.) quam ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem jovis in ſaturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut (a) 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & ſaturni, quoniam diſtantia ſaturni à jove eſt ad diſtantiam ſaturni à ſole fere ut 4 ad 9, (b) erit gravitas ſaturni in jovem ad gravitatem ſaturni in ſolem ut 81 ad 16×1067 ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis ſaturni in ſingulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro (c) vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminui-

71. 71. Quoniam Sol pro diverſo planetarum ſitu diverſimodè agitatur, motu quodam libratorio lentè ſemper errabit, nunquam tamen integrâ, ſui diametro à centro quieſcente ſyſtematis totiùs recedet. Quia verò Solis & planetarum ponderibus (per cor. 1. prop. 8.) inventis, datoque ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. lib. 1.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propoſitum.

(a) * *Ut 1 ad 1067* (cor. 2. prop. 8.).

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (prop. 8.)

(c) * *Pro vario ſitu planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium eſſe patet (per cor. 6. 7. 8. 9. prop. 66. lib. 1.).

minuitur, aphelium nunc promovetur nunc fortè retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm ſolem à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & ſolis (per prop. LXVII. lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In (e) conjunctione autem jovis & ſaturni gravitates acceleratrices ſolis in ſaturnum, jovis in ſaturnum & jovis in ſolem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum ſolis in ſaturnum & jovis in ſaturnum eſt ad gravitatem jovis in ſolem ut 65 ad 156609 ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima ſaturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor eſt quam ea ſaturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis terræ ſenſibiliter perturbatur à lunâ. (g) Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipſin circum ſolem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad ſolem ducto areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit, terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

PRO-

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem ferè errorem, orbis Saturni umbilicus (per prop. 67. lib. 1.) locetur in communi centro gravitatis Jovis & Solis, Theoria Saturni juxtà hanc hypotheſim conſtituta ſatis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypotheſi oritur, ubi maximus eſt, vix ſuperet minuta duo prima, & error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major obſervetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta ſunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis & Saturni, diſtantia Saturni à Sole, Saturni à Jove, & Jovis à Sole ſunt inter ſe ut 9, 4 & 5, 71
circiter, gravitatis acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$ (per cor. 1. prop. 8.) hoc eſt, ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$.

(f) * *Præterquam quod orbis terræ.* Orbem terræ ſenſibiliter perturbari à lunâ oſtendetur deinceps ubi vis lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis terræ & lunæ.* (prop. 65. lib. 1.).

De Mundi Syſtemate.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quieſcunt.

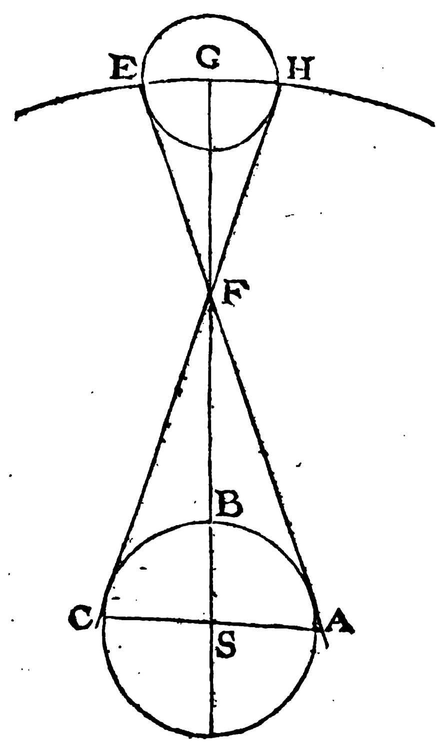
Aphelia quieſcunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem libri prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt nodi. Attamen à planetarum revolventium & (h) cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hic contemni poſſunt.

Corol I. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque (i) cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam cor-

72. (h) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorſus modo quo planetæ in ſe invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere ſimileſque effectus producere, ſed cum obſervationes Aſtronomicæ oſtendant apheliorum nodorumque motum eſſe tardiſſimum, ob parvitatem contemni poſſunt inæqualitates quæ ex planetarum & cometarum actionibus in ſe invicem oriuntur.

(i) * 72. *Cum nulla ſit earum parallaxis.* In hypotheſi terræ motæ, quieſcentibus Sole & ſtellis, tellus integram revolutionem abſolvit ſpatio 23. hor. 56′. 4″. circiter & circà ſolem revolvitur unius annì intervallo circulumque deſcribit quì ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S ſolem, ſit F ſtella fixa in Eclipticæ plano ad diſtantiam quamlibet conſtituta; Sit ABCD orbis annuus, ponaturque tellus primum in loco A deindè poſt ſex menſes perveniat ad locum C in quo diſtet à loco A totâ diametro orbis annuì, hoc eſt, 20000 terræ diametris circiter, itâ ut anguli FSA, FSC ſint recti, ſtella F ex tellure A viſa reſpondebit puncto E, quod ad diſtantiam infinitam à terrâ removeri ſupponitur. Deindè eadem ſtella ob motum terræ ab A verſùs B, progredi videbitur ab E verſùs G, donec tellure perveniente ad C ſtella videatur in H, diſtans ſcilicet à loco in



quò

corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per prop. LXX. lib. I.

LIBER TERTIUS. PROP. XIV. THEOR. XIV.

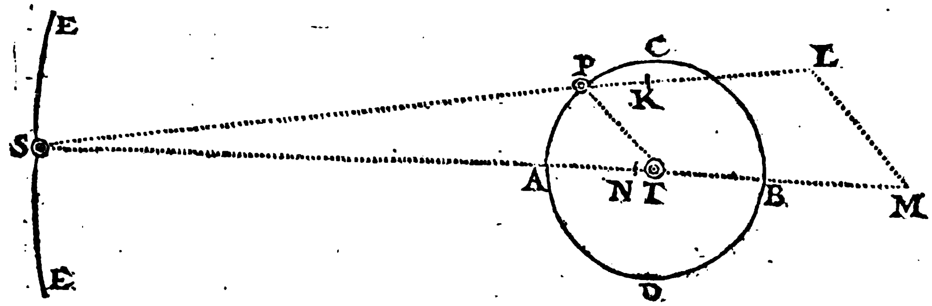
quo ante ſex menſes verſabatur, toto arcu EH, cujus menſura eſt angulus EFH vel AFC. Hujus anguli ſemiſſis AFS, eſt parallaxis orbis annui ex terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo AFS, facilè invenitur diſtantia ſtellæ fixæ à terrâ AF, ſi fiat, ut ſinus anguli AFS, ad ſinum totum, ità AS Semidiameter orbis annui quæ eſt 10000 diametrorum terræ circiter ad AF. Jam verò patet ex telluris annuo motu oriri debere tranſlationem fixarum inter ſe parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At ſtellæ majores & propiores reſpectu remotiorum quæ teleſcopiorum ope duntaxat conſpici poſſunt, moveri non obſervantur. Nulla eſt itaquè fixarum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, ideóque immenſa eſt fixarum à tellure diſtantia. Sivè autem terra moveatur, ſivè quieſcat, ſtellas fixas immenſis intervallis à terrâ diſtare certiſſimum eſt, nam parallaxim annuam minuto primo longè minorem eſſe conſentiunt omnes Aſtronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim eſſe uniùs minuti primi, à tellure diſtabit ſtella illa 3437 ſemi-Diametris orbitæ quam deſcribit terra ſiquidem ſinus unius minuti eſt ad Radium ut 1 ad 3437, & ſi ſemi-Diameter orbitæ ſit 20000 ſemi-Diametrorum terræ, ad minimum 68740000 terræ ipſius ſemi-Diametris diſtabit fixa à Tellure.

73. Chriſtianus Hugenius in Coſmotheoro lib. 2. aliam excogitavit methodum quâ rationem diſtantiæ fixarum ad diſtantiam Solis conjectando inveſtigaret. Supponit itaque ſirium quæ ſtella eſt inter alias fulgentiſſima, Soli circiter æqualem eſſe. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere poſſet ut non major aut ſplendidior ſirio appareret. Quod ut aſſequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occluſit lamellâ tenuiſſimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totiùs ut 1 ad 182. Cum verò particula illa ſirio ſplendidior adhuc appareret, foramini globulum vitreum ejuſdem cum foramine diametri objecit, taliſque foci globulum ſelegit ut lux Solis ad oculum tranſmiſſa non major aut ſplendidior videretur eâ quam à ſirio emiſſam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totiùs. Quarè Sol inſtar ſirii appareret, ſi conſpicua foret pars diametri totiùs Solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, diſtantia autem Solis à terrâ in quâ tantillus videretur foret ad diſtantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, diviſâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4‴ circiter. Hinc ſirii quoque diſtantia à terrâ eſt ad diſtantiam Solis ab eâdem ut 27664 a 1 & diameter apparens Sirii 4‴. Jam diſtantia Solis à terrâ ſi Parallaxis Solis ponatur 10″ 30‴ eſt ferè 20000 ſemid. terreſtrium, erit ergo diſtantia Sirii 553280000 ſemid. terreſtr. Si verò diſtantiam mediam Saturni à terra conſtituamus 190800 ſemid. terreſtr. prodit diſtantia inter Saturnum & Sirium 553089200 ſemid. terreſtr.

De Mundi Systemate.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quâtenus à viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et (a) inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in propor-



74. (a) 74. * *Et indè colligi poteſt.* Deſignet S Planetam aliquem ſuperiorem puta Jovem cujus Orbita ESE; ſit T Sol, P Planeta aliquis inferior, ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium ſyſtema revolvi circà corpus T manentibus orbium E S E & P A B formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem mutentur verò utcumque magnitudines & per theoriam gravitatis colligitur (cor. 15. & 16. prop. *66.* & not. in eadem corollaria) errores angulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque & motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P eſſe ut quadratum temporis periodici quam proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis Planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos ut hic aſſumit Newtonus, errores integri eo tempore deſcripti erunt ut errores ſingulâ revolutione commiſſi & ut numerus revolutionum ſæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum eſt inversè ut tempus periodicum & errores (qui ſunt, ut dictum eſt, directè ut quadratum temporis Periodici) ergo errores Apheliorum durantibus centum annis erunt in ſimplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica Planetarum P ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro T (per phæn. 4.). Sunt ergò errores Planetarum inferiorum in hâc ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Solis. Quare ſi ponatur eum eſſe aphelii Martis progreſſum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in conſequentia reſpectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis à Newtono definitur, dicendo ut Radix quadrata cubi diſtantiæ martis ad Radicem quadratam cubi diſtantiæ terræ à Sole, ita 33′ 20″ ad motum Aphelii terræ annis centum. Quamvis autem ex ipsâ gravitatis theoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in conſequentia fieri, patet ratiocinio ſimili illi quod de Lunâ factum eſt in nota c p. 24. hujuſce, unde facile conſtabit reverâ medium motum reſultantem poſt centum annos eſſe ut

portione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat $33^{\prime}. 20^{\prime\prime}$ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient $17^{\prime}. 40^{\prime\prime}$, $10^{\prime}. 53^{\prime\prime}$, & $4^{\prime}. 16^{\prime\prime}$ reſpectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc propoſitione.

Liber Tertius. Prop. XIV. Theor. XIV.

ut ipſa tempora periodica, ideóque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole. Secundùm ea quæ dicuntur in cor. 16. prop. 66. lib. 1., &c. De præſenti ſcholio hæc dicta ſint. Sed prætermittenda non ſunt verba doctiſſimi Viri Joannis Bernoullii cujus authoritatem maxime veneramur. Sic ferè habet Clariſſ. Autor in Diſſertatione de Syſtemate Carteſiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho XLI. «((Newtonus ſupponit motum aphelii Martis in conſequentia eum «eſſe ut centum annorum ſpatio 33′ 20″ «conficiat. Hinc colligit per theoriam «gravitatis quod aliorum planetarum in«feriorum aphelia moventur in conſequen«tia reſpectu fixarum, idque in propor«tione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum «planetarum à Sole. Nullo fundamento «merâque apparentiâ nixus videtur New«tonus in conſtituendâ hâc ratione ſeſ«quiplicatâ. Neque enim intelligo, ne«que ut arbitror, plures alii me ipſo perſ«picaciores intelligunt quarè mutua pla«netarum gravitatio, etiamſi concedere«tur, hanc proportionem poſtulet. Et «certè hæc eadem gravitatio planè irre«gularem effectum & ſuæ regulæ contra«rium producit reſpectu aphelii Saturni, «cum Newtonus ipſe ſtatuat in conjun«ctione Jovis & Saturni aphelium illud «nunc promoveri nunc retrahi. Numquid «de ſingulis planetis inferioribus idem quo«que ſtatuendum videretur. Nam ſi talis «admittenda foret attractio, tellus v. gr. «ubi in aphelio verſatur Jovemque reſ«pectu zodiaci præcedit, retraheretur, & «contra promoveretur ubi Jupiter tellu«rem præcederet. Undè hæc gravitatio «contrarios omninò effectus antè & poſt «conjunctionem telluris & Jovis produ«ceret. Sed nil talo obſervatur, idque ex «ſuâ hypotheſi Newtonus minimè colli«git, ſicut facere deberet.)). 74.

* Ex prædictis autem facile reſponderi poſſe videtur Viri Doctiſſimi quæſitis.

1°. Enim conceſſa Planetarum gravitatione motum Apheliorum Planetarum inferiorum ſecundum proportionem ſeſquiplicatam diſtantiarum fieri debere, Mathematicè ſequitur ex Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. ut ſupra oſtenſum eſt, illud autem Corollarium 16. tam ex Sectione nona Lib. I. quam ex ipſa Prop. LXVI. legitimè deduci, ex ipſo Newtono notiſque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ ſuæ producere reſpectu Aphelii Saturni, id vitio vertendum non eſt Syſtemati Newtoniano, quin è contra egregia procul dubio eſt ejus confirmatio. Quippe eo ipſo quod Saturnus cæteris Planetis ſit exterior, ex Syſtemate Newtoniano fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim Planetarum interiorum in conjunctione, unde Aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno obſervari, ex ipſo Caſſino didicimus, ut ſuperius notâ c pag. 23. retulimus) dum è contra Aphelia Planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione poſitorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quòd Aphelia Planetarum inferiorum nunc retrahi nunc promoveri debeant, quod tamen non obſervatur; ſcilicet Newtonus ſtatuit quidem Aphelia Planetarum inferiorum in ſyzygiis promoveri, in Quadraturis retardari, plus promoveri verò quam retardari unde in totum progredi videntur; Aphelii autem ea veluti libratio obſervabilis non

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus legem 1. & corol. 22. prop. LXVI. lib. 1. Jupiter utique reſpectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23. circiter, terra horis 23. 56′, ſol diebus $25\frac{1}{2}$ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita ſe habere ex phænomenis manifeſtum eſt. (d) Maculæ in corpore ſolis ad eundem ſitum in diſco ſolis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, reſpectu terræ; ideoque reſpectu fixarum ſol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam vero lunæ circa axem ſuum uniformiter revolventis dies menſtruus eſt: hujus facies eadem ulteriorem

75. bitur locus planetæ heliocentricus. Eſt autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut diſtantia planetæ à Sole curtata ad diſtantiam ejuſdem à tellure curtatam, ſed per obſervationem, nota eſt latitudo geocentrica planetæ, quarè innoteſcet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ ſimul & diſtantiâ à Sole curtatâ elicietur planetæ à Sole vera diſtantia & ſimili modo vera diſtantia Planetæ à terra, unde tandem in Triangulo cujus tria puncta ſunt Sol, terra & Planeta omnia latera ſunt cognita. Hâc ratione obtineri poſſunt varia loca centrica planetæ variæque à Sole diſtantiæ.

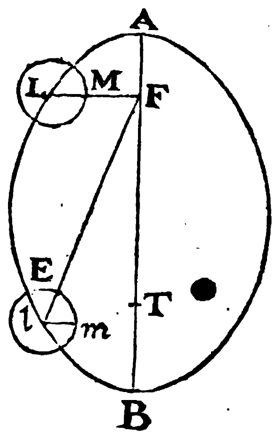
Cæterum hæc fusè variiſque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in introductione ad veram Phyſicam Joannis Keill, in Aſtronomiâ Phyſicâ Davidis Gregorii, & potiſſimum in elementis Aſtronomicis à Clariſſ. Caſſino nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cum revolutio macularum circà Solem ſit admodum regularis & maculæ ipſæ vel Soli ſupernatent vel à Sole parum diſtent (69) non maculæ circà ſolem ſed Sol ipſe $25\frac{1}{2}$ dierum ſpatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem & Martem circà axem ſuum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conſpectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus eſt, ob nimium Luminis ſplendorem, & in Saturno ob maximam ejus à terrâ diſtantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo, Attamen nil obſtat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque & Saturnum circà axem ſuum gyrare. Macularum ſolarium theoriam elegantiſſimè expoſuerunt Clariſſ. D. De-Liſle in Libro cui titulus, monumenta quæ ad Aſtronomiæ Phyſicæ & Geographiæ progreſſum conducunt, ſæpèque laudatus D. Caſſinus in Elementis Aſtronomicis. De maculis Veneris ejuſque circà axem revolutione quædam inter Aſtronomos eſt lis; à Caſſino patre 23 horis & 20′ abſolvi, ex maculâ ſive potius ſplendore quodam in diſco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tuto, ipſe enim ſcribebat de motu Veneris referente ipſius filio, *debiles adeò & confuſas eſſe Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis ſit Veneris motus per eas determinare fruſtra quæritur.* Anno vero 1726. Dnus. Bianchinus maculas Veneris Lunaribus ſimiles diu eſt perſecutus, earumque revo-

rem umbilicum orbis ejus (e) ſemper reſpiciet quamproximè, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc

Liber Tertius. Prop. XVII. Theor. XV.

revolutionem 24 diebus 8. horis abſolvi deduxit, circa axem admodum obliquum Eclipticæ; in ſuam autem ſententiam D^num. Caſſinum filium non adduxit, quia apparentiæ à D^no. Bianchino obſervatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum Parentis obſervationes, cum hypotheſi revolutionis 24 dierum & 8. horarum conſentire non poſſent, hinc quæſtio in medio remanſit non facile ſolvenda, maculæ enim Veneris nonniſi Cœlo puriſſimo obſervari poſſunt & Lutetiæ nequidem cum maximis Teleſcopiis videri potuiſſe narrat idem Ill. Caſſinus filius.

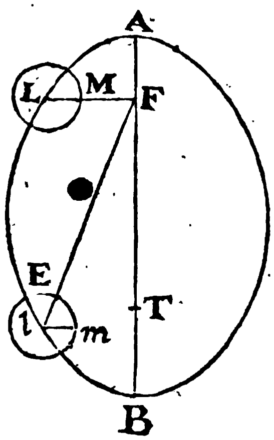


(e) 76. *Semper reſpiciet quamproximè.* Sit orbita lunæ ellipſis A L B A, in cujus umbilico T locatur terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales deſcribit (prop. 1. lib. 1.); demiſſis autem à duobus quibuſvis in ellipſeos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos ſicut tempus quo arcus L l à Lunâ deſcribitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, ſi ellipſis ſit parum excentrica. Jam referat L M meridiani Lunaris, hoc eſt, circuli per axem converſionis Lunæ planum, quod productum tranſeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F tranſibit. Quoniam enim Luna circà axem ſuum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà tellurem periodum ſuam abſolvit, patet meridiani planum quod Lunâ exiſtente in L ſitum L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem ſitum l E perveniſſe, ut poſitâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E ſit ad quatuor rectos ſicut tempus quo Luna arcum L l, percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideóque (prop. 11. lib. 5. elem.) angulus m l E eſt ad quatuor rectos ſicut L F l ad quatuor rectos, ac proinde angulus m l E æqualis eſt angulo L F l, & ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipſi l F, hoc eſt, ubi Luna in l verſatur, ejuſdem meridiani planum quod in priori ſitu L productum etiamnum tranſit per F. Quarè in quocumque Lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurat, productum ejuſdem meridiani planum tranſit per F. 76.

His præmiſſis patet eandem ferè Lunæ faciem ſemper ad terram converti eaſdemque ferè Lunares maculas obſervatori terreſtri apparere. Cum enim productum ejuſdem meridiani planum per alterum orbitæ Lunaris focum F tranſeat, ſitque Lunaris orbita parum excentrica, hoc eſt, non multum diſtent umbilici F & T, eadem quamproximè Lunæ facies terræ obvertitur. Si verò accuratè obſervatis Lunaribus maculis, Lunæ facies ad terram converſa diligentiùs conſideretur, non eadem præcisè facies à nobis videbitur. Quoniam enim ejuſdem meridiani planum L M non ad terram T, ſed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L exiſtentis hemiſphærium è tellure T viſum aliquantulum eſſe diverſum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemiſphærii Lunaris verſus plagam B quæ anteà occultabatur fit conſpicua, & contrà pars hemiſphærii alterius verſùs R quæ anteà apparebat oculis evaneſcit, motus hic Lunæ è terrâ apparens quo fit ut quædam

DE MUNDI SYSTEMATE.

Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. (g) *N. Mercator* in aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 edita, ex literis;



76. maculæ in partem à terrâ averſam ſe recipiant, dum aliæ ex parte aversâ in conſpectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet menſe periodico reſtitui manifeſtum eſt, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B verſatur; in utroque enim ſitu ejuſdem meridiani planum quod protenſum in F incidit, tranſit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia eſt quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. corollaria prop. 66. lib. 1.).

(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non eſt ad Lunarem orbitam normalis, ſed ad illam inclinatus, manifeſtum eſt Lunæ polos per vices ad terram vergere, ideóque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas è terrâ ſpectari. Quia verò axis Lunæ eſt fere ad planum Eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere à ſitu Lunæ reſpectu nodorum orbitæ Lunaris cum eclipticâ, ſeu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur ut dum Luna versùs auſtrum ab eclipticâ maximè recedit, hoc eſt, dum in limite auſtrali verſatur, Lunæ polus borealis & aliquæ ultrà polum Lunaris globi partes à Sole illuſtrentur, intereadem polus auſtralis & aliquæ citrà hunc polum regiones Lunares in tenebris immerguntur; Si ergò in hoc ſitu contingat Solem in eâdem plagâ cum limite auſtrali verſari, Luna à conjunctione cum Sole ad nodum aſcendentem, hoc eſt, versùs Boream progrediens, has regiones maculaſque polo Boreali vicinas oculis ſubducet, dum interim ab oppoſitâ plagâ aliæ cum polo auſtrali regiones è tenebris emergunt, contrariumque accidet deſcendente Lunâ novâ à limite boreali, borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem è tenebris prorepent, dum auſtraliores evaneſcunt.

(g) 78. * *D. N. Mercator.* Hic tranſcribemus N. Mercatoris verba. «Harum «tamen variarum atquè implicitarum li«brationum (Lunæ ſcilicet) cauſas, hy«potheſi elegantiſſimâ explicavit nobis Vir «Cl. Iſaac. Newton cujus humanitati «hoc & aliis nominibus plurimum debere «me lubens profiteor. Hanc igitur hypo«theſim Lectori gratificaturus, exponam «verbis, ut potero, nam delineationes in «plano vix ſufficiunt huic negotio. Ita«que reverſus ad globum, cogita nunc «illum repræſentare ſphæram in quâ mo«vetur Luna cujus centrum occupet tellus; «ipſum verò Lunæ globum credito polis «& axe ſuo inſtructum circà quem re«volvatur motu æquabili ſemel menſe ſy«dereo, dum à fixâ aliquâ digreſſa ad «eandem revertitur, & æquator Lunaris «ad firmamentum continuatus intelligatur «congruere plano horizontis lignei, & po«lus æquatoris Lunaris in firmamento im«mineat polo Boreo globi ad zenith ele«vato. Orbitam verò Lunæ concipito «partim ſuprà horizontem ligneum attol«li, partim verò infrà eundem deprimi, «quemadmodum in hoc ſitu globi conſ«pici-

literis meis plenius expoſuit. Simili motu (h) extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eâdem ſui facie ſaturnum perpetuò reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, LIBER TERTIUS. PROP. XVII. THEOR. XV.

ſpicitur ecliptica, licet angulus æquatoris Lunaris & ejus orbitæ non ſit fortè æquè magnus atque hic quem globus exhibet. Deindè finge tibi globulos duos æquales quorum uterque polis, æquatore & meridiano unico primario inſigniatur & uterque filo ſuſpendatur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili ſecundum horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circà axem ſuum revolutam reſpectu firmamenti, ità ut planum meridiani primarii Lunaris perpetuò tranſeat per centrum terræ. Alter verò globulus veram Lunam imitatus in orbitâ ſuâ feratur motu inæquali, nunc ſuprà horizontem ligneum emergens, nunc infrà eundem deſcendens, ita ut planum æquatoris hujus Lunæ veræ ſemper parallelum maneat plano horizontis lignei, & planum meridiani primarii ejuſdem Lunæ veræ ſemper parallelum plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità fit ut Luna ficta eandem nobis faciem obvertens ſemper nulli prorſùs librationi ſit obnoxia. At Luna vera dum à perigæo pergit ad apogæon præcedens Lunam fictam, meridianum ſuum primarium oſtendit in medietate ſiniſtrâ ſui diſci tot gradibus abeuntem à medio quot ſunt inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. Ab apogæo verò ad perigæon deſcendens Luna vera ſequitur fictam atquè tum meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram, hoc eſt, maculæ omnes vergunt in occaſum, & cum differentia inter mediam & veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem ſyſtematis Lunaris à centro telluris, hinc eſt quod in quadraturis librationes in longum cernuntur majores. Similiter intelligitur cauſa librationis in latum, quando Luna ſuperato nodo aſcendente, ſivè ſectione horizonti lignei & orbitæ ſuæ, tendit ad limitem boreum, tum enim nobis in centro ſphæræ poſitis, polus Lunæ boreus & quæ ſunt circà eum maculæ abſconduntur & polus auſtralis cum ſuis maculis in conſpectum venit, undè maculæ omnes conſpicuæ in boream tendere videntur; contrarium accidit, Lunâ ad limitem auſtralem accedente. Ab iiſdem cauſis procedit macularum ex parte lucidâ in obſcuram tranſitus & viciſſim. Nam in limite auſtrali polus Lunæ boreus à Sole illuſtratur & quidquid eſt zonæ frigidæ arctico Lunari incluſum, dum frigida auſtralis in tenebris verſatur. Quod ſi igitur Solem concipias in eâdem plagâ cum limite auſtrali & lunam poſt conjunctionem indè procedere ad nodum aſcendentem, tum maculæ ſuperiores apud polum boreum ſitæ, paulatim cum ſuo polo à Luce in Tenebras concedunt, dum inferiores maculæ cum polo auſtrali ex Tenebris in Lucem prorumpunt. Contrarium evenit ſemeſtri poſt, cum Sol acceſſit ad limitem Lunæ boreum ». Hactenus N. Mercator ſed plenior librationum Lunarium expoſitio habetur in elementis Aſtronomicis Clariſſ. Caſſini, ubi Vir Doctiſſ. varias harumce librationum apparentias reſpectu fixarum & Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum poſſit definiri apparens macularum Lunarium ſitus. 78

(h) * *Extimus Saturni ſatelles*, tertio ſatellite ſæpè major apparet, poſteàque decreſcit ac tandem juxtà periodum nondum probe notam evaneſcit, id tamen ut plurimum contingit dum ſatelles in orbitæ ſuæ orientali parte reſpectu Saturni verſatur, rurſus deindè in conſpectum redit. Cauſa hæc eſſe videtur quod ſcilicet hemiſphærii ſatellitis pars quæ ad nos converſa eſt, maculis obſcurata præ luminis tenuitate cerni non poſſit, revolvente autem circà axem ſatellite, ad hemiſphærium oppoſitum tranſeunt maculæ, iterumque ſatelles fit conſpicuus. Cumque in eâ orbis ſui parte quæ orientem ſpectat obſcuratus ſatelles ſemper obſervetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè probabile

DE MUNDI SYSTEMATE.

do, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in eâ corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi averſâ maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris, quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur, minores eſſe.

(i) Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (k) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem

78. bile eſt eandem hujus ſatellitis faciem planetæ primario ſemper obverti. Idem quoque ſimili argumento patet in extimo jovis ſatellite, niſi dicatur illas ſatellitum maculas fuliginum inſtar modò naſci, modò diſſipari, ſed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere poſſunt, anteponendæ ſunt explicationes quæ à motu locali repetuntur. Alios Saturni Joviſque Satellites, Lunæ inſtar, Planetis primariis invariatam manifeſtarem facie ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter ſe habere cenſet Clariſſ. Daniel Bernoullius in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has conſulat Lector.

(i) * *Planetæ ſublato omni motu circulari.* Patet (per not. 172. lib. 2.). Si planetarum materia ponatur fluida, viſque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(k) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem ſuum revolvuntur, planetarum partes à centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur eóque major eſt vis illa centrifuga quo majores ſunt circulorum quas deſcribunt peripheriæ (cor. 3. prop. 4. lib. 1.). Sed æquator eſt circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decreſcunt, quarè planetarum partes magis à centro æquatoris quam à centris parallelorum recedere conantur, ideóque ſi fluida ſit planetarum materia aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet.

dem argumento, niſi terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, ac obſervando differentiam latitudinem 2 *gr.* 28′ collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt hexapedarum Pariſienſium 57300.

(†) *Picartus* menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in

(†) * *Picartus menſurando arcum .... invenit arcum gradus unius eſſe Hexap.* 57060. * Circa hanc Picarti menſuram obſervandum Ill. Caſſinum juniorem diſtantiam terreſtrem inter Parallelos Malvoiſinæ & Ambiani 42 hex. imminuendam ſtatuiſſe, ipſum verò arcum cæleſtem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ eſſe augendum, unde arcus gradus unius evadit hexap. 57010. Noviſſimè verò D. de Maupertuis arcum cæleſtem inter Lutetias & Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quam eſſe debuiſſet ſecundum obſervationes Picarti, quare ſervatis menſuris terreſtribus Picarti arcum unius gradus 57183 hex. determinavit: Hæc paulo fuſiùs ſunt diducenda.

I. Cum menſura Picarti à Malvoiſina ad Sourdonem procedat, & hinc ad Ambianum; Picartus diſtantiam à Malvoiſina ad Sourdonem per duas Triangulorum ſeries determinat, unam præcipuam vocat quoniam ea ipſa erat quâ uti primùm conſtituerat, ſed cum aliquid dubii in eâ obſervaſſet alteram inſtituit, quam priori antepoſuit quia obſervationum in eâ factarum certior ſibi videbatur, & accurate conſentiebat cum baſi proximâ actu menſuratâ: Ill. verò Caſſinus diſtantiam inter Parallelos, Malvoiſinæ & Sourdonis ex priori ſerie determinat $68325\frac{2}{3}$ hex. dum eamdem diſtantiam Picartus, cui Ill. de Maupertuis ſuffragatur, facit hex. 68347. 78.

Differunt iterum Picartus & Illuſtriſſimus Caſſinus in diſtantiâ inter Sourdonem & Ambianum, eam enim diſtantiam Picartus ex ſuis menſuris hex. $11161\frac{2}{3}$ invenit, Caſſinus verò hex. $11135\frac{1}{2}$: diſcriminis autem hujus ratio duplex eſt, nam cum uterque Triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem & Montemdeſiderium, Ill. Caſſinus eam lineam aſſumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem ſeriem Triangulorum Picarti, & Picartus alteram ſeriem verificatam per Baſim proximam actu menſuratam anteponens eam lineam $7122\frac{1}{2}$ Hex. facit: Cum verò diverſis Triangulis inde ad Ambianum uſi ſint, in iis Triangulis occurrit ſenſibilis differentia quæ ſeſe prodit in Angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum & Montemdeſiderium protenſas, nam is Picarto eſt 137°. 56′. 10″ angulus autem idem à Caſſino determinatur 137° 53′. 30″, ex quâ differentiâ 2′. 40″. & ex Baſeos inter Sourdonem & Montemdeſiderium diverſitate, oriri potuit diſcrimen

De Mundi Syſtemate.

in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus

78. illud in diſtantiâ inter Sourdonem & Ambianum.

In arcu autem Cæleſti à Picarto menſurato refractionis correctionem adhibet Caſſinus quam neglexerat Picartus; cum ergo inveniſſet diſtantiam genu Caſſiopeæ à Zenith loci in quo obſervabat & qui erat 18 Hex. Malvoiſinâ meridionalior 9° 59′ 5″ verſus ſeptentrionem, & cum ejus ſtellæ diſtantiam à Zenith loci 75 hex. meridionaliori quam ædes Ambiani 8° 36′ 10″ inveniſſet, arcum inter Zenith eorum locorum juxta Malvoiſinam & Ambianum interceptum fecit Picartus 1°. 22′ 55″ ut refert Newtonus.

Verum propter refractionem augendas eſſe has diſtantias à Zenith ſtatuit Caſſinus ita ut prima diſtantia 10″, altera $8\frac{3}{5}$″ fiat, cum ergo prior fiat 9° - 59 - 15

Altera - - -	8	- 36	- $18\frac{3}{5}$
Arcus interceptus inter Zenith locorum obſervationis fit - - - -	1	- 22	- $56\frac{2}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu Cæleſti quam in menſuris terreſtribus, à Picarto obſervatis deducit Ill. Caſſinus arcum unius gradus eſſe 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis menſuras terreſtres quas Picartus adoptavit admittens arcum cæleſtem menſuravit Inſtrumento, à ſolertiſſimo Graham accuratiſſimè conſtructo, cum autem priores ſectores circa axem immotum ex quo filum verticale pendet revolverentur, & diviſiones ſubtiliores in ſectoris limbo per lineas tranſverſas ſignarentur, in hoc Inſtrumento Teleſcopium in ſua ſummitate duos cylindros adjunctos habet circa quos cum ſectore inferius adfixo revolvitur & ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo ſectoris; Diviſiones in eo limbo gradus & eorum partes octavas tenuiſſimis punctis indicant nihilque præterea, & ad obſervationem faciendam ita conſtituitur inſtrumentum, ut filum pendulum alicui è diviſionibus accuratè applicetur, idque Microſcopio cum lumine juxta limbum collocato agnoſcitur, tum cochleâ pellitur inſtrumentum donec objectum in axe Teleſcopii cernatur & numerus gyrorum cochleæ, parteſque ſinguli gyri numerantur in limbo circuli horologii inſtar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progreſſus maximè ſenſibiles fiant. Tali itaque inſtrumento cujus radius eſt octo pedum unâ unciâ demptâ obſervationes inſtituit Ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 Hex. magis ſeptentrionali quam ædes B. Virginis, & Ambiani in loco $98\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex ſtellis & Perſei, & Draconis, arcum cæleſtem inter Zenith eorum locorum interceptum 1° 1′ 12″ determinavit, correctionibus præceſſionis Æquinoxiorum & aberrationis lucis adhibitis. Hinc cum juxta Picartum inter Parallelos Malvoiſinæ & Ambiani ſint 78907. hex. inter Malvoiſinam & ædes B. Virginis Lutetiis ſint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter obſervationum loca. Invenitur arcum 1°. 1′. 12″ reſpondere menſuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradus Hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verum hic non diſſimulandum qualis quantuſque error obſervationi Picarti adſcribatur, ex hac noviſſimâ Ill. de Maupertuis obſervatione, & ut ille error rectè æſtimetur corrigendæ ſunt ejus obſervationes cæleſtes non tantùm per refractionem ſed etiam per Æquinoctiorum præceſſionem & aberrationem lucis, etenim cum eodem tempore factæ non fuerint obſervationes à Picarto Malvoiſinæ & Ambiano, ſed inter eas menſis intervallum effluxerit, interea per præceſſionem Æquinoctiorum augebatur ſtellæ genu Caſſiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}$″ ut ipſe Picartus obſervat, ſimulque propter aberrationem lucis 8″ circiter augeri eam declinationem nunc conſtat, quare ſtella quæ Ambiani obſervabatur non erat in eodem cæli puncto quo fuerat cum Malvoiſinæ obſervaretur, ſed erat 10 fe-

ſe

gradûs unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. (‡) *Caſſinus* ſenior menſuravit diſtantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Rouſſillon* ad obſervatorium Pariſienſe; & filius ejus addidit diſtan-

re ſecundis ad ſeptentrionem provectior, dum ergo obſervabatur eam ſtellam diſtare à Zenith Ambiani 8°. 36′. $18\frac{3}{5}$ (adhibita refractionis correctione) Punctum fixum quod fuerat Malvoiſinæ obſervatum 8°. 36′ $8\frac{3}{5}$ à Zenith duntaxat diſtabat, & cum id Punct.m Malvoiſinæ 9° 59′ 15″ à Zenith diſtaſſet arcus inter duo Zenith interceptus erat 1°. 23′ $6\frac{2}{5}$ (non 1°. 23′ $56\frac{2}{5}$) qui reſpondet 78850. hex. unde gradus unius menſura fiet duntaxat $56926\frac{5}{6}$ hexapedarum; ſive ut conferatur hæc obſervatione cum obſervat. Il. de Maupert. fiatque ſi $58315\frac{1}{6}$ hex. reſpondeant 1° 1′ 12″ Quot gradibus reſpondebunt 78850. Invenietur 1°. 22′ $45\frac{1}{5}$″. loco 1°. 23′ $6\frac{2}{5}$″. ita ut error in obſervatione Cæleſti Picarti. ſit 20″.

Singulare quid occurrit in ipſa Picarti narratione; Poſtquam enim differentias inter Zenith Malvoiſinæ & Sourdonis, Malvoiſinæ & Ambiani dedit, addit; «Differentia temporis quod efluxit inter obſervationes requireret ut ex priori differentia 1″ *demeretur* ex poſteriori $1''\frac{1}{2}$ (propter æquinoctiorum præceſſionem) ſed «hanc correctionem ne[illegible]nutias ſectari, «videamur omiſimus » ſi mutatio declinationis per præceſſionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda ſiquidem ſit in eamdem partem, itaque cum arcus inter Malvoiſinam & Ambianum adhibitâ correctione refractionis, ſit 1°. 22. $56\frac{2}{5}$ dempta præceſſionis & aberrationis variatione 10″ circiter, maneret is arcus 1°. 22. $46\frac{2}{5}$ ad unam ſecundam qualis ſecundum D^ni. De Maupertuis obſervationem inveniri debuiſſet.

Verum ut correctio præceſſionis & aberrationis *demenda* foret, ut vult Picartus, oporteret ut obſervationes primum Ambiano poſtea Malvoiſinæ fuiſſent factæ, 78.
ſed ita notantur illæ obſervationes, *Septembri Malvoiſinæ* & *Octobri Ambiano*, ſi itaque recte ratiocinatus ſit ſed male tempora notaverit elegantiſſimè conſentient ejus obſervationes cum accuratiſſimis poſtea factis; ſin bene tempora notaverit, ſed male fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 20″ inter duas ejus obſervationes eſſe diſtribuendum, ſtantibus obſervationibus Ill. De Maupertuis: 6″ aut 7″ ſecundis propiùs accederent ad has obſervationes illæ quas inſtituit Picartus à Malvoiſinâ ad Sourdonem, ita ut error 12″ duntaxat, inter duas obſervationes diſtribuendus ſupereſſet.

(‡) * *Caſſinus ſenior menſuravit diſtantiam in meridiano à villâ Collioure ad obſervatorium Pariſienſe & filius addidit diſtantiam ab obſervatorio ad turrim Urbis Dunkirk.*

* Has duas menſuras in unam ſummam conjicit Newtonus, quia cum Caſſinus ſenior gradum majorem quam Picartus invenerit; Caſſinus filius minorem, conjunctis menſuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis menſuræ gradus à Picarto aſſignatæ, quem ut gradum telluris ut ſphæricæ conſideratæ aſſumit Newtonus; verum hic duo ſunt notanda, 1°. utitur Newtonus iſto gradu mediocri quaſi foret Æquatoris gradus, qui quidem iſto major eſt, ſed inde parum mutatur ſequens calculus ut liquebit ſi eumdem inſtituamus aſſumpto gradu æquatoris iſto majore, v. gr. 57226 hex. ut deduceretur ex Theoriâ ipſius Newtoni, & gradum in 45. gradu faciendo 57100. hex.

2°. Diſtinguendæ ſunt obſervationes Caſſini ſenioris & filii, hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, menſura vero Ill. Caſſini Patris à villâ Collioure ad obſervatorium arcum Cæleſtem 6°. 18′ 57″. continet & reſpondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis menſuris) unde gradus ſit 57c

hε

diſtantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Diſtantia tota erat hexapedarum 486156$\frac{1}{2}$ & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 12$\frac{5}{6}$″. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061.

78. hex. verificatæ ſunt menſuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error eſt metuendus cum aptè conſenſerint Triangulorum calculi cum ultimis lineis ſeu Baſibus actu menſuratis; Error verò qui in obſervatione Cæleſti occurrere poteſt ſinguli gradûs menſuram parùm immutat quia in ſex gradûs & ultra diſtribuitur, cum verò iiſdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure obſervationes inſtitutæ fuerint aberratio lucis calculum arcûs Cæleſtis non immutavit; Hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45.˙ 57100. Hexapedarum aſſumi poteſt ſatis tutò.

3°. Quoad obſervationes Ill. Caſſini filii, cum inter 15. Julii & 4. Sept. factæ fuerint obſervationes Cæleſtes quibus determinaretur arcus inter Zenith urbis Dunkirk & Obſervatorii interceptus, aberrationis correctio illis eſt adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verum illam correctionem neceſſariam eſſe tantò minus dubium eſt, quod cum is arcus per obſervationes ſtellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipſius ſtellæ aberratio ab Ill. Bradleio fuerit obſervata (vid. Tranſ. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) & nuperrimè à D. Le Monnier; immediatis ergo experimentis conſtat ejus ſtellæ dcelinationem augeri à menſe Julio ad Septembrem, ita ut cum Lutetiæ ſerius obſervata ſit, 11$\frac{1}{2}$ ſecundis Polo tunc vicinior eſſe potuit quam cum in urbe Dunkirk obſervata fuerat, ideoque totidem ſecundis Zenith remotior apparebat, quam punctum fixum quod in urbe Dunkirk fuerat obſervatum; unde cum ex diſtantiâ à Zenith Lutetiæ detrahatur diſtantia ejuſdem ſtellæ à Zenith urbis Dunkirk, arcus reſiduus illis 11$\frac{1}{2}$ ſec. eſt mulctandus, & cum reſiduum invenerit Ill. Caſſinus 2°. 12′. 9$\frac{1}{2}$″ eſt reducendus ad 2°. 11′. 58″, & cum is arcus 125454 Hexapedis reſpondere ab Ill. Autore ſtatuatur, arcus unius gradus fiet Hex. 57038. 5ped.

Verum minor diſſenſus inter obſervationes Ill. Caſſini filii & D^{ni}. de Maupertuis apparebit ſi attendatur, partem illius diſſenſus oriri ex eo quod, dum menſuris Picarti uterentur diverſas ejus Triangulorum ſeries adoptaverint, quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ ſunt eorum ſupputationes quaſi eâdem ſerie Triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. ſupponatur utrumque aſſumpſiſſe eam ſeriem Triangulorum quam ipſe Picartus admiſit, ſed ad Sourdonem uſque, & inde (quia Ill. Caſſinus propriis ſuis Triangulis diſtantiam à Sourdone ad Ambianum determinavit) aſſumatur ea diſtantia qualis ex Triangulis Ill. Caſſini deduceretur ſi modo priori ſerie uſus fuiſſet, & reliqua ejus Triangula uſque ad urbem Dunkirk in eadem proportione augeantur; hinc iſte emerget calculus.

Primo tota diſtantia inter Parallelos Obſervatorii & Sourdonis erit ex Picarto - - -	49926hex. 3ped.
Secundo; Diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani eſt ex Caſſino 10539$\frac{1}{2}$ hex. aſſumpta Baſi 7116$\frac{1}{2}$; ſed in alterâ ſerie Triangulorum eadem Baſis erat 7122 $\frac{1}{3}$ hinc aſſumptâ hac menſura, diſtantia Parall. inter Sourdonem & Ambianum ex Triangulis Ill. Caſſini erit -	10547hex. 4ped.
Tota ergo diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani erit = =	60474 - 1

Ter-

57061. Et ex his menſuris colligitur ambitus terræ pedum Pariſienſium 123249600, & ſemidiameter ejus pedum 19615800, ex hypotheſi quod terra ſit ſphærica. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROB. III.

In latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit pedes Pariſienſes 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut ſupra, id eſt, (††) lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis

Tertio diſtantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk eſt ex Caſſino 65109$^{hex.}$ 1$^{ped.}$, ſuppoſitâ Baſi $7116\frac{1}{2}$, ſi ergo ſupponatur ea linea $7112\frac{1}{3}$ fiet diſtantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk ex Triangulis Ill. Caſſini. - - - 65162$^{hex.}$ 3$^{ped.}$

Tota ergo diſtantia inter obſervatorium & Parallel. urbis Dunkirk fiet 125636 - 4 & detractis 98. hex. pro locis obſervationum Cæleſtium & $2\frac{1}{2}$ hex. pro libellâ ſuperſunt 125536$^{hex.}$ $\frac{1}{8}$, quæ reſpondent 2°. 11'. 58", unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in Obſervatione D^{ni}. de Maupertuis cum ſint inter Parallelum Obſervatorii & ædis Ambiani 60474 : 1. & propter obſervationum Cæleſtium loca 2159$^{hex.}$ ſint detrahendæ, arcus inter obſervationes D^{ni}. de Maupertuis obſervatus, qui eſt 1°. 1'. 12". reſpondebit hex. 58315:1. Unde gradus erit $57171\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus diſſenſus inter obſervationem Ill. Caſſini & D^{ni}. de Maupertuis habeatur, fiat ſicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{8}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus 2°. 11'. 45", qui 13" duntaxat differt ab arcu 2°. 11' 58" quem Ill. Caſſinus obſervavit; Quæ differentia inter quatuor obſervationes Cæleſtes & menſuras terreſtres diſtributa, efficeret concluſiones uniformes: Ergo illæ obſervationes nedum inter ſe pugnent, iis differentiolis tantùm diſcrepant, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea ſatis liquet quod ſi in unam ſummam conjicerentur menſuræ Ill. Caſſini Patris & Filii, diminuendus eſſet arcus totalis 12" propter correctionem aberrationis Lucis, cui obnoxia eſt obſervatio Ill. Caſſini filii, & menſuræ terreſtres forent augendæ, quia ex obſervatione D^{ni}. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas ſeries Triangulorum D^{ni}. Picarti ea præponenda cenſeatur quam Picartus prætulerat & quam Ill. Caſſinus neglexerat, imo & probabile ſit errores minimos inevitabiles, eam in partem conſpiraſſe ut arcus Cæleſtis major vero videretur Ill. Caſſino & menſuræ terreſtres vero minores; Quibus omnibus perpenſis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium menſuræ à Caſſino Patre inſtitutæ rotundis numeris ſatis tuto 27100. hex. aſſumi poſſe liquet. 78.

(††) *Id eſt, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratiſſimis obſervationibus D^{ni}. de Mayrans (cap. 6. lib. 3. fig. terræ deter. à D. de Maupertuis) longitudo penduli ad ſingulas ſecundas vibrans eſt linearum 440.57. hinc, cum juxta Prop. 26. Horol. Oſcill. Hugh. ſit circuli circumferentia ad Diametrum ut 1". ad tempus deſcenſus per dimidiam altitudinem penduli, ſive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, ſint verò quadrata temporum ut ſpatia deſcenſu verticali iis temporibus deſcripta erit 9.8696 ad 1. (Quadratum circumferentiæ ad quadratum Diametri 1.) ſicut ſpatium uno ſecundo deſcriptum ad 220.$28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius ſecundi deſcribit lineas 2173.631356. paulò minus quam Newtonus aſſignat, ejus undecima milleſima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo deſcriberet altitudinem 2173.828958,

DE MUNDI SYSTEMATE.

poris diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amiſſum eſſe partem undecimam milleſimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo deſcribet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius ſecundi.

Corpus in circulo ad diſtantiam pedum 19615800 à centro, ſingulis diebus ſidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens tempore minutì unius ſecundi (m) deſcribet arcum pedum 1433,46, cujus ſinus verſus eſt pedum 0,0523656, ſeu linearum 7,54064. (n) Ideoque vis, quâ gravia deſcendunt in latitudine *Lutetiæ*, eſt ad vim centrifugam corporum in æquatore à terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ eſt ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in (o) duplicatâ ratione radii ad ſinum

78. (l) * *Ponamus pondus amiſſum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis ſui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, & plumbum eſt ad aquæ gravitatem ſpecificam ut 11,345 ad 1000, aqua verò ad aërem paulo minus quam 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi eſt ad gravitatem aëris fere ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis ſui partem undecimam milleſimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ milleſimâ ponderis totius, hoc eſt ſpatia eodem tempore deſcripta undecimâ milleſimâ totius ſpatii deſcripti parte augeri debent, fiat ergó 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173.966 ergo poni poteſt quam proximè ſpatium tempore minuti unius ſecundi deſcriptum in vacuo à plumbo, ideoque à quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(m) * *Deſcribet arcum &c.* Computum initur eodem planè modo ac not. 63.

(n) * *Ideóque vis.* Vires uniformes ſunt ut ſpatia dato tempore deſcripta, ſed eſt ſpatium vi gravitatis tempore unius minuti ſecundi deſcriptum 2174 lin. ſpatium autem vi centrifugâ deſcriptum ut ſinus verſus, hoc eſt, lin. 7, 54064.

* Si gradus Æquatoris ſit major 57061 hex., v. gr. ſi 57226 hex. ſumatur, erit iſte ſinus verſus linearum 7. 56244, ideoque vis quâ gravia deſcendunt in latitudine Lutetiæ eſt ad vim centrifugam corporum in Æquatore ut 2173. 828958 ad 7. 56244.

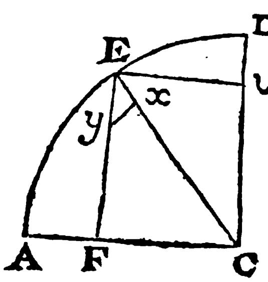
(o) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipſique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D ſecundum directionem D C ſive E F, ad vim centrifugam in E ſecundum directionem C E, in ratione duplicatâ radii C D ad ordinatam E F quæ eſt ſinus complementi arcûs ſeu altitudinem E D. Exprimat enim Dv vim centrifugam in D ſecundum directionem D C, & recta Ey, exprimat vim centrifugam in E ſecundum directionem E F, ductâ perpendiculari yx ad rectam E C, exprimet Ex, vim centrifugam in E, ſecundum directionem Ex; ſed eſt $Dv : Ey = DC : EF$ (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) & ob triangula rectangula Exy E F C ſimilia, $Ey : Ex = EC$ vel

ſinum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267, ſeu pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 ſeu 289 ad 1.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Unde

vel DC:EF. Quarè, componendo $Dv:Ex = DC^2:EF^2$. Q. E. D.



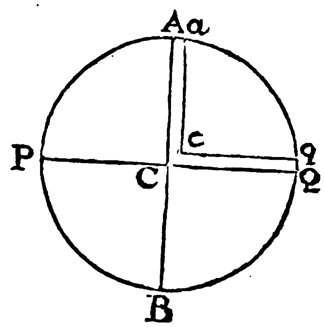
* Verum ſi Meridianus terræ ſit alia curva quam circulus v. gr. ſit Ellipſis, vis centrifuga corporum in æquatore terræ eſt ad vim centrifugam qua corpora perpendiculariter à terra recedunt in latitudine datâ, in ratione compoſitâ ex ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, & ex ratione radii Æquatoris, ad ordinatam ejus Ellipſeos in eâ latitudine datâ; hinc pro Ellipſi ratio vis centrifugæ in Æquatore ad vim centrifugam in latitudine data exprimetur hoc modo, ſit m axis major, n axis minor, r Radius, c ſinus complementi latitudinis quæſitæ, erit vis in Æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $mr\sqrt{m^2 \times \overline{r^2 - c^2} + n^2 c^2}$ ad $n^2 c^2$.

Ut facile deducetur ex Ellipſeos naturâ; 78. Quare ſi fingatur $m = 230$ & $n = 229$ juxta Newtonum invenietur calculo eas vires eſſe inter ſe ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine Lutetiæ, & vis tota gravitatis (in hyp. aſſumptis) efficeret ut gravia cadendo deſcriberent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine lutetiæ erit ad vim Centrifugam corporum Æquatore terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 ſive ut 287. 86 ad 1.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non eſt vis ipſa gravitatis in Æquatore, de quâ agitur in reliquâ hic propoſitione, ſed parum ab ea differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ ſit ad vim gravitatis in Æquatore (terrâ uniformiter denſa ſuppoſitâ), ut 1532 ad 1531 ideóque ſit vis gravitatis in Æquatore ad vim ejus Centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus ſit uſus Newtonus & ſæpe ex Hypotheſi terræ ſphæricæ ductis, parùm mutationis tamen adfuturum ſit, etſi aſſumantur alii numeri qui ex veriori terræ figurâ deducerentur.

De Mundi Syſtemate.

Unde ſi *APBQ* figuram terræ deſignet (p) jam non amplius ſphæricam ſed revolutione ellipſeos circum axem minorem *PQ* genitam, ſitque *ACQqca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: (q) debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 289 ſuſtinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure ſuſtinebit reliquas. Porro (ex propoſitionis XCI. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod ſi terra conſtaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) & eſſet ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in ſphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* deſcriptam, ut



78. (p) * *Jam non amplius ſphæricam ſed revolutione Ellipſeos circum axem minorem PQ genitam.* * Terram non multum à figurâ ſphæricâ diſcedere ex Eclipſibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus Ellipſeos accedere cujus axes forent æquales Diametro Æquatoris, & diſtantiæ Polorum terræ reſpectivè, ſatis liquet; utrum verò curva illa quæ ſingulum Meridianum terræ conſtituit & quæ convolutione arcus PAQ circa axem minorem PQ generatur ſit Ellipſis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens non determinat Newtonus; Paulò fuſius de hujus curvæ Naturâ inferius diſſeremus, hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, ſufficit aſſumere eam curvam ad Ellipſim ſatis accedere, ut Ellipſis pro eâ aſſumi poſſit.

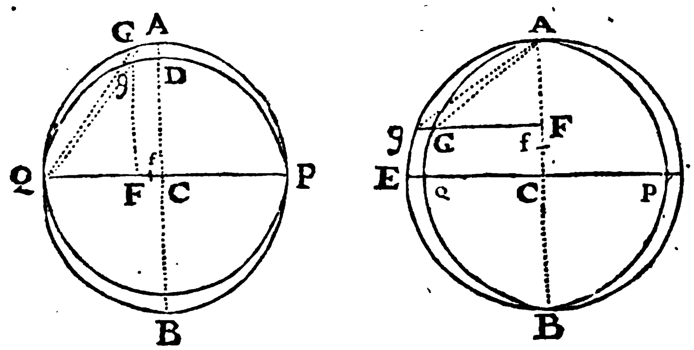
(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quieſcere ſupponatur, fluidi partes in canalis crure AC debent eſſe in æquilibrio cum partibus fluidi in ejuſdem canalis crure QC. Cum itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat è ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure ſit 288 (ſive ex inventis ut 288.67 ad 287.67), ſic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

(r) * *Et eſſet ejus axis PQ ad Diametrum AB ut* 100 *ad* 101, *gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in Sphæram centro C radio QC deſcriptam, ut* 126 *ad* 125 *& eodem argumento gravitas in loco A in ſphæroidem circa axem AB deſcriptam eſt ad gravitatem in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, ut* 125 *ad* 126.

* Utrumque ſimul probari poteſt: Sit PAQB, in utrâque figurâ, terræ Meridianus; in primâ figurâ ſit QDPQ ſphæra Centro C radio QC deſcripta & in ſecundâ figura PAQB repræſentat ſphæroidem quam revolutione meridiani terræ circa Æquatorem deſcribi fingit Newtonus & AED ſphæram radio AC deſcriptam. Conſtat Corollario 2. Prop. XC. lib. 1. quod ſi ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii ſunt FG, fg (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q & A ab illis circulis erit $1-\frac{QF}{QG}$, $1-\frac{QF}{Qg}$, $1-\frac{AF}{AG}$, $1-\frac{AF}{Ag}$ reſpectivè:

Qua-

126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in ſphæroidem, convolutione ellipſeos *APBQ* circa axem *AB* deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco *A* in ſphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ut 125 ad 126. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.



Quare ſi dicatur CQ ſive CD, b, & AC ſive CE, r, dicaturque abſciſſa QF, AF, [82]
in utrâque figurâ, x, erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times \overline{2bx - xx}$; $\overline{Fg}^2 = 2bx - xx$, & in ſecundâ figurâ eſt $\overline{FG}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times 2rx - xx$ & $\overline{Fg}^2 = 2rx - xx$, quibus quadratis ſi addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ ſive xx, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2$, $\overline{Qg}^2$, $\overline{AG}^2$, $\overline{Ag}^2$, reſpectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2bx - \frac{r^2 - b^2}{b^2} x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2rx + \frac{r^2 - b^2}{r^2} x^2$; & $2rx$; Unde (ſi compendii gratia loco $r^2 - b^2$ ſcribatur m) attractiones iſtorum circulorum evadent

$$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}};\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}};\ 1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}},\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}}:$$

Sit verò $Ff = dx$ & multiplicetur attractio ſinguli circuli per dx habebuntur elementa attractionis ſphæroideων & ſphærarum, quæ elementa erunt

$$dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}};\ dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}};\ dx - \frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}};\ dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}.$$

Facile revocabuntur ad fluentes ſuas ea elementa attractionis ſphærarum quippe fluentes quantitatum $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}}$ & $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}$ ſunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}\sqrt{2r}}$ & ubi QF vel AF diametros QP vel AB æquant, ideòque x ſit æqualis $2b$, vel $2r$, evadunt illæ fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ ſive $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}r$.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - m^2}}$, quantitas $\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ reſolvatur in ſeriem (eam conſiderando ut $bxdx \times \overline{2r^2bx - mx^2}^{-\frac{1}{2}}$) ſumatur juxta formu-

DE MUNDI SYSTEMATE.

formulam Newtonianam quotiens ſecundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ diviſi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b\times r^2}$; Primi termini $2r^2bx$ ſumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ eſt $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}$: tum adhibitis coefficientibus ſecundum formulam, tota quantitas evadet

7 8.

$$dx-\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{1\times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1\times3\times5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times6r^7\times\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

& Integrando habebitur $x-\frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3\times2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times7r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5.2bm^3x^{\frac{3}{2}}}{2.4.6.9r^7.\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando vero $x=2b$, ſeries fit $2b-\frac{2b^2}{3r}-\frac{2b^2m}{10r^3}-\frac{1\times3\times2b^2m^2}{2\times4\times7r^5}-\frac{1\times3\times5\times2b^2m^3}{2\times4\times6\times9r^7}$.

Sive dividendo per $2b$ & ad terminos præcedentes revocando; attractio terræ, in corpuſculum Q in extremitate minoris axis poſiti circa quem revolvi cenſetur, exprimitur per hanc ſeriem

$$2b\times1-\frac{2b}{3r}-\frac{1\times3m}{2.5r^2}B-\frac{3\times5m}{4\times7r^2}C-\frac{5\times7m}{6\times9r^2}D-\frac{7\times9m}{8\times11r^2}E\ \&c.$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx-\frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}}$ nempe ſecundam partem conſiderando ut $rxdx\times\overline{2b^2rx+mx^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ in ſerie reſolvatur, quotiens ſecundi termini per primum diviſi erit $+\frac{mx}{2rb^2}$; Primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{bx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}$ & calculando ſecundum formulam tota quantitas

$$\text{evadet } dx-\frac{rx^{\frac{1}{2}}dx}{b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times rmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3rm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times3\times5rm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times6b^7\times2r^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

Integrando habetur $x-\frac{2rx^{\frac{3}{2}}}{3b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times2rmx^{\frac{5}{2}}}{2\times5b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times3\times2rm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times7b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times3\times5\times2rm^3x^{\frac{9}{2}}}{2\times4\times6\times9b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando $x=2r$ ſeries fit, $2r-\frac{\overline{2r}^2}{3b}+\frac{\overline{2r}^2\times m}{2\times5b^3}-\frac{1\times3\times\overline{2r}^2\times m^2}{2\times4\times7b^5}+\frac{1\times3\times5\times\overline{2r}^2m^3}{2\times4\times6\times9b^7}$ &c.

$$\text{Sive } 2r\times1-\frac{2r}{3b}+\frac{3m}{2\times5b^2}B-\frac{3\times5m}{4\times7b^2}C+\frac{5\times7m}{6\times9b^2}D-\frac{7\times9m}{8\times11b^2}E\ \&c.$$

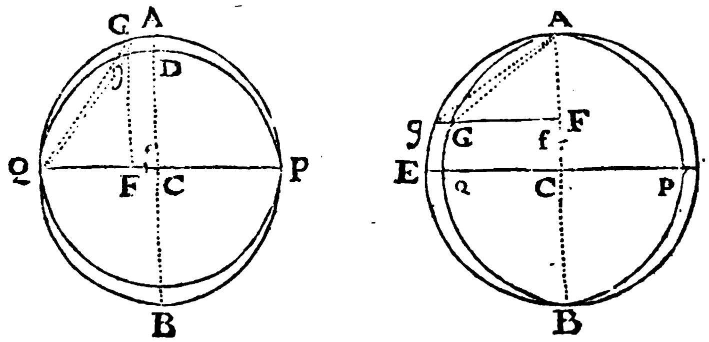
Cum ergo ſit $r=101$, & $b=100$ eſt $r^2-b^2=\overline{r+b}\times\overline{r-b}=201=m$, eſt $r^2=10201$. Hinc ſubſtitutionibus factis prima ſeries evadit

$2b\times1-.66006600$
$-.00390177$
$-.00004118$
$-.00000052$
$-.00000001.$

hoc eſt, $2b\times1-.66400948$, ſive $2b\times.33599052$; Sed ſphæræ attractio erat $\frac{2b}{3}$; Ergo gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in ſphæram centro C radio QC deſcriptam ut 1.00797156 ad 1 (multiplicando utrumque terminum per 3 & dividendo per $2b$) ſive ut 1008 ferè ad 1000, qui numeri ſunt accuratè ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8 dividendo. Q. E. 1°. D.

Pars

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

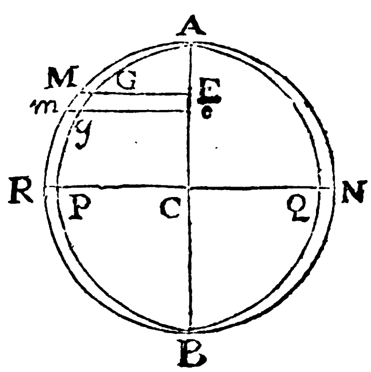


2°

Pariter ſubſtitutionibus factis in ſerie ſecundâ, evadit

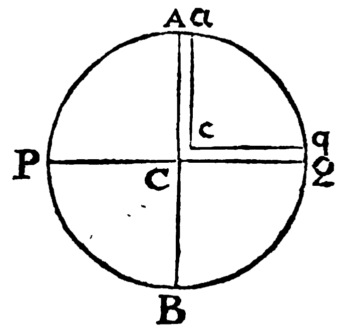
$$2r \times 1 - .67333333 + .00406020$$
$$- .00004372 + .00000057$$
$$- .00000001.$$

Sive $2r \times 1 - .67337706 + .00406077$ hoc eſt $2r \times 33068371$, ſed ſphæræ attractio erat $\frac{2r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 & dividendo per $2r$, gravitas in loco A in Ellipſoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in ſphæram radio AC deſcriptam ut 99205113 ad 1; Multiplicetur uterque terminus per 1008, & evadent 999.987589 & 1008; proximè 1000 & 1008 qui numeri ſunt ut 125 ad 126. Q. E. 2°. D.



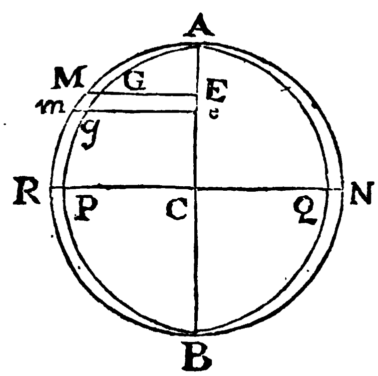
79. Lemma. Sphærois compreſſa convolutione Ellipſeos APBQ circà axem minorem PC genita, eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem AC genitam. Nam ductis ordinatis ME, me, infinitè propinquis, tum ſphæra circumſcripta tum ſphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum ME & me, GE & ge convolutione deſcriptos, erit cylindrulus EGge in ſphæroide ad cylindrulum EMme in ſphærâ, ut altitudo Ee ducta in circulum radio GE rotando deſcriptum, ad altitudinem Ee, ductam in circulum cujus eſt radius ME, ſivè quia circuli ſunt ut quadrata radiorum & utriuſque cylindruli communis eſt altitudo, erit cylindrulus EGge, ad cylindrulum EMme, ut GE^2 ad ME^2. Sed GE^2 ad ME^2 ſemper eſt ut PC^2 ad RC^2 vel AC^2, ideóque in datâ ratione, erit itaque ſumma tota cylindrulorum in ſphæroide ad ſummam totam cylin-

DE MUNDI SYSTEMATE.



(f) Eſt autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem & ſphæram: propterea quod ſphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in *A*, in

79



lindrulorum in ſphærâ, hoc eſt, ſphærois ipſa ad ſphæram ut PC^2 ad AC^2. Jam verò ſphæra radio RC deſcripta & ſphærois compreſſa ellipſeos AGP circà axem PC convolutione genita, ſimili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum ME & me, GE & ge, circà axem PC convolutione genitos, ob radiorum CE & rectarum Ee æqualitatem, erunt tubuli illi ut ME, GE, ſivè ut AC ad PC, hoc eſt, in datâ ratione, ideóque ſphæra eſt ad ſphæroidem compreſſam ut AC ad PC. Quare ſi ſphæra dicatur *S* ſphærois compreſſa *s*, & ſphærois oblongata *σ*, ſitque AC $= b$, PC $= a$ erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S : \sigma = S^2\, s^2$ undè $s = \sqrt{S \times \sigma}$. Q. E. D.

(f) 80. *Eſt autem gravitas.* Diameter PQ, in figurâ Newtoni reſpondeat diametro RN: minuatur diameter illa RN in ratione 101 ad 100 ut fiat PQ = 100, tunc ſphæra quæ centro C radio AC deſcripta erat vertetur in figuram terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione ſpheræ duabus diametris AB, PQ, ſit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram terræ verti in ſphæroidem oblongatam. Quia verò utraque ſphærois ſive compreſſa ſivè oblongata ad ſphæram quam proximè accedit, ſphæroides illæ pro ſphæris quæ eandem reſpectivè contineant materiæ quantitatem quam proximè haberi poſſunt. Sunt autem attractiones ſphærarum in diſtantiis æqualibus ut quantitates materiæ (cor. 1. prop. 74. lib. 1.) ideóque gravitas in utroque caſu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proindè attractiones ſphæræ ſphæroidis compreſſæ & ſphæroidis oblongatæ ſunt reſpectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed ſphærois compreſſa convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem PCQ genita eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem ACQ geni-

in caſu utroque, diminuitur in eâdem ratione quam proximè. (t) Eſt igitur gravitas in A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, ad gravitatem in A in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in ſphæram centro C radio QC deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco A in ſphæram centro C radio AC deſcriptam, in ratione diametrorum (per prop. LXXII. lib. I.) id eſt, ut 100 ad 101. (u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in terram ad gravitatem in loco A in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Jam cum (per corol. 3. prop. XCI. lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ ſit ut diſtantia locorum à centro terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, (x) ut magnitudines & gravitates accelera-

genitam (82). Quarè gravitas in loco A, in terram eſt media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem, oblongatam ſcilicet, & ſphæram.

(t) * *Eſt igitur gravitas.* Gravitas in loco A in terram dicatur G, gravitas in loco Q, in terram ſit g, gravitas in loco Q, in ſphæram radio PC, deſcriptam dicatur γ, gravitas in loco A, in ſphæroidem convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem AB genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in ſphæram radio AC deſcriptam ſit Γ, erit (ex dem.).

$g : \gamma = 126 : 125$

$V : \Gamma = 125 : 126$ prætereà

$V : G = G : \Gamma$, ideóque inter V & Γ, hoc eſt, inter 125 & 126 ſumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(u) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, ſcilicet

$g : \gamma = 126 : 125$

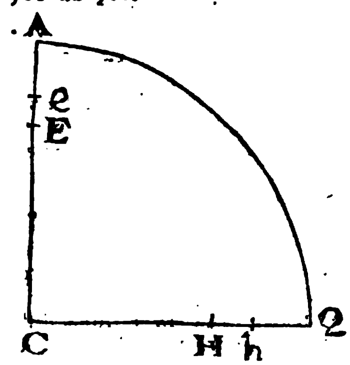
$\Gamma : G = 126 : 125\frac{1}{2}$

$\gamma : \Gamma = 100 : 101$ erit per compoſitionem rationum & ex æquo.

$g : G = 126 \times 126 \times 100 : 125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$ 81.

vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$

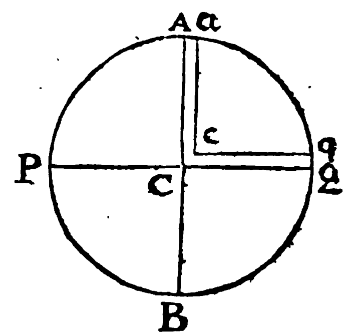
ideóque gravitas in loco Q, in terram fiet ad gravitatem in loco A, in terram ut 501 ad 500.



(x) 81. * *Ut magnitudines & gravitates.* Crura AC, QC ità diſtinguantur ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus ut crura illa æqualem contineant particularum Ee, Hh numerum, ſintque ſingulæ particulæ in crure AC ad ſingulas particulas in crure CQ ut crus AC ad crus alte-

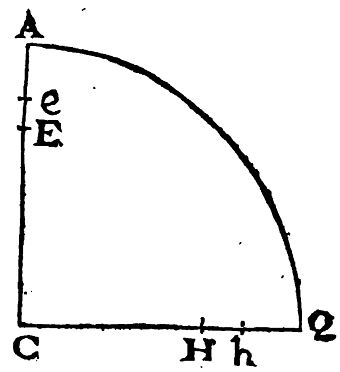
De Mundi Systemate.

celeratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{289}$.



82. alterum CQ, ſive ut 101 ad 100; Quoniam gravitas in loco A eſt 500 & gravitas in loco Q, eſt 501 propter figuram ſphæroidis & omnium particularum in cruribus AC & CQ ſimilium & ſimiliter poſitarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione, earum itaque Pondera, (ſive facta gravitatis acceleratricis per Quantitatem materiæ erunt in ratione compoſita 101 ad 100 & 500 ad 501 ſive 505 ad 501, & totorum crurum AC & CQ gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè ſi vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem QC, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ ſunt in crure AC, versùs C, vi gravitatis attractæ, ſimul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis Centrifuga in ſingulis punctis cruris AC eſt in ratione diſtantiæ eorum punctorum à Centro CE per (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) ſed eſt etiam gravitas acceleratrix in ratione diſtantiæ à Centro per (cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo ſi alicubi data ſit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam eadem erit in omnibus punctis, ſit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota ſingularum & omnium partium cruris AC erit ad gravitatem reſiduam in ſingulis & omnibus partibus ejuſdem cruris ut 505 ad 501, ſed in eadem ratione erat tota



gravitas cruris AC (abſque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris CQ quod cum ſit axis vim centrifugam nullam habet) ergo reſiduum vis gravitatis in crure AC ſublatâ vi Centrifugâ in æquilibrio eſt cum gravitate cruris CQ.

$\frac{1}{229}$. (z) Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

(z) * *Et propterea dico ſecundum regulam auream* * Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuiſſe fundamento quam illâ confusâ notione, quod cum exceſſus ponderum in longioribus cruribus ſphæroideam pendeant ex inæqualitate crurum, ſive ab exceſſu unius cruris ſupra alterum, ideo rationes exceſſuum crurum majorum ad minora crura eædem eſſe debeant ac rationes exceſſuum ponderum ad pondera minorum crurum quæ quidem ultimæ rationes (ſive ipſis proximæ rationes exceſſuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos exceſſus ponderum accurate compenſant. Sed mihi videtur ipſum deduxiſſe hanc proportionem ex ipſâ ſerie ab ipſo adhibitâ, & quam aſſequi ſumus conati in Notâ (r) proximâ; quod ut concipiatur reſumantur quæ in ea Notâ dicta ſunt & ad ratiocinium Newtonianum applicentur, ſupponendo Quæſtionem eſſe de duobus ſphæroidibus, quorum unus ſit aſſumptitius ille cujus Axes ſunt ut 101 ad 100 alterum verò ipſa terra, ita ut ſemi Diameter Æquatoris quæ in Sphæroide fictitio in Notâ prædictâ per r deſignabatur, terræ reſpectu deſignetur per ϱ, ſemiaxis verò PQ qui in ſerie aſſumptâ dictus fuerat b & applicatus fictitio ſphæroidi, ubi verò ipſum ſemi-axem terræ deſignat dicatur B. Aſſumptis ergo duobus primis terminis ſerierum ſed mutatis r in ϱ & b in B, ubi agetur de terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in ſphæroidem erit ad Gravitatem in eodem loco in ſphæram radio b deſcriptam erit ut $\frac{6br-4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$ & ſi agatur de terrâ, Gravitas in loco Q in terram erit ad Gravitatem in eodem loco in Sphæram quæ radio B deſcribetur ut $\frac{6B\varrho-4B^2}{3\varrho}$ ad $\frac{2B}{3}$; ideóque Rationes gravitatis in loco Q in Sphæroidem vel terram ad gravitatem in Sphæras radiis b & B deſcriptas erunt ut $\frac{3r-2b}{r}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho}$.

2°. Gravitas in Sphæras quarum ſunt radii b & B eſt ad gravitatem in Sphæras radiis AC deſcriptas ut radius b ad r, & B ad ϱ, ideóque rationes gravitatis in ſphæras radiis PQ deſcriptas ad gravitates in ſphæras radiis AC deſcriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in ſphæras radiis AC deſcriptas eſt ad Gravitatem in Ellipſoides convolutione Ellipſium APBQ circa AC deſcriptas ut $\frac{2r}{3}$ ad $\frac{6rb-4rr}{3b}$, ſi agatur de fictitio Sphæroide, aut ut $\frac{2\varrho}{3}$ ad $\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}$ ubi agitur de terrâ; Et quoniam attractio ſphæroidis fictitii aut terræ eſt media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in ſphæram ad Gravitatem in A in ſphæroidem, ut $\sqrt{\frac{2r}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6rb-4}{3b}}$ & gravitas in ſphæram ad Gravitatem quæ eſt in A in terram ipſam ut $\sqrt{\frac{2\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}}$, ideóque rationes gravitatum in ſphæras ad gravitates in ſphæroidem & in terram erunt ut

ræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si

82. $\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compoſitis omnibus rationibus, Rationes gravitatum in punctis Q tam ſphæroideos fictitii quam terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r-2b}{\varrho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B}{\varrho}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$.

Rurſus in fictitio ſphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ & in terrâ per $\frac{B}{\varrho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis & habebuntur rationes ponderum quæ ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2}\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$; Inde cum differentia quantitatum r & b, ϱ & B non ſit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\varrho-2B$; pro r ac ϱ ſumi poſſunt & denominatores $3b-2r$, $3B-2\varrho$ pro b & B, ideóque rationes ponderum fiunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$ ad $\frac{\varrho}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ ſive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\varrho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure CA ad pondus in crure CQ ſunt in ſphæroide fictitio & in terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\varrho^2}{B^2}$ quod ſi differentia Diametri r & axis fictitii b dicatur f; differentia Diametri ϱ & axis terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum CA & CQ. $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ & $\frac{B^2+2Bg+gg}{B^2}$ erunt ergo rationes exceſſus ponderis in crure AC ad pondus totum cruris CQ ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gg}{B^2}$ ſive deletis ff & gg quæ evaneſcunt reſpectu $2rf$ & $2\varrho g$; cùm differentiæ inter diametros & axes minimæ ſupponantur reſpectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, ſive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſed rationes exceſſus ponderum ad pondus cruris CQ ſive ad pondus cruris AC (quod perinde eſt ob magnitudinem crurum & parvitatem exceſſus) æquales eſſe debent (ut jam dictum eſt) rationibus virium Centrifugarum ad gravitatem ipſam, quare, rationes illæ virium Centrifugarum ad gravitatem debent eſſe ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſive ut rationes exceſſuum diametri Æquatoris ſupra Axes ad Axes, quæ quidem eſt proportio quam Newtonus aſſumit, cujus fundamentum ita deprehenſum eſt: hinc Vis Centrifuga quæ eſt $\frac{4}{505}$ ponderis totius eſt ad Vim Centrifugam quæ eſt $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ ſivè ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, ſed dum b eſt 100 eſt $f=1$, ergo eſt $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ ſive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

(a) Si planeta major ſit vel minor quam terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et ſi denſitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata

(a) 86. *Si planeta major ſit vel minor quam terrâ manente ejus denſitate ac tempore Periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis Centrifugæ ad gravitatem.* * Manere Rationem vis Centrifugæ ad gravitatem liquet ex nota 85. ſive ex Cor. 3. Prop. I V. Lib. I.; nam manente tempore Periodico creſcit Vis Centrifuga in ratione diſtantiarum, ſed creſcit etiam gravitas acceleratrix in ratione diſtantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. lib 1.) ergo in eadem ratione creſcunt vis Centrifuga & gravitas ideóque in eádem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter Polos ad diametrum ſecundum Æquatorem, quippe; per notam præcedentem z, Ratio vis Centrifugæ ad gravitatem eſt ut ratio exceſſus Diametri Æquatoris ſuper longitudinem Axeos; manente ergo priori ratione per hypotheſim manebit & iſta.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus ut tempus Periodicum ſit majus vel minus, vis centrifuga creſcit reciprocè ut quadrata temporum Periodicorum manentibus radiis (Cor. 2. Prop. I V. lib. 1.) inde manentibus gravitatibus & Diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores, fractionum $\frac{f}{b}$ & $\frac{g}{B}$, 8-34

nempe exceſſus Diametrorum, creſcere ſecundum rationem virium centrifugarum, hoc eſt, ut quadrata temporum Periodicorum inverſè, aut ut quadrata Celeritatum directè, hinc ait Newtonus *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per *f* & *g*) *augebitur vel minuetur in ea ratione duplicatâ celeritatum quamproximè.*

Et ſi denſitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eádem ratione hinc ratio vis Centrifugæ manente radio & celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideóque minueter ratio differentiæ Diametrorum ad ipſas Diametros.

Et in genere dicatur Radius terræ R, ejus denſitas D, tempus Periodicum T, in altero Planeta litteris iiſdem ſed minoribus eadem exprimantur erit $\frac{\frac{R}{TT}}{DR}$ ad $\frac{\frac{r}{tt}}{dr}$ ſicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter Diametros Æquatoris & Axis Planetæ quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

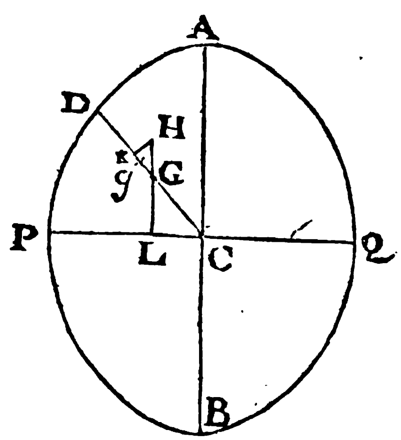
drata ut 29 ad 5, & ([b]) revolventium denſitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Eſt igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cum ejus diameter major ſit $37''$, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit $33''. 25'''$. ([c]) Pro luce erraticâ addantur $3''$ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent $40''$ & $36''. 25'''$: quæ ſunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita ſe habet ex hypotheſi quod corpus jovis ſit uniformiter denſum. ([d]) At ſi corpus ejus ſit denſius verſus planum æquatoris quam verſus polos, diametri ejus poſ-ſunt

83 (b) * *Et revolventium denſitates.* (prop. 8. lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

(d) * *At ſi corpus ejus.* Ille enim exceſſus denſitatis in plano æquatoris facit ut ibi major ſit gravitas ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compenſandam vim Centrifugam unde minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).

84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypotheſi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati diſtantiarum à centro, ſimulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio inveniri poteſt: Sit ſemidiameter ſecundum æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ ſinus anguli $DCP = h$, poſito ſinu toto $= 1$. Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in eodem loco $= f$, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n diſtantiarum à centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n, ideóque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A & G, ſunt in ratione diſtantiarum CA, LG, erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; ſed $LG : CG = h : 1$ ideóque $LG = CG \times h$, undè vis centrifuga in G, fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; ſit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis cen-



trifuga quæ agit ſecundum directionem GH, non minuit gravitatem versùs centrum C, niſi in quantùm agit ſecundum directionem DC, reſolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KH, GH; eſt

ſunt eſſe ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Caſſinus* quidem anno 1691 obſervavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram ſuperaret parte ſui circiter decimâ quintâ: *Poundus* autem noſter teleſcopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, menſuravit ut ſequitur. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Tem-

eſt autem GH : GK vel $1:h = \frac{fh \times CG}{CA}$: GK, quarè $GK = \frac{fhh \times r}{a}$, ideóque pondus cylindruli $Gg = \frac{pr^n dr}{a^n} - \frac{fhhrdr}{a}$. Sumptiſque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh \times rr}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris CA $= \frac{px^n}{a^n}$, ſi nempè diſtantia à centro dicatur x; vis autem centrifuga $= \frac{fx}{a}$, & pondus Cylindruli manebit $\frac{px^n dx}{a^n} - \frac{fxdx}{a}$ cujus fluens $\frac{px^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fx^2}{2a}$ undè pondus totum fluidi in crure CA, eſt $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa^2}{2a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure CA, CD conſiſtere debet in æquilibrio, oportet ut pondera ſint æqualia ac proindè, $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa}{2} = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhhrr}{2a}$, undè eruitur $2pr^{n+1} - (n+1)fhha^{n-1}rr = (2p - nf - f)a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facile invenitur diametrorum proportio, ſi enim fiat $h = 0$, radius r abit in CP, habeturque $2pr^{n+1} = (2p - nf - f)a^{n+1}$, hoc eſt, $CA : CP = (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypotheſi gravitatis uniformis, fit $n = 0$, ideóque $CA : CP = 2p : 2p - f$. Quoniam verò in terrâ gravitas eſt ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit $CA : CP = 578 : 577$, prout Hugenius invenit. At in hypotheſi gravitatis in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro decreſcentis, erit $n = -2$, ideóque $CA : CP = 2p + f : 2p = 579 : 578$.

* 85. Verum duæ Hypotheſes in hâc formulâ invenienda aſſumptæ cum rei natura & Newtoniano ſyſtemate neutiquam quadrant, ideóque locum habere nequeunt: Primùm enim Gravitatem ad Centrum terræ dirigi verum non eſt ſi terra ſit ſphærois qualiſcumque, quippe ex ipſo facto conſtat gravitatis directionem eſſe perpendicularem ſuperficiei aquarum, ſive eſſe perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; ſed perpendiculares ad curvam à circulo diverſam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt niſi in ſolâ axium extremitate. 85.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis ſuperficiei ſolidi ratione curvæ alicujus geniti non ſequitur rationem ullius dignitatis diſtantiarum à centro, ſed aliam omnino Legem juxta formam ſolidi, hoc eſt, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat & locum in quo corpuſculum attrahendum locatur, ut ſatis liquet ex eo artificio quo Newtonus uſus eſt ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam diſtantiarum, ſed per rationes ſerierum quales eas in Nota (r) invenimus ſunt exhibendæ; quamvis ergo verum ſit in ſyſtemate Newtoniano gravitatem decreſcere ut quadrata diſtantiarum à quocumque corpore collecto in centro ſuæ gravitatis quaſi in uno puncto, idem verum non erit ſi id corpus figurâ ſphærica non donetur, & corpuſculum attrahendum juxta diverſas partes ejus ſolidi collocetur, hinc ubi in formandâ generali formulâ aſſumitur quod gravitas in A ſit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideóque gravitatem in D eſſe

pr^n

Tempora.	*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diametri ad invicem.*
dies hor.	*part.*	*part.*	
Jan 28 6	13,40	12,28	*ut* 12 *ad* 11
Mar. 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ $12\frac{3}{4}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ $11\frac{2}{3}$
Apr. 9 9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ $13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incaleſcunt ad lucem ſolis verſus æquatores ſuos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam verſus polos.

Quin-

8 6. $\frac{pr^n}{a^n}$, id omninò adverſus Theoriam gravitatis Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum à vero aberret, oritur ex eo quod reverá figura terræ à ſphærâ per parùm diſcrepet.

86. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum deſcribentis eſt in ratione directâ radii & duplicatâ inverſâ temporis periodici (cor. 2. prop. 4. lib. 1.). Quare ſi diſtantia planetæ à centro Solis vel diſtantia ſatellitis à centro planetæ primarii dicatur D tempus periodicum T radius ipſius Planetæ circà quem motu diurno revolvitur R, gravitas versùs centrum revolutionis erit $\frac{D}{TT}$; Si autem hæc gravitas creſcat in ratione duplicatâ inversâ diſtantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc verſari ſupponitur loco, ad illius gravitatem, ſi poſitus fingeretur in ſuperficie corporis centralis circà quod revolvitur ut RR ad DD, ideóque foret gravitas planetæ in ſuperficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{RRTT}$. Jam verò cum vis centrifuga planetæ poſiti in æquatore corporis circà quod revolvitur ſit in ratione directâ radii hujus planetæ & inversâ duplicatâ temporis revolutionis circâ axem, ſi tempus periodicum circà axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{tt}$ undè ſi vis gravitatis in ſuperficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{RRTT} : \frac{R}{tt} = D^3 \times tt : R^3 \times TT$.

90. Diſtantia D, quarti ſatellitis jovialis à centro planetæ primarii fit 26.63 ſemid. jovis, prout à Newtono in fine Phænomeni II determinantur & tempus periodicum $T = 16$ dieb. 18^h. 5′ 7″ prout à Caſſino in novis Elementis Aſtron. traduntur. Semidiameter jovis $R = 1$, tempus periodicum jovis circà axem $t = 9^h$. 55′ 52″ poſito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $CA : CP = 2p + f : 2p$, vel $CA - CP : CP = f : 2p$, aut $CA - CP : CP = R^3 TT : 2D^3 tt$, erit itaque in hâc hypotheſi gravitatis pro jove $CA - CP : CP = 1 : \frac{2D^3 \times tt}{TT} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter ſemidiametrum ſecundum æquatorem jovis & ſemidiametrum inter polos quamproxime æqualis eſt differentiæ quam Newtonus ex ſuâ methodo derivavit.

Sit mediocris diſtantia Lunæ à terrâ $D = 60$ ſemid. terreſtr. tempus periodicum Lunæ $= 27$ dieb. 7^{hor}. 43′, ſemid. terræ $= 1$, tempus revolutionis terræ circà axem $= 23^{hor}$. 56′ 4″. erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Undè pro terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: terra itaque minùs compreſſa foret quam à

New-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo terram ibi altius ſurgere quam ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta pendulorum quæ recenſentur in propoſitione ſequente.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

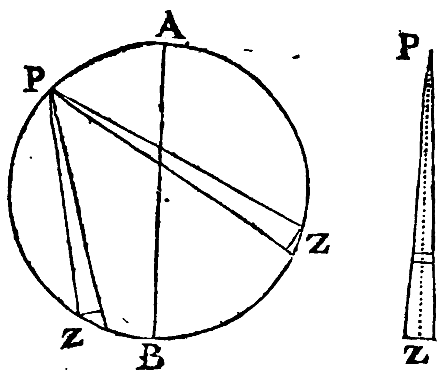
Newtono definitum eſt, magis tamen quam determinatum eſt ab Hugenio, verum ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus Periodicum non reſpondet accuratè vi centrifugæ terræ; talias correctiones hujus calculi invenies Tranſ. Philoſ. N°. 438 quibus ad Newtonianam proportionem magis accuratè revocatur. De hâc Quæſtione nobiliſſimâ procul dubio legantur quæ de telluris figurâ dederunt Clariſſimi Viri D. De Mairan in monumentis Pariſ. an. 1720. D. De Maupertuis ibidem an. 1733. 1734. 1735. 1736. & in duobus opuſculis quorum unum de figuris corporum cæleſtium, alterum de figurâ telluris inſcribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in monumentis Pariſienſibus an. 1735. & in Tranſactionibus Philoſophicis num. 445. & 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Euſtachius Manfredius ibid. an. 1734. & D. Stirling in tranſactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam ſternet ad determinandam figuram terræ ortam ex neceſſitate æquilibrii vis centrifugæ & vis gravitatis ſingularum ejus partium, ſi generaliſſime ſolvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, ſi inveniatur attractio corpuſculi non ſolùm *ſiti in axe* ſolidi rotundi, ſed ſiti ubivis in ejus ſuperficie, cujus Problematis Analyſim hic in compendium tràdemus.

PROBLEMA.

Datâ Æquatione curvæ cujuſcumque quæ circa axim revolvendo ſolidum deſcribat invenire attractionem corpuſculi ſiti in quocumque puncto ſuperficiei ejus ſolidi.

Conſtructio. Fingatur Planum tangens id ſolidum in P, & ſuper eo plano, e puncto P ut centro deſcripta intelligatur ſphæra radio infinitè parvo, dividatur tota ſuperficies hemiſphærii verſus ſolidum converſi in portiunculas æquales, & concipiantur Pyramides (quarum vertices ſint in centro ſphæræ) illis portiunculis inſiſ-

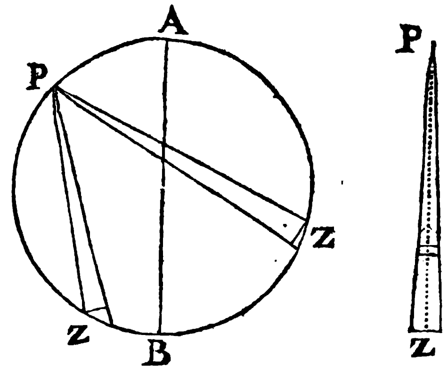


tentes & inde ad ſolidi ipſius oppoſitam ſuperficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ Pyramides in eo ſolido per Baſes parallelas Baſibus ipſarum ſphæræ circumſcriptis; Corpuſculi in puncto P ſiti attractio ab omnibus illis Pyramidibus, concipi poterit ut attractio à toto ſolido, exiguæ enim ejus ſolidi portiones quæ in extremitate unius cujuſque Pyramidis negliguntur ſunt ubique totius Pyramidis reſpectu infinitè parvæ. 90.

Attractio autem corpuſculi P à ſingulâ Pyramide erit ubique ut axis PZ ejus Pyramidis; Nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea ſuperficies duæ, parallelæ Baſi Pyramidis, ſive, quod idem eſt, parallelæ ſuperficiei ſphæræ circa P deſcriptæ, exiguum ſolidum inter eas ſuperficies contentum creſcet ut illæ ſuperficies ſive ut quadratum portionis axeos abſciſſæ, ſed cum attractio ſingulæ particulæ decreſcat ut quadratum diſtantiæ à puncto P, ſive decreſcat ut quadratum abſciſſæ; ideóque creſcat particularum quantitas ut decreſcit ſingulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus ſolidi ubivis in axe PZ ſumpti eadem ſemper ſit; æqualis, erit v. gr. attractioni ſolidi cujus baſis foret portio ſuperficiei ſphæ-

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

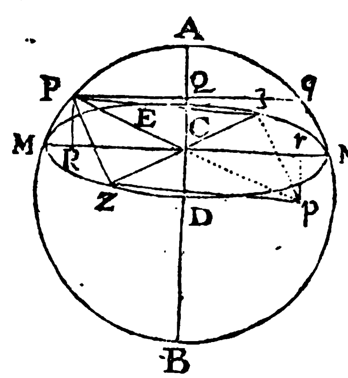


ræ intra Pyramidem contentæ, & altitudo illa quam minima axeos P Z portio aſſumpta. Hinc attractio totius Pyramidis erit attractio ejus parvi ſolidi, toties repetita quot ſunt axeos P Z portiunculæ; Cum itaque portio ſuperficiei ſphæræ intra Pyramides contenta, ſit ubivis eadem, ex Conſt., attractiones ſingularum Pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in ſingulo axe P Z aſſumendarum, ſive quod idem eſt, ut ſinguli axes P Z.

His poſitis: ſit M D N E unus è circulis genitis in ſolido propoſito per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus Pyramidibus quarum axes in circumferentia circuli M D N E terminantur, (quæ eſt ut ſumma omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) eſt ut linea P C à puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium: (miſſis nempe ſingularum P Z longitudinibus).

Aſſumatur enim in circumferentia MDNE punctum quodlibet Z, & ducta per centrum C linea Z C ʒ, ducatur P ʒ, ex demonſtratis attractiones Pyramidum ad Z & ʒ pervenientium erunt ut P Z ad P ʒ; Ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R & per R & centrum C ducatur Diameter M R N, ſumptaque N r = M R demittatur perpendiculum r p, ſitque r p = R P, linea M N, P R & r p ſunt in eodem plano (per 6. XI. Elem.) ideoque linea P p ſecabit lineam M N, & cum Triangula P R C, p r C ſint æqualia propter r p = R P, angulos rectos, & angulos per verticem oppoſitos, ſitque N r = M R linea P p tranſibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano Trianguli Z P ʒ cum habeat puncta P & C in eo plano; inde ſi jungantur lineæ Z p, ʒ p, tota figura P Z p ʒ erit in eodem Plano, & propter æquales P C, p C, Z C, C ʒ & angulos interceptos per verticem oppoſitos lineæ P Z, p ʒ erunt æquales, ut & lineæ P ʒ, p Z, hinc figura P Z p ʒ eſt Parallelogramma cujus P p ſive 2 P C eſt Diagonalis; Quare cum Pyramides trahant ſecundum directiones P Z, P ʒ, viribus quæ ſunt ut P Z ad P ʒ, vis inde reſultans, dirigetur ſecundum Diagonalem P p, ſive 2 P C, eique erit proportionalis.

Quod cum ita ſit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E ſumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus Pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut 2 P C multiplicata per numerum parium earum Pyramidum;



ſive erit ut P C ipſa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, obſervandum eſt, eas lineas egredientes ab Hemiſphærio circa P deſcripto, in ejus ſuperficie ſignare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendicula-

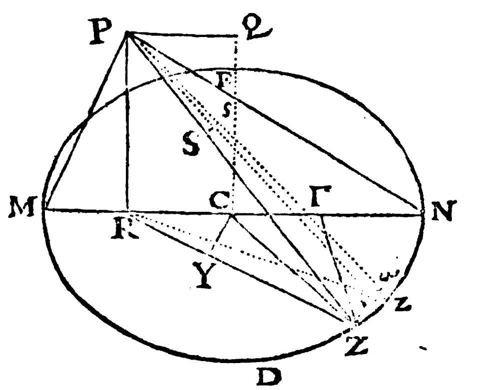
9°.

dicularitér centro C, iſto enim in caſu ſignarent circulum) & propter æqualitatem diſtantiæ concurſus eorum axium cum ſuperficie Hemiſphærii (ex conſtructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in ſuperficie Hemiſphærii ſignatæ; huc ergo redit tota quæſtio, ut, Dato puncto P ejuſque ordinata PQ ad axem ſolidi rotundi, ſumptâque ut libet abſciſsâ AC, ejus ordinata CM, & circulo MDNE ejus ordinatæ convolutione deſcripto, inveniatur longitudo curvæ deſcriptæ in ſuperficie ſphæræ (cujus radius PS ad lubitum aſſumitur) per interſectionem Coni inclinati cujus vertex eſt P, baſis vero MDNE.

Ut longitudo ſeu rectificatio ejus curvæ obtineatur, Ducantur à puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ MDNE, lineæ PZ, Pz; Abſciſſa circuli ſecundum Diametrum à puncto N remotiori à puncto P ſumatur, ſintque NΓ & ΓZ abſciſſa & ordinata circuli reſpondentes puncto Z, dicatur NΓ, x, ΓZ, y; Zz, dv; tota Diameter MN, f, duplum ordinatæ PQ ſit g, denique ſi centro P Radio PS deſcribatur arcus Ss ille arcus Ss erit elementum curvæ quæſitæ reſpondens Elemento circuli dv. Ex P, ut prius, demittatur in circulum MDNE perpendiculum PR, erit $RC=PQ=\frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ RZ & Rz, & centro C radio RZ deſcribatur arcus ZK ut ſit RK=RZ, ex centro C ducatur ad Z Radius CZ, & perpendiculum CY in lineam RZ, Dico 1°. quod Triangulus RCY eſt ſimilis Triangulo RZΓ, ob angulum in R communem, & rectos Γ & Y, unde eſt RZ ad ZΓ (y) ſicut RC ($\frac{g}{2}$) ad CY quod erit ergo $\frac{gy}{2RZ}$; 2°. Triangulus CZY eſt ſimilis Triangulo ZKz; Nam angulus RZK eſt rectus per Conſtr. quoniam Triangulus RZK eſt Iſoſceles, Angulus vero CZz eſt etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi CZK manent æquales anguli CZY & KZz, præterea anguli in Y & K ſunt recti: erit ergo Radius CZ ($\frac{f}{2}$) ad CY ($\frac{gy}{2RZ}$) ſicut Zz (dv) ad KZ quod erit ergo $\frac{gy}{KZ\times f}dv$.

3°. Ducatur ex P linea PK ea erit æqualis lineæ PZ nam Trianguli PRZ, PRK erunt æquales ob communem PR, æquales per Conſt. RZ & RK, & angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc ſi radio PK, centro P deſcribatur arcus Kω, erit $P\omega=PZ$ & arcus Zω ſimilis erit elemento quæſito Ss, & Triangulus Zzω Rectangulus erit in ω.

Porro, Triangulus Kωz erit ſimilis triangulo PRz ob angulum communem in z, & Rectos in R & ω, ſive ſimilis



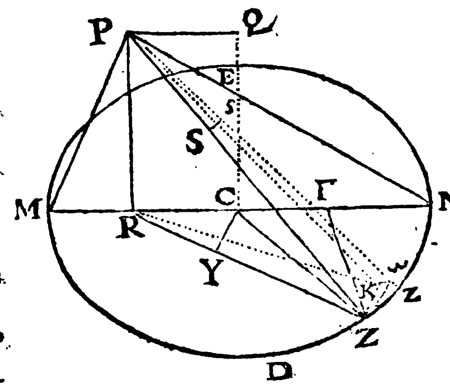
erit triangulo PRZ, ideoque fiat ut PZ ad RZ ita KZ ſive $\frac{gy}{KZ\times f}dv$ ad ωz quod erit itaque $\frac{gy}{PZ\times f}dv$.

4°. In Triangulo Zzω, Rectangulo in ω cum Zz ſit dv & ωZ ſit $\frac{gy}{PZ\times f}dv$ erit quadratum Zω ſive $\overline{Z\omega}^2=dv^2-\frac{g^2y^2}{PZ^2\times f^2}dv^2$ & cum ſit PZ ad PS ſicut Zω ad Ss erit PZ² ad PS² ſicut $\overline{Z\omega}^2$ ſive $1-\frac{g^2y^2}{PZ^2\times f^2}dv^2$ ad Ss² ergo quadratum Elementi curvæ quæſitæ eſt $\frac{PS^2}{PZ^2}\times\overline{1-\frac{g^2y^2}{PZ^2\times f^2}}dv^2$: Quod erat Inveniendum.

 Ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

90. Ut autem Integretur, primò notandum quod ex Natura circuli Elementum dv ſit æquale Elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideoque quadratum Elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4PZ^2}} \times dx^2$: Præterea eſt $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, & eſt $RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$ eſt autem . ex conſtructione, $R\Gamma = RN - N\Gamma = \frac{g+f}{2} - x$ ideoque $R\Gamma^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx - fx + xx$ eſtque $\Gamma Z^2 = fx - xx$, ideo ($RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$)$= \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$ & $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$; ſed eſt $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, & ſi ad compendium tertia proportionalis ad 2 PQ (ſive g) & PN dicatur l ut ſit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ ſicque quadratum elementi quæſiti evadet $\frac{PS^2}{gl - gx} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times \overline{l-x}}} \times dx^2$, ſive cum y^2 ſit $fx - xx$ erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times \overline{l-x}} dx^2 \times \overline{\frac{f^2}{x \times \overline{f-x}} - \frac{g}{l-x}}$.



Dividatur autem f^2 per $x \times \overline{f-x}$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur g per $l - x$ fit - - - $\frac{g}{l} + \frac{gx}{l^2} + \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$ &c.

Differentia ſerierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2 - fg}{l^2 f} x + \frac{l^3 - f^2 g}{l^3 f^2} x^2 + \frac{l^4 - f^3 g}{l^4 f^3} x^3$ &c.

Divid. ea differ. per $l - x$ fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2 + lf + f^2 - 2fg}{l^3 f} x + \frac{l^3 + l^2 f + lf^2 + f^3 - 3fg}{l^4 f^2} x^2$ &c.

Unde quadratum elementi Ss eſt $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2 + lf + f^2 - 2fg}{l^2 f^2} x + \frac{l^3 + l^2 f + lf^2 + f^3 - 3fg}{l^3 f^3} x^2$ &c. quæ ſeries ad lubitum continuari poteſt.

Exprimatur autem curvæ quæſitæ longitudo per hanc ſeriem cujus coefficientes ſunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$ &c.

ejus fluxio erit $dx \times \frac{1}{2} Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2} Ex^{\frac{7}{2}} +$ &c. cujus quadratum erit $dx^2 \times \frac{1}{4} A^2 x^{-1} + \frac{3}{2} AB + \frac{5}{2} ACx + \frac{7}{2} ADx^2 + \frac{9}{2} AEx^3 + \frac{11}{2} AFx^4$

$+ \frac{9}{4} B^2 x + \frac{15}{2} BCx^2 + \frac{21}{2} BDx^3 + \frac{27}{2} BEx^4$ &c.

$+ \frac{25}{4} CCx^3 + \frac{35}{2} CDx^4$

Cal-

Collatis verò terminis ſeriei inventæ cum terminis correſpondentibus hujus ſeriei ficititiæ invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROB. III.

$$B = A \times \frac{l+f-g}{6lf}$$

90.

$$C = A \times \frac{\begin{array}{l} 3l^2+2lf+3f^2 \\ \quad +2lg-6fg \\ \quad\quad -g^2 \end{array}}{2.4.5\,l^2f^2}$$

$$D = A \times \frac{\begin{array}{l} 10l^3+6fl^2+6f^2l+10f^3 \\ \quad +2gl^2+12fgl-30f^2g \\ \quad\quad +6g^2l-10fg^2 \\ \quad\quad\quad -2g^3 \end{array}}{2.4.4.7\,l^3f^3}$$

$$E = A \times \frac{\begin{array}{l} 35l^4+20fl^3+18f^2l^2+20f^3l+35f^4 \\ \quad +4gl^3+12fgl^2+60f^2gl-140f^3g \\ \quad\quad -6g^2l^2+60fg^2l-70f^2g^2 \\ \quad\quad\quad +20g^3l-28fg^3 \\ \quad\quad\quad\quad -5g^4 \end{array}}{2.4.4.4.9\,l^4f^4} \text{ \&c.}$$

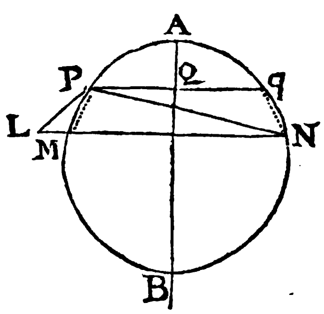
Hinc ſeries quæ exprimit longitudinem curvæ quæſitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\sqrt{f} \times x^{\frac{1}{2}} + \frac{l+f-g}{2.3lf}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\begin{array}{l} 3l^2+2lf+3f^2 \\ \quad +2lg-6fg \\ \quad\quad -gg \end{array}}{2.4.5\,l^2f^2}x^{\frac{5}{2}} + \text{\&c.}$$

Si autem talis ſit curva; ut PN ſit ubique major quam g ſcribatur loco x longitudo f, ſive Diameter circuli, & habebitur valor dimidii curvæ quæſitæ, quod reſpondet ſemicirculo MDN: eſt ergo ea ſemi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times 1 + \frac{l+f-g}{2.3l} + \frac{\begin{array}{l} 3l^2+2lf+3f^2 \\ \quad +2lg-6fg \\ \quad\quad -gg \end{array}}{2.4.5\,l^2} \text{ \&c.}$$

In hoc autem caſu quantitas l ſive $\frac{PN^2}{g}$ eſt major quam f, majorem eſſe quam g ex hypotheſi hujus caſus ſequitur, cum PN ſupponatur major quam g; majorem autem eſſe l quam f hinc liquet, ductâ in Trapezio PqNM diagonali PN fiat in P ſuper PN à parte lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q, ita ut occurrat PL lineæ NM, dico lineam NL eſſe longiorem quam NM, nam anguli MPq & q ſunt æquales, ſed angulus NPL eſt æqualis angulo q ergo angulus NPL cum angulo NPq major eſt angulo qPM, cadit ergo L ultrà M; ſive NL eſt major NM; eſt autem NL æquale l nam Trianguli PqN & PNL ſunt ſimiles ob angulos q & NPL æquales per conſt., anguloſque NPq & PNL æquales ob parallelas Pq, MN, hinc ergo eſt Pq ad PN ut PN ad NL, ſed eſt Pq ſive g ad PN ut PN ad l, ergo eſt NL æqualis l & major quam f.



DE MUNDI SYSTEMATE.

Hinc, ut iſta ſeries convergat debent ita diſponi termini hujus ſeriei ut remotiores à primo ponantur ii in quibus creſcunt in Numeratore dimenſiones quantitatum f aut g, & in Denominatore dimenſiones quantitatis l, ideóque hanc habet formam.

20.

$$\frac{PSf}{PN}\times 1$$

$$+\frac{1}{2.3l}\times\overline{1+f-g}$$

$$+\frac{1}{2.4.5l^2}\times 3l^2+\overline{2fl+2gl}+\overline{3f^2-6fg-g^2}$$

$$+\frac{1}{2.4.4.7l^3}\times 10l^3+\overline{6fl^2+2gl^2}+\overline{6f^2l+12fgl+6g^2l}+\overline{10f^3-30f^2g-10fg^2-2g^3}$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.9.l^4}\times 35l^4+\overline{20fl^3+4gl^3}+\overline{18f^2l^2+12fgl^2-6g^2l^2}+\overline{20f^3l+60f^2gl+60fg^2l+20g^3l}+\&c.$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.11l^5}\times 126l^5+\overline{70fl^4+10gl^4}+\overline{60f^2l^3+24fgl^3-4g^2l^3}\ \&c.$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.4.13l^6}\times 462l^6+\overline{252fl^5+28gl^5}\ \&c.$$

$$+\frac{1}{2.4.4.4.4\ 4.4.15l^7}\times 1716l^7+\&c.$$

&c.

Ut autem hæc forma ad ſimpliciorem revocetur, notandum quod ubi eſt $g=0$ tunc $l=\infty$, ideóque omnes termini hujus ſeriei præter primam columnam evaneſcunt, quoniam continet altiſſimam dignitatem quantitatis l; ſed ubi $g=0$ tunc Conus PMDNE fit rectus, & curva inſcripta ſphæræ cujus radius eſt PS, eſt circulus cujus Diameter eſt ad f ſicut PS ad PN, unde is Diameter eſt $\frac{PS\times f}{PN}$; ideóque prima columna ſeriei quæ eo in caſu dimidium curvæ exprimit, continet rationem ſemi-circuli ad Diametrum 1. Ideo ſumma tota ejus columnæ $1+\frac{1}{2.3}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{10}{2.4.4.7}$ &c. eſt 1.57079 &c. idque in quocumque valore quantitatis g, ſiquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam ſummam ſecundæ columnæ, ea in duas dividatur partes quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur ſummæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ obſervandum quod ſinguli coefficientes primæ columnæ (primo terminô 1 ſecluſo) ſunt ad coefficientes ſingulos ſecundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7 &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coefficientes ſecundæ columnæ ſimul ſumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ inſuper eâ quantitate quá primi coefficientes ſecundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui exceſſus celerrimè convergunt ſuntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{7}{2.4.4.4.4.11}+\frac{21}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15}\ \&c.$$

qui

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

qui termini ſunt	.08333
	.01250
	.00446
	.00217
	.00124
	.00078
	.00053
	.10613
ſumma reliquorum	.00112
dimidium .57079	.28539
	.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi poteſt ſequentes terminos decreſcere in ratione duorum ultimò inventorum, unde ſumma omnium terminorum adjiciendorum erit ,00112 proximè, hinc ea pars ſecundæ columnæ eſt $.39152 \frac{f}{l}$ proximè.

90. Hujus autem primæ partis ſecundæ columnæ coefficientes ſunt ad coefficientes alterius partis ut − 1 ad 1, + 1 ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1 &c., ſinguli autem erant ad ſuos exceſſus ſupra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1 &c., ergo coefficientes alterius partes iſtius columnæ ſunt ad eos exceſſus ut 2 ad − 1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio tandem ad æqualitatem deſinit; Ergo ſumma iſtius columnæ ſumatur æqualis differentiolis ſupra inventis .10613., & inſuper quantitatibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ ſunt

$$\frac{-1\frac{1}{2}}{2.3} + \frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{3}{2.4.4.4.4.11} + \frac{7}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

ſive	− .25
	+ .03750
	+ .00446
	+ .00130
	+ .00053
	+ .00026
	+ .00014
	− .20581
ſum. reliq.	16
ſum. differ.	+ .10613
	$-.09952 \frac{g}{l}$

Unde ſummâ terminorum ejus columnæ eſt $-.09952\frac{g}{l}$ proximè

Termini tertiæ columnæ ſummati evadunt $+0.1379 \frac{f^2}{l^2} - 0.0621 \frac{fg}{l^2} + 0.0057 \frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ ſunt $+0.07265 \frac{f^3}{l^3} - 0.07119 \frac{f^2 g}{l^3} - 0.0032 \frac{fg^2}{l^3} + 0.03353 \frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ ſunt $+0.04965 \frac{f^4}{l^4} - 0.00444 \frac{f^3 g}{l^4} - 0.05586 \frac{f^2 g^2}{l^4} + 0.06380 \frac{fg^3}{l^4} + 0.015 \frac{g^4}{l^4}$

T. ſextæ ſunt $+0.07469 \frac{f^5}{l^5} - 0.14589 \frac{f^4 g}{l^5} - 0.11563 \frac{f^3 g^2}{l^5} - 0.06938 \frac{f^2 g^3}{l^5} - 0.01376 \frac{fg^4}{l^5} - 0.00385 \frac{g^5}{l^5}$

In hoc caſu ubi l eſt major quam g aut f, ex iſtis terminis ſufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini imo & pauciores aſſumi poſſint reliquis omiſſis; Quoniam ergo invenimus attractionem puncti P à circulo MDNE eſſe ut PC ductum in numerum linearum PZ in circumferentia MDNE terminatarum, ſive ut PC ductum in curvam quæ in ſuperficie ſphæræ intercipitur inter lineas PZ, ſi in ſingulo puncto C, axeos AB erigatur ordinata quæ ſit ut

PC

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

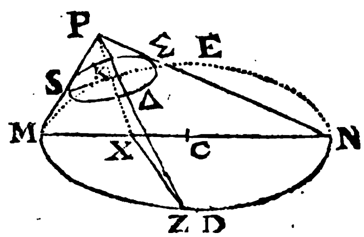
$$\frac{PC}{PN}\times MN\times 1.57079+0.39125\frac{f}{l}+0.1379\frac{f^2}{l^2}+0.0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$-0.09952\frac{g}{l}-0.0621\frac{fg}{l^2}-0.0722\frac{f^2g}{l^3}\ \&c.$$
$$+0.0057\frac{g^2}{l^3}-0.0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+0.03353\frac{g^3}{l^3}$$

& per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, ſi modo in hoc valore inſerantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abſciſſa conſtans AQ dicatur a, ejus ordinata $PQ=\frac{g}{2}$ ſit c, abſciſſa AC ſit x, ordinata CM ſit y, erit $PN^2=\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2$, ideóque $l=\frac{\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2}{2c}$, & $PC=\sqrt{\overline{x-a}^2+c^2}$.

Ex his & æquatione curvæ, determinari poterit punctum axeos in quo tranſibit circulus talis ut attractio cis eum circulum æqualis ſit attractioni ultra eum circulum, ſive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cum hæc duntaxat valeant cum g ſive PQq numquam major eſt quam PN, generalior alia eſt ſolutio, ſed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2dus. Caſus, ſi talis ſit curva ut incertum ſit utrum PN numquam ſit minor quam PQq ſive g.



Ducatur per punctum P linea quæ angulum NPM in duos angulos æquales dividat, & occurrat lineæ MN in puncto X, erit (per 3. VI. Elem.) PN + PM ad NM ut PN ad NX quod erit ergo $\frac{PN\times f}{PN+PM}$; ſcribatur is valor loco x in ſerie quæ exprimit longitudinem curvæ propoſitæ ea evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times\overline{PN+PM}}}\times 1+\frac{l+f-g}{2.3.\,l\times\overline{PN+PM}}PN+\frac{\begin{matrix}3l^2+2lf+3f^2\\+2lg-6fg\\-gg\end{matrix}}{2.4.5\,l^2\times\overline{PN+PM}^2}PN^2\ \&c.$$

quæ ſeries in omni caſu convergit propter quantitatis PN + PM dignitates in denominatore poſitas quæ quantitas ſemper major eſt quam PN, f & g in numeratore poſitas (per 20. 1i. Elem.), imo ſi loco l ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio ſeries evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times\overline{PN+PM}}}\times 1+\frac{PN^2+fg-g^2}{2.3.\,PN\times\overline{PN+PM}}+\frac{\begin{matrix}3PN^4+2PN^2gf+3f^2g^2\\+2PN^2gg-6fg^3\\-g^4\end{matrix}}{2.4.5.\,PN^2\times\overline{PN+PM}^2}\ \&c.$$

Sum

Cum autem in Triangulo P N q, vel in Triangulo P M N, P N + M N ſit ſumma laterum & P N numquam ſit minimum latus, demonſtrabitur facile quod Rectangulum P N per P M + P N, eſt majus Rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus P N, P q vel M N, unde in quocumque caſu hæc ſeries tam reſpectu litteralium quantitatum quàm reſpectu numerorum coefficientium erit convergens, idque ſatis promptè, ſiquidem duobus gradibus creſcunt dimenſiones ab uno termino ad alterum. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Portio autem curvæ quæſitæ reſpondens tali abſciſſæ, eſt accurate quarta pars totius curvæ quæſitæ, ſumptis enim à puncto P ſecundum lineas P M, P N longitudinibus P S, P Z æqualibus radio ſphæræ, ductâque S Σ; & ſecto Cono P M D N E ſecundum lineam S Σ per planum perpendiculare Plano P N M ſectio erit Ellipſis & S Σ unus ejus Ellipſeos axibus; quia verò Triangulus P S Σ eſt Iſoſceles & linea P X angulum S P Σ biſariam dividit, ea linea P X ſecabit axem Ellipſeos SΣ in ipſo centro K Ellipſeos, quoniam autem alter axis K Δ eſt perpendicularis in axem SΣ, & eſt in plano ad Planum P N M perpendiculari, erit axis Δ K perpendicularis in lineam PKX ideoque erit Parallelus ordinatæ X Z, & linea P Z tranſibit per punctum Δ; Ergo unus Ellipſeos quadrans intercipietur inter lineas P N, P Z, hoc eſt reſpondebit portioni N D Z ſemicirculi N Z D N, alter verò quadrans Ellipſeos reſpondebit reliquæ portioni M Z ſemi-circuli ejuſdem; Jam verò evidens eſt quod ſi habeatur Conus rectus cujus baſis ſit Ellipſis quævis, & ab ejus Vertice ut Centro, radio quovis deſcribatur curva in ejus Coni ſuperficie, portiones ejus curvæ ſingulis quadrantibus Ellipſeos reſpondentes erunt inter ſe æquales; Ergo portio curvæ reſpondens abſciſſæ $x = \frac{PN}{PN + PM} f$ eſt accuratè quarta pars totius curvæ quæſitæ. 9 e

Ergo ex prius inventis, cum attractio Puncti P à Pyramidibus in peripheriam MDNE deſinentibus, exprimi debeat per P C ductum in numerum linearum P Z, quæ à puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam M D N E deſinunt, is vero numerus linearum P Z ſit ut curva quæ intercipitur in ſuperficie ſphæræ deſcriptæ radio quocumque P S inter eas lineas P Z, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum P Z ut unus ex eis quadrantibus, exprimitur verò is quadrans per ſeriem ſuprà inventam ergo (poſito PS=1) attractio Puncti P à ſolido

$$\text{eſt ut } \frac{PC \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times 1 + \frac{PN^2 + ff - gg}{2.3.PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2g^2 + 2PN^2 gg - 6fg^3 - g^4}{2.4.5.PN^2 \times \overline{PN + PM}^2} \ \&c.$$

Hæc ſeries tunc minimùm convergit cum ex ſolis coefficientibus numericis convergit cum nempe punctum M coïncidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes NM, ſive f; Pq ſive g, P N & P N + P M ſunt inter ſe æquales & $PC = \frac{g}{2}$ tunc ergo ſeries redit ad $PC \times 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \frac{35}{2.4.4.4.9}$ &c.

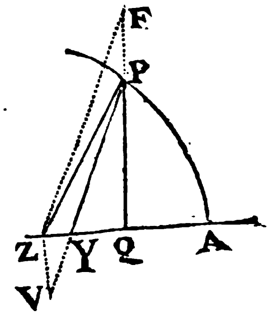
Eo autem in caſu, ex ipſâ conſtructione liquet, portionem curvæ ſphæræ inſcriptæ eſſe quadrantem circuli cujus radius eſt 1, eumque quadrantem exprimi iſtâ ſerie; hinc totam hanc ſeriem æquipollere quantitati 1.57079 × P C.

Facilior paulo evadet calculus, ſi loco ſummæ laterum P M + P N, adhibeatur quantitas $\frac{fg}{PN - PM}$ ipſi æquipollens, Prolixior tamen eſt, quàm ut illum applicare ſuſtinuerimus ad ulteriores conſequentias.

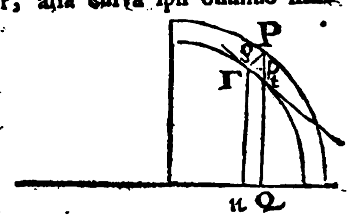
Dixi ex his viam ſterni ad determinationem curvæ quam affectat Meridianus Telluris nam ſi ex Æquatione generali $y = Ax^n + Bx^{2n} + Cx^{3n}$ &c. & ex ſerie inventâ determinetur attractio puncti P à quovis circulo, & erigatur in puncto axis quod ejus circuli eſt centrum ordinata quæ ejus circuli attractionem repræſentet, & intelli-

DE MUNDI SYSTEMATE.

intelligatur curva per earum ordinatarum vertices tranſiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in ſolidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo ſi erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod at-
90. tractio puncti P dirigetur.



Pariter ex Æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla ZY & YQ, ex Z ducatur ZV Parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V, producatur PQ in F ut fiat PF = ZV, ducaturque FZ, quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P, PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio media nata ex utriuſque vis compoſitione (ut conſtat facto cum agatur de tellure ipſâ); ſed quia habentur ZY, YQ, PQ & PY habebuntur ZV & VY, ideóque habebitur VP, ergo habebuntur latera & Diagonalis Parallelogrammi FPVZ ſive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis & vis mediæ PZ ex utrâque reſultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione ſolidi nata & per aream curvæ inventa ad reſiduum ejus gravitatis demptâ vi Centrifugâ.



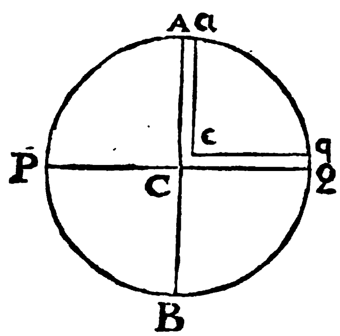
Tandem inſcripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipſi omninò ſimilis ita ut earum ſit idem centrum, & axes ſupra ſe mutuò jaceant, Æquatoris prioris curvæ ſemi-Diameter dicatur m, & differentia ejus à ſemi-Diametro alterius, quæ quamminima aſſumi poteſt, dicatur dm, abſciſſa CQ prioris curvæ ſit z, erit ejus differentia ab abſciſſâ correſpondenti alterius curvæ $\frac{zdm}{m} = Q\pi = \Gamma p$; ordinata PQ ſit y ejus differentia ab ordinatâ correſpondenti erit $\frac{y\,dm}{m} = Pp$; quoniam Γt poteſt ſumi ut portio tangentis curvæ, triangulum $\Gamma p t$ erit ſimile Triangulo fluxionali in puncto Γ ſive etiam in Puncto P ob ſimilitudinem curvarum & abſciſſarum erit ergo $: dz : dy = \Gamma p \left(\frac{z\,dm}{m}\right) : pt = \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = \overline{y + \frac{z\,dy}{dz}} \times \frac{dm}{m}$ ſed ſi ducatur $P\varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam Triang. $P\varrho t$ ſimile Triang. $\Gamma p t$ ideoque Triang. fluxionali; nam ob ſimilitudinem curvarum, tangens Γt eſt parallela curvæ in P, ideóque angulus ϱ eſt rectus, eſt ergo dv ad dz ut Pt ſive $\overline{y + \frac{z\,dy}{dz}} \times \frac{dm}{m}$ ad $P\varrho$ quod erit ergo $\frac{ydz + zdy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ ſive deletâ ratione $\frac{dm}{m}$ quæ data eſt, perpendiculi portio inter duas curvas ſimiles intercepti erit ut $\frac{ydz + zdy}{dv}$, multiplicetur id perpendiculum per ydv, factum erit ut annulus ſolidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2dz + zydy$ per valorem gravitatis acceleratricis ſecundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut Pondus fluidi inter curvas ſimiles intercepti in puncto P, ſumantur ejus facti fluxiones facta dz conſtanti, & nihilo æquentur illæ fluxiones, ſic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, & habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam Meridianus terræ affectat.

Alia etiam eſt in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem ſuppeditare poſſet, nem-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diverſis.

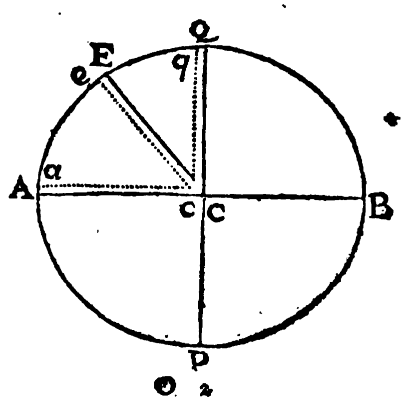
(a) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ



ACQqca æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem

nempe (fig. præced.) cum ſit P Q ad Z V ut Z Y ad Y Q, & Z V ſit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ eſt ſemper proportionalis ordinatæ P Q, ratio Z Y ad Y Q conſtans eſſe debet. Bene ergo res ſe habet ſi utroque modo eadem obtineatur curva; ſin minus, oportet ut inter has hypotheſes aliqua ſit repugnantia, nempe dari ſolidum, uniformiter denſum, rotans circa axim & in æquilibrio conſtitutum, in quo media actio inter gravitatem & vim Centrifugam ſit perpendicularis ad curvam; Quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam & laudem illi qui majori patientiâ aut induſtriâ, determinabit generaliſſimè Meridiani figuram ex genuinis Newtonianis principiis, nullâ præſuppoſitâ ad circulum, Ellipſim, aliamve curvam affinitate, ſive his calculis ipſi felicius tractatis ſive aliis.

(a) * *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut ſuprà prop. 19.) canalis aquæ plena a polo Q q ad centrum C c & inde ad æquatorem A a pergens. Quia oportet fluidum quieſcere (ex hyp.) erit fluidum in canalis crure A C in æquilibrio cum fluido in ejuſdem canalis crure Q C, & portio quælibet fluidi in crure C A conſiſtet in æquilibrio cum ſimili & ſimiliter poſitâ fluidi portione in crure C Q (ex demonſtratis (in prop. præc.) idem quoque ſimili argumento colligitur de corporibus quibuſvis homogeneis etiamſi fluida non ſint. Quarè corpora homogenea quæ

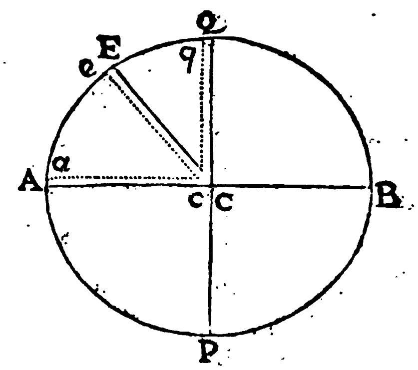


ſunt

DE MUNDI SYSTEMATE.

ut pondera totorum, ideóque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro terræ. Proindè ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ locorum à centro: & (b) propterea, ex hypotheſi quod terra ſphærois ſit, dantur proportione.

Un-



90. ſunt ut A C, Q C in locis A & Q conſtituta æquè gravia ſunt versùs centrum C. Sed gravitas corporis in A poſiti quod eſt ut Q C eſt, ad gravitatem alteriùs corporis homogeneì ibidem conſtituti quod eſt ut A C ſicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco conſiſtentium pondera ut ipſamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A & Q poſitorum gravitates ſunt ut Q C ad A C. Eodem modo oſtendetur gravitatem corporis in loco E, in alterà quâcumque canali C E, eſſe ad gravitatem corporis æqualis & homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quieſcere debet ſicut in priori canali A C Q (per hyp.) undè, ex æquo, æqualium & homogeneorum corporum in telluris ſuperficie ubivis conſiſtentium gravitates abſolutæ ſunt ut diſtantiæ à centro reciprocè.

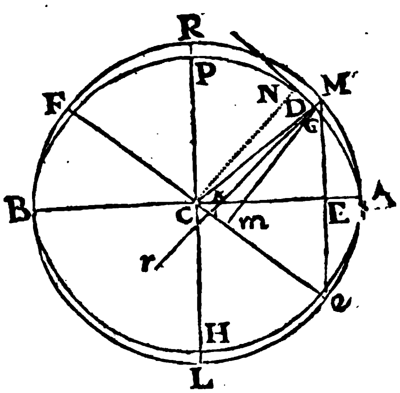
* Gravitatem corporis in E eſſe ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum eſt non Mathematicè, ſed quam proximè; directio enim gravitatis corporis poſiti in E non eſt ſecundum E C, ita ut ad centrum C tendat, ſed eſt perpendilaris ſuperficiei Q F A (ut ex facto liquet) hinc gravitates in ſingulis punctis forent reciprocè ut radii oſculatores curvæ, verùm ob figuram terræ prope ſphæricam id ſubtilius ſectari videtur ſuperfluum, tanto magis quod calculorum conſequentiæ, cum experimentis ſint conferendæ in quibus ſemper deficiet Mathematica ἀκρίβεια.

91. (b) * *Et propterea.* Ex hypotheſi enim quod terra ſit ſphærois qualem vult Newtonus, hoc conſit theorema, quod ſcilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos ſit quamproximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè eſt, ut quadratum ſinûs recti* latitu-

Unde tale conſit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, ſit quam proximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinus recti latitudinis. Et (c) in eâdem circiter ratione augen- LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

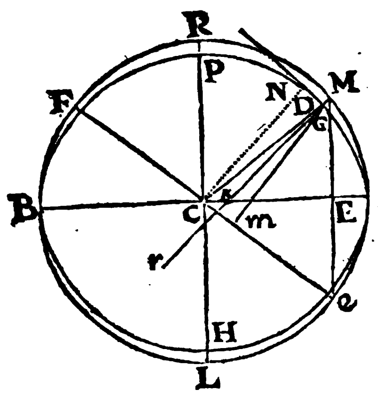
latitudinis. Sit enim A P B A, ellipſis quæ referat meridianum terræ & A R B L A, circulus radio C A, deſcriptus ad quem Ellipſis A P B A proximè accedit, ſitque radius C A ſemidiameter æquatoris terreſtris. erit (ex naturâ ellipſis 247 lib. 1.) $RP:MG=CR:EM$, ideóque $MG=\frac{RP\times EM}{CR}$. Sed propter triangula DMG, E M C, ſimilia, ubi ellipſis ad circulum proximè accedit (tunc enim D G, ſumi poteſt pro rectâ tangente Ellipſim in puncto D, & ea tangens eſt quam proximè perpendicularis radio D C) eſt $MG:MD=MC:ME$ ac proindè $MG=\frac{MD\times MC}{ME}$, erit ergò $\frac{RP\times ME}{CR}=\frac{MD\times MC}{ME}$, undè fit $MD=\frac{RP\times ME^2}{CR^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis Mm ad rectam F e, erit e m ſinus verſus arcûs duplicati A M, hoc eſt, arcûs M e, ſivè quia A M exhibet latitudinem (10) erit e m, ſinus verſus latitudinis duplicatæ; ſed eſt $em\times eF=M^2$ (ex proprietate circuli). Quare ob datam e F, eſt e m ut eM^2, vel etiam ut ME^2 ideóque MD, eſt ut $\frac{RP\times em}{CR^2}$, vel ob datas $\frac{RP}{CR^2}$, fit M D, ut e m, ſivè ut ME^2. Quia verò pondera in locis A & D ſunt ut diſtantiæ locorum à centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{CD}-\frac{1}{CA}$, hoc eſt, ut $CA-CD$, vel ut $CM-CD$ ideóque ut M D. Quarè *incrementum ponderis* &c.

(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione*. Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto oſculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto uſurpari poteſt (121. lib. 1.). Sed integri gradus ſunt ut minimi arcus ſimiles, arcus autem illi ſunt ut radii circulorum curvam oſculantium; quarè gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipſim ibidem oſculantis, & gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipſim oſculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari CN, ad tangentem D N, ſumptoque D r, pro radio oſculatore in D, erit D r ut Dk^3, ſivè quia eſt $CP^2=CN\times DK$ (ibid.) ob datam CP^2 erit Dk ut $\frac{1}{CN}$, ideóque radius circuli qui eſt ut Dk^3, erit ut $\frac{1}{CN^3}$, hoc eſt, radius circuli ellipſim oſculantis eſt recti-



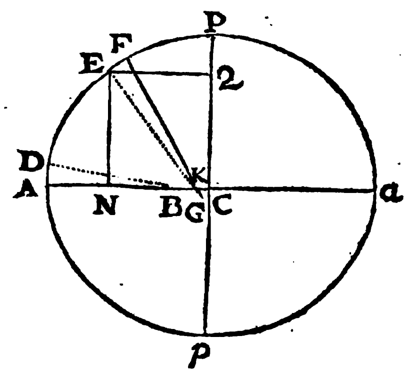
De Mundi Syſtemate. augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cum latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* ſit 48^gr. 50′, ea locorum ſub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum

[illegible]



reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem D N demiſſi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{CN^3} - \frac{1}{CA^3}$ hoc eſt, ut $CA^3 - CN^3$, ſive ut $CM^3 - CN^3$, vel etiam ut $CM^3 - CD^3$ quoniam differentia rectarum C N, C D admodùm exigua eſt. Sed eſt $CM^3 = (CD + DM)^3 = CD^3 + 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3$, ideóque $CM^3 - CD^3 = 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3 = 3CD^2 \times DM$, ob quantitates DM^2, DM^3, fere evaneſcentes reſpectu $3CD^2 \times DM$, ſunt igitur incrementa graduum ut $3CD^2 \times DM$, ſive ut DM, ob rectam CD proximè conſtantem. Quarè incrementa graduum ſunt ut ponderum incrementa.

93. Idem analyticè præſtari poteſt quemadmodum elegantiſſimè, pro more ſuo, fecit Clariſſ. D. De Maupertuis in monumentis Pariſ. an. 1734. & in libro de figurâ terræ. Semiellipſis P A p, referat meridianum ſphæroidis cujus eſt axis P p, diameter verò ſecundùm æquatorem A a. Ponatur C A = 1, C P = m, C N = x, E N = y erit (ex naturâ ellipſeos per lem.



4. de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ & $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit GE, radius circuli ellipſim oſculantis in E, is erit (214. lib. 1.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^3 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. lib. 1.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam ſinus anguli latitudinis A K E, dicatur s, poſito ſinu toto = 1, erit $1 : s = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proinde $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore ſubſtituto, loco xx in expreſſione radii oſculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur ſimul duo gradus meridiani AD, EF, quorum unus incipiat ab æquatore, alter

verò

ſinus verſi ſint 1134, 00000 & 20000, exiſtente radio 10000, & gravitas ad polum ſit ad gravitatem ſub æquatore ut 230 ad 229. & exceſſus gravitatis ad polum ad gravitatem ſub æ-

verò ſumatur ubivis in arcu A P, ſumpto A B, pro radio circuli ellipſim oſculantis in A, erit (92) A D : E F = A B : E G, ſed eſt $AB = \frac{PC^2}{AC}$ (241. lib. 1.) $= mm$, quarè ſi gradus A D dicatur A & gradus EF, dicatur E fiet $A:E = mm : \frac{mm}{(1-ss+mmss)}^{\frac{3}{2}}$ ac proindè $E = A \times (1 - ss + mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis & alium quemlibet gradum, atque inter diametrum & axem.

94. Si quantitas $1 + mm - ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens eſt $-\frac{3}{2}$ (550. lib. 1.) erit $E = A \times (1 - \frac{3}{2}(mm-1)ss + \frac{15}{8} \times (mm-1)ss^2 - \&c.)$ vel $A - E = \frac{3}{2}(mm-1)AS^2 - \frac{15}{8}(mm-1)^2 AS^4 + \&c.$ Quia verò ſphærois terræ ad ſphæram proximè accedit, erit ferè $m = 1$, ideóque in ſuperiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm-1$, ad altiorem poteſtatem evecta occurrit, undè fit pro telluire $2A - 2E = 3(mm-1) \times ASS$. Si terra ponatur versùs polos compreſſa erit $1 > m$ & $E > A$, hincque prodit $E - A \cdot ASS = 3 \times (1 - mm) : 2$. Quare iterum patet id quod jam demonſtravimus (92) arcus ſcilicet graduum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione ſinûs recti latitudinis.

95. Si gradus A D, non computetur ab ipſo æquatore, ſed ubivis inter A & E ſumatur, ſitque S ſinus anguli latitudinis, patet (94) fore $BD = \frac{mm}{(1-SS+mmSS)}^{\frac{3}{2}}$ ideóque $A : E = \frac{mm}{(1-SS+mmSS)}^{\frac{3}{2}} : \frac{mm}{(1-ss+mmss)}^{\frac{3}{2}}$, ac proindè $E \times (1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}} = A \times (1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}$. 96.
Jam verò evectis terminis ut ſuprà ad dignitatem cujus exponens $\frac{3}{2}$, neglectiſque quantitatibus evaneſcentibus (95), fiet $1 - mm = \frac{2(E-A)}{3E \times (ss-SS)}$.

Si gradus unus ab æquatore, alter à polo numeretur, erit $s = 1$, & $S = 0$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1 - mm = \frac{2(E-A)}{3E}$.

95. Si loco ſemidiametrorum C A, C P, & ſinus latitudinis ss, in æquatione $xx = \frac{1-ss}{1-ss+mmss}$, (93) ſubſtituantur expreſſiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innoteſcet. Quare datis ſemidiametro æquatoris C A, ſemidiametro paralleli N C vel E Q, x, aut quod idem eſt, datis gradu æquatoris & gradu paralleli (ſunt enim gradus illi ut ipſimet circuli, ideóque ut radii) & ſimul cognitâ latitudine, cujus ſinus s, dabitur axis ellipſoidis. Simili prorſus modo ductâ quâlibet aliâ ordinatâ E Q, quæ ſit alterius paralleli Semidiameter & mutatâ utcunque latitudine, inſtitui poterit alia æquatio quatuor variabiles continens ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè ſemidiametros ellipſis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datiſque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ ſimul utrâque æquatione, determinari poſſe ſemidiametrorum rationem. Cæterum hæc omnia conſtructionibus geometricis facilè abſolvi poſſunt, verùm in præſenti materiâ præſtat calculum adhibere.

De Mundi Systemate.

quatore ut 1 ad 229: (d) erit exceſſus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub æquatore, ut $1\frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine ſynchroni penduli Pariſienſis, (g) exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit tabula ſequens.

96.

(d) * *Erit exceſſus gravitatis.* Exceſſus gravitatis ad polum dicatur E, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur e, ſitque G, gravitas ſub æquatore, erit.

$$E : G = 1 : 229$$

$e : E = 11334 : 20000$, ideóque per compoſitionem rationum & ex æquo

$$e : G = 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229,$$

hoc eſt, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ eſt ad gravitatem ſub æquatore

$$= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000,$$

& propterea addendo 5667 numero 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quarè cum longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. 24. Lib. 2.).

(f) * *Ob pondus aeris.* Corpus oſcillans in aere ponderis ſui partem amittit æqualem ponderi, paris voluminis aeris, quare ſi idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus ideoque celeriùs vibrabit & ut ad Iſochroneitatem reducatur augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas hinc cum $\frac{1}{11000}$ parte plumbi pondus in vacuo augeatur tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ l. ut 11001 ad 11000 invenieturque $440\frac{5}{9}$ (289. lib. 2.). Hinc in latitudine Lutetiæ Pariſiorum longitudo penduli ad minuta ſecunda oſcillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Pariſ. & lin. $8\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum.* Cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc eſt, ut 3 ped. $8\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{9079850000}{20661003} = 439.468$, qui eſt penduli longitudo ſub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. & $8\frac{5}{9}$ lin., ſeu lin. 440.555, remanet exceſſus lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ.

Lati-

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Menſura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	59382

Conſtat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus geographicis figura terræ pro ſphæ-

DE MUNDI SYSTEMATE. ricâ haberi poſſit: (h) præſertim ſi terra paulo denſior ſit verſus planum æquatoris quam verſus polos.

Jam vero aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes aſtronomicas faciendas miſſi, obſervarunt quod horologia oſcillatoria tardiùs moverentur prope æquatorem quàm in regionibus noſtris. Et primo quidem D. *Richer* hoc obſervavit anno 1672. in inſulâ *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum fixarum per meridianum menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu ſolis, exiſtente differentiâ 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Pariſienſis (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Sanctæ Helenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit pluſquam octavâ parte digiti, ſeu lineâ unâ cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in imâ parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682. D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in obſervatorio regio Pariſienſi eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiſtente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac

(h) * *Præſertim ſi terra.* In eo ſiquidem caſu minui diametrorum differentiam oſtendimus (in prop. præc.).

Poſthac D. *Couplet* filius anno 1697 menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum ſolis medium in obſervatorio regio Pariſienſi ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu ſolis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit quod menſe *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, exiſtente differentiâ 2′. 13″ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardiùs ire quam *Pariſiis*, exiſtente differentiâ 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta ſecunda oſcillans brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Pariſiis*. (i) Rectius poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ reſpondent. Craſſioribus hujus obſervationibus minus fidendum eſt.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuò navigans determinavit quod in inſulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſet paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in inſula *S. Chriſtophori* longitudo illa eſſet ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in inſula *S. Dominici* eadem eſſet ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-bello* in *America* longitudinem penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſe pedum trium Pariſienſium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id eſt, tribus ferè

(i) * *Rectiùs poſuiſſet.* Horologium tardiùs ibat Ulyſſiponi quam Pariſiis, exiſtente differentiâ 2′ 13″, ſeu 133″, ideóque horologium illud Pariſiis conficiens 24. hor. ſpatio 86400″, Ulyſſiponi conficiebat tantùm 86400″ − 133″, hoc eſt, 86267″. Sed eſt longitudo penduli Pariſiis ad minuta ſecunda oſcillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quarè ſi longitudo penduli ad minuta ſecunda Ulyſſipone oſcillantis dicatur L, erit (cor. 4. prop. 24. lib. 2.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} : L$, ſeù $67184640000 : 29507491312885 = 3965 : L$ ac proindè $L = \frac{29507491312885}{67184640000} = 439\frac{13434352885}{67184640000} = 439\frac{5}{6}$ lin. circiter. Eſt autem longitudo penduli Pariſiis ad minuta ſecunda oſcillantis lin. $\frac{3965}{9}$ ſeu 440.555, vel $440\frac{1}{2}$, quarè differentia pendulorum Pariſiis & Ulyſſipone ad minuta ſecunda oſcillantium debet eſſe $440\frac{1}{2} - 439\frac{5}{6} = 1\frac{1}{3}$. Rectius itaque poſuiſſet D. Couplet differentiam eſſe $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet differentiam pendulorum Pariſiis & Paraibæ eſſe $2\frac{5}{9}$. 96.

rè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Pariſiorum*, ſed (k) errante obſervatione. Nam deinde ad inſulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli iſochroni eſſe pedum tantum trium Pariſienſium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* eſt 6gr. 38′ ad auſtrum, & ea *Porto-beli* 9gr. 33′ ad boream, & latitudines inſularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Chriſtophori*, & *Sancti Dominici* ſunt reſpectivè 4gr. 55′, 14gr. 40′, 14gr. 00′, 14gr. 44′, 12gr. 6′, 17gr. 19, & 19gr. 48 ad boream. Et exceſſus longitudinis penduli Pariſienſis ſupra longitudines pendulorum iſochronorum in his latitudinibus obſervatas ſunt paulò majores quam pro tabulâ longitudinum penduli ſuperius computatâ. Et propterea (l) terra aliquanto altior eſt ſub æquatore quam pro ſuperiore calculo, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem. niſi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Ob-

96 (k) * *Sed errante obſervatione.* Latitudo Portobeli eſt 9°. 33′ ad boream, & latitudo Martinicæ eſt 14°. 44′. Hinc differentia latitudinum eſt 5°. 11′. Eſt autem latitudo Lutetiæ 48°. 50′, quarè differentia latitudinum Lutetiæ & Portobeli eſt 39°. 17′ Sed præterquam quod obſervationes Feuillæi à tabulâ Newtonianâ maximè diſcrepant, ſecum invicem non ſatis conſentire videntur Cum enim differentia latitudinum 39°. 17′, ex iiſdem obſervationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Portobeli quam Pariſiis tribus fere lineis, differentia latitudinum Martinicæ & Portobeli quæ eſt 5°. 11′ majorem in hiſce latitudinibus præbere debuiſſet penduli differentiam quam $\frac{3}{12}$ lin. qualem invenit Feuillæus. Hunc cæteroquin diligentiſſimum obſervatorem non ſatis hâc in re accuratum fuiſſe confirmant obſervationes an. 1735. Portobeli habitæ à Clariſſ. Viris DD Godin & Bouguer, quorum prior penduli longitudinem Portobeli invenit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{89}$, poſterior verò eandem longitudinem ſummo conſenſu determinavit 36. poll. 7 lin. $\frac{7}{99}$.

(l) 97. *Terra aliquantò altior eſt.* Materia ad centrum redundans quá denſitas ibi major ſit, ſeorſum à reliquá tellure uniformiter denſá ſpectetur, gravitas in terram uniformiter denſam erit reciprocè ut diſtantia à centro (ex demonſtratis in prop. 19.). Gravitas autem in materiam redundantem erit reciprocè ut quadratum diſtantiæ à materiâ illá quam proximè (prop. 76 lib. I.) cum igitur in caſu terræ uniformiter denſæ, illius ſuperficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitaſque ad æquatorem minor ſit quam ad polum in ratione diſtantiæ poli à centro ad æquatoris ſemidiametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circà centrum gravitas ad æquatorem minor ſit quam ad polum in ratione duplicatâ diſtantiæ poli à centro ad æquatoris ſemidiametrum, quæ ratio priori ratione ſimplici minor eſt, patet in caſu telluris versùs centrum denſioris ex utrâque ſimul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus compoſita minor ſit gravitate ad polum in ratione minore quam eſt ratio diſtantiæ poli à

centro

Obſervavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. *De la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi ſoli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc verò major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori ſolis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt diverſo calori attribui non poteſt Sed neque erroribus aſtronomorum è *Galliâ* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfectè congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint.

centro ad æquatoris ſemidiametrum, & ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore reſpectu gravitatis ad polos, tellus magis ad æquatorem elevabitur quam pro ſuperiori calculo, ac proinde longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis eſt (cor. 4. prop. 24. lib. 2.) paulò major eſſe debet quam pro tabulâ longitudinum computatâ in caſu terræ uniformiter denſæ.

(m) 9. * *Deindè D. Delahire.* Hiſce obſervationibus adjungi debent inſtituta à Clariſſ. Viro D. De Mairan experimenta quæ in monum. Pariſ. an. 1735. leguntur. Ut caloris Solaris vim exploraret, laminas ferri & cupri à loco clauſo ac temperato vel etiam frigeſcente, ad locum Solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurium horarum ſpatio relinquebat. Deinde laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, menſurato priùs caloris Solaris incremento ope thermometri Reaumuriani. 98. Obſervavit ob majorem Solis calorem reſpectu loci clauſi in quo anteà ſuſpenſum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorem perveniſſe & ferri laminam 3. ped. $8\frac{1}{2}$ lin longam dilatari invenit $\frac{1}{30}$ vel $\frac{1}{22}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quam ferrum à radiis Solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoque tentavit in aquâ ebulliente; immerſit nempe in eâ cuprum flavi coloris & ferrum, eandem plane in utroque metallo dilatationem fieri obſervavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8. lin. $\frac{1}{2}$ longa, menſe Julio, aſcendente thermometro ad altitudinem 22. grad. ſuprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{3}$ lin. circiter.

DE MUNDI SYSTEMATE.

poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub æquatore quam in obſervatorio regio Pariſienſi, exiſtente differentiâ non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{2}{3}$. Per obſervationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eâdem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, (n) partim à diſſimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim à diverſis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior eſt quam tempore æſtivo, ſextâ parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante à *Richero* obſervatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem obſervationes in *Cayennâ* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit, & longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, (o) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſupra per theoriam prodiit.

98. (n) * *Partim à diſſimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta ſunt in hâc propoſitione, ſupponunt homogeneam eſſe telluris materiam; ſi verò homogenea non ſit ubique, ſed aliqua ſit in partibus internis terræ diſſimilitudo patet (96) hinc quaſdam oriri poſſe in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob cauſam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ naſci poterunt, pro exceſſu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Obſervationum diſcrepantiam repeti etiam poſſe à diverſis aëris caloribus manifeſtum eſt ex obſervationibus Picarti, La Hirii & ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus obſervationibus fidendum eſt, longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine penduli ſynchroni Pariſienſis exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ, ideóque longitudo penduli ſub æquatore erit 3. ped. 7. $\frac{4217}{9000}$ lin. ſeu 3. ped. 7. 468. lin. proximè, eſt enim longitudo pen-

penduli Pariſ. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. ſed eſt incrementum ponderis ſivè incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, ac proinde $\frac{1087}{1000}$ ſeu 1 lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis ſub polo ut 11334 ad 10000. Quarè incrementum illud eſt $1\frac{10406}{11334}$, ſeu $1\frac{919}{1000}$ proximè. Erunt ergò pondera ſeu pendulorum longitudines ſub æquatore & ſub polo reſpectivè 3. ped. 7.468 lin. & 3. ped. 9.387 lin. hoc eſt proximè ut in tabulâ Newtonianâ. Sed pondera ſunt reciprocè ut diſtantiæ à centro (ex demonſtratis in Prop. 19.) ideóque 439468 eſt ad 441387 ut diameter versùs polos eſt ad diametrum ſecundum æquatorem, ſivè ut 229 ad 230 proximè, ideóque poſitâ ſemidiametro terræ (ut in Prop. præced.). patet (per notas in eandem Prop.) terram altiorem eſſe ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptemdecim circiter.

99. Clariſſ. D. Campbell Londini in latitudine $51^{\circ}\frac{1}{2}$ & in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratiſſimis obſervationibus inſtitutis, invenit longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecundæ Londini oſcillantis eſſe 39.129. poll. angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quam Londini deprehendit, exiſtente differentiâ 1′ 58″ ſpatio 24. hor Ex his obſervationibus, eodem quo hactenus uſi ſumus computo determinavit longitudinem penduli ſub æquatore eſſe ad longitudinem penduli ſub polis ut 39000 ad 39206, unde prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 ſivè ut 190 ad 189 ferè; ideóque poſitâ ſemidiametro terræ ut in prop. præced. terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium 41 circiter. Doctiſſimi Viri DD. Godin, Bouguer, De la Condamine ſummâ diligentiâ in latitudine 18° 27′ obſervationes habuerunt quæ cum obſervationibus D. Campbell probè congruunt. In id quoque conſpirant obſervationes versùs polum inſtitutæ à Celeberrimo D. De Maupertuis Clariſſimiſque Sociis ut terram versùs æquatorem magis elatam conſtituant quam pro theoriâ Newtoni. Idem confirmat accurata graduum terreſtrium menſura. Longitudo gradus meridiani qui circulum polarem ſecat à D. De Maupertuis inventa eſt 57437,9 hexaped. & longitudinem gradûs in galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter aſſumi poſſe oſtendimus. Hinc gradûs utriuſque differentia eſt 337 hexaped. aut ad minimum 300. hex. ſed ex tabulâ Newtonianâ differentia inter 45 gr. & 65. eſt 99.
240. hexapedarum, creſcunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quam juxtà tabulam Newtonianam ac proinde non ſolum terra eſt elata ſub æquatore (94), ſed etiam diametrorum differentia ex obſervationibus major quam ex ipſâ theoriâ colligitur. Conſulatur obſervationum ſeries quam tranſactionibus Anglicanis an. 1734. inſeruit Autor verſionis gallicæ.

100. Scholium. Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum Doctiſſimis & in obſervando verſatiſſimis PP. Boſcovik & Maire S. J. Mathematicis. Uſi ſumus methodo illâ accuratiſſimâ quam ſagaciſſimus naturæ indagator ſummuſque Geometra D. De Mairan tradit in Monum. Acad. Reg. Pariſ. ad an. 1735., ubi experimenta recenſet quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium oſcillatorium à Celeber. Graham Londini conſtructum, nobiſque ab Illuſtriſſimo D. Leprotti humaniſſimè commodatum, quod per appulſum fixæ ad teleſcopium immotum ſingulis obſervationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ conſtituimus plana duo horizontalia, è quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter ſe congruentibus compreſſum cochlearum ope, alterum ità ſenſim elevabatur per cochleas ut horizontalem ſitum ſervaret, & globum è filo ſuſpenſum inferius contingeret. Diſtantiam puncti ſuſpenſionis à puncto illo infimo globi, quo planum horizontale ſubjectum contingebat, inveſtigabamus ope menſuræ Londinenſis bipedalis accuratiſſimæ, quam cum pluribus aliis conſentientem P. Abbas Revillas Clariſſ. Vir, publicus Profeſſ. Math. & Acad. Londin. Socius exhibuit nobis. Huic menſuræ inſerta eſt altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum ſuſ-

De Mundi Syſtemate.

ſuſpenſionis & punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maximè que cavebamus ne in hâc menſurâ error aliqualis irreperet.
100. Plura idcirco neglexim experimenta in quibus filum extendebatur obſervationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo ſerico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre reſiſtentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutiſſima viſa ſunt deſcribemus, facta ſunt cum globo cupreo cujus quælibet ſemidiameter inventa eſt partium digiti Londinenſis milleſimarum 603, pondus verò unciarum $4\frac{3}{8}$ ſeu granorum 2520. Illum ſuſpendebamus è filo ex foliis aloës parato quod gallice dicitur: *fil de pite*, hujuſmodi filum $21\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, & propterea pondus fili 44 digit erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejuſdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. De Mairan loco citato demonſtravit, ſi diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro globi ſit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine obſervatâ ſeu interceptâ inter punctum ſuſpenſionis & punctum infimum globi ſubtrahenda erit longitudo 0,6023 digit. ut habeatur vera longitudo penduli ſimplicis pendulo obſervationis iſochroni. Si verò diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro globi ſit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13ª. Julii manè.

Longitudo obſervata	45.145 dig. Lond.
Longit. ſubtrahenda.	0.6023
Longitudo vera	44.5427.

Numeravimus oſcillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oſcillatorium 3479 abſolvit, hoc eſt, intervallo 3480.69 ſecundorum temporis medii. Horologium enim tardius movebatur quam pro medio motu Solis & differentia erat 42 ſecundorum pro horis 24. eſt igitur 3480.69^2 ad 3261^2 ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ eſt longitudo penduli ſimplicis ad ſingula minuta temporis medii oſcillantis.

2. Experimentum eâdem die veſpere. Longitudo obſervata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oſcillationum globi 3387. tempore medio 3616.75. ſecund. undè habetur longitudo penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis 39.0941 digit. Lond.

3. Experimentum 14ª. Julii. Longitudo obſervata 36.26. longitudo vera 35.6596 digit. Lond. numerus oſcillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 ſecund. longitudo penduli quæſita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16ª. Julii. Longitudo obſervata 36 97. longitudo vera 36.3696. numerus oſcillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 ſecund. longitudo penduli quæſita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19ª. Julii. Longitudo obſervata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oſcillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. ſecund. penduli quæſita 39.096485.

6. Experimentum 5ª. Auguſti. Longitudo obſervata 45. 427. longitudo vera 44.8247 digit Lond. numerus oſcillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 ſecund. longitudo quæſita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. verum ſi rejiciatur ſecundum experimentum quod ab aliis quinque inter ſe probè conſentientibus nimis differt; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum ſecundum rejici debere inde etiam concludimus quod ſextum maximè accuratum nobis viſum ſit, nam omninò invariata fuit fili longitudo toto obſervationis tempore & omnes concurſus diligentiſſimè notati inter ſe congruebant.

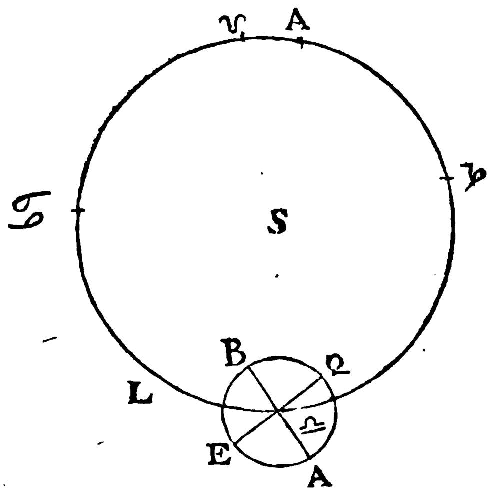
Pes Londinenſis vulgò ſupponitur eſſe ad ped. Pariſ. ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cum primum uſi eſſemus, longe minorem, quam par eſt, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò ſubtili ſatis accurata non eſt. Nam D. Godin. monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735 pag. 508, ſcribit ſe cum D. Bouguer obſervaſſe pedem Lond. ſe habere ad ped. Pariſ. ut $1351\frac{1}{3}$ ad 1440. ſi hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Pariſ. 8. lin. $\frac{28}{100}$. Tandem ſi ratio illa ſit numeri 1351 ad 1440 ut quibuſdam Mathematicis menſurarum peritiſſimis videtur, major prodit penduli longitudo nimirum ped. Pariſ. 3. lin. 8. 3888.

Hæc

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(p) *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis* (q) *inclinari in eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.*

Patet per corol. 20 prop. LXVI. lib. I. Motus tamen iſte nutandi

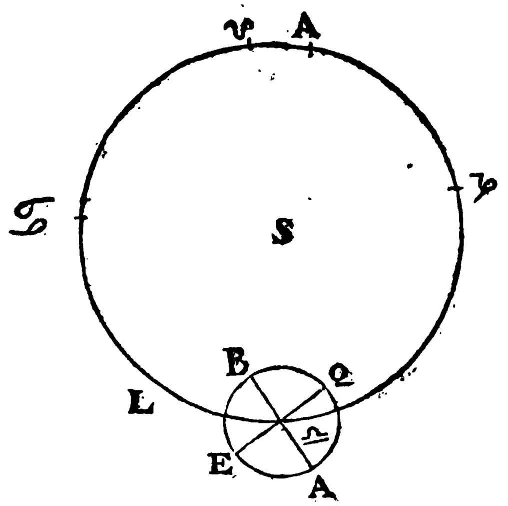


Hæc ſunt quæ ad telluris figuram ſpectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. & 1741. duplici Diſſertatione edidit P. Boſcowick S. J. inſignis matheſeos Profeſſor: maxime autem exoptandum ut ad hujuſce quæſtionis totiuſque matheſeos utilitatem ſalvi & incolumes redeant Clariſſ. Academici qui ad definiendam telluris figuram nobili ardore loboriosum iter verſus æquatorem ſuſceperunt. Simul enim collatis versùs polum & versùs æquatorem inſtitutis obſervationibus, à Doctiſſimis Viris pro bono Scientiarum in unum conſpirantibus certiſſima de telluris magnitudine & figurâ, gravitatis decremento, aliiſque ad Aſtronomiam, Geographiam & Phyſicam maxime momentoſis ſperanda ſunt.

(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si terra nullo alio motu præter motum progreſſivum in ſuâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur, axem ſuum ſibi ſemper parallelum retineret (cor. 22. prop. *66.* lib. 1.) ſed ob telluris figuram verſus polos depreſſam & versùs æquatorem oblongatam fit ut axis ſitus perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam telluris circà ſolem S, ſitque A E B Q, ipſa tellus cujus poli A & B æquator E Q. Quoniam (ex prop. præc.) terra eſt ſphærois ad polos A & B, depreſſa & versùs æquatorem E Q, elata, inſtar globi annulo inhærentis ſpectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quarè (per cor. 20. prop. *66.*) annuli hujus nodi regredientur, hoc eſt, tellus digreſſa à librâ ♎, ubi communis ſectio Eclipticæ & æquatoris versùs Solem S, dirigitur, & per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum *A* priùs pertinget quam ad ♈ pervenerit, & tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum *L* attinget quam ♎ ubi in priori revolutione erat nodus, id eſt, æquatoris planum productum, per ſolem priùs tranſibit 101.
quam telluris centrum ad ♎ pervenerit, ſed tunc contingit æquinoctium dum nempè ſol in plano æquatoris terreſtris verſatur (4) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus ſol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, ſtellis fixis quieſcentibus, puncta æquinoctialia omniaque Eclipticæ puncta quæ à punctis æquinoctialibus numerantur regredi ſeu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regreſſus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, ſed & Lunæ etiam non leves vires eſſe poſſunt; cum enim Luna in Eclipticæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis ſcilicet & Lunæ oriundus.

(q) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In ſemirevolutione telluris circà ſolem à

nutandi perexiguus eſſe debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis.



102. ♎ per ♑ ad ♈, actio ſolis inclinationem æquatoris in eclipticam minuere conatur cum illa actio eam inclinationem augere conetur à ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ & ♑ poſtea minuitur ex Solis actione oriunda (cor. 16. & 18. prop. 66. lib. 1.) fitque inclinatio illa minima, cum terra eſt inter ♑ & ♈, cum verò tellus inter ♈ & ♋ pervenit, rurſus reſtituitur præcedens inclinatio (ibid.) ſicque deinceps ſimulque cum æquatore telluris axis oſcillatur. Axis igitur terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam & bis redit ad poſitionem priorem: Hæc omnia facilè intelliget qui in mentem revocaverit prop. 66. lib. 1. ultimaque ejuſdem corollaria.

103. In ſingulis octantibus inter æquinoctia & ſolſtitia ſequentia, inclinatio axis terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem pluriumque annorum decurſu ſenſibilior non evadit, at regreſſus punctorum Eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad priſtinum locum redeunt puncta æquinoctialia, niſi poſt integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni ſpatio inſenſibilis eſt, poſt plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cum ſtellæ fixæ quieſcant & retrocedat communis ſectio æquatoris & Eclipticæ, neceſſe eſt ut mutabilis ſit fixarum à punctis æquinoctialibus diſtantia & ſtellæ ab iiſdem punctis verſus orientem quotidie progredi videantur, undè ipſarum longitudines quæ in eclipticâ ab initio arietis ſive interſectione vernali eclipticæ & æquatoris computari ſolent, continuò creſcunt & fixæ omnes videntur moveri in conſequentia ſignorum. Hinc fit quod conſtellationes omnes antiquam ſedem mutaverint. Sic conſtellatio arietis quæ tempore Hipparchi prope interſectionem vernalem Eclipticæ & æquatoris viſa fuit, nunc ab eâdem digreſſa in ſigno Tauri moratur, ſicut & Tauri conſtellatio in geminorum locum tranſivit geminique in cancrum promoti ſunt ità ut unaquæque conſtellatio è ſuo in proximum locum ſucceſſerit. * Cum autem hìc, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipſum nodorum, nec ad Excentricitatem orbitarum quas terra aut Luna deſcribunt nec ad Apſidum motus, nec ad irregularitatem molis terræ attenderimus nec denique ad aliorum Planetarum actiones, quædam etiam Eclipticæ inclinationi mutatio afferri poteſt, quæ forte perſeverabit ſatis ut ſenſibilis evadat, inclinationis angulum 1' centum annis decreſcere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Caſſinus in Aſtronomiæ Elementis, ex variâ Aſtronomorum æſtimatione inclinationis Eclipticæ retulit. Sed de iis plura in poſterum erunt dicenda.

PRO

LIBER TERTIUS. PROP. XXII. THEOR. XVIII.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa ſolem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem ſolis perturbabuntur eorum motus multimodè, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in lunâ noſtrâ notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideò propius accedit ad terram, in ſyzygiis quam in quadraturis, niſi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde luna in perigæo velocior eſt & nobis propior, in apogæo autem tardior, & remotior in ſyzygiis quam in quadraturis. Progreditur inſuper apogæum, & regrediuntur nodi, ſed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in ſyzygiis ſuis, tardius regreditur in quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quieſcunt in ſyzygiis ſuis & velociſſimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis (per corol. 10. prop LXVI.) quam in ſyzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipſius aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam à (a) prioribus aſtronomis non obſervatæ

(a) * *A prioribus Aſtronomis non obſervatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per tranſennam enumerat Newtonus, æquationeſque omnes ſeu correctiones deinceps 10

De Mundi Systemate.

ſervatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis ſolaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per corol. 1, & 2. lem. x. & corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ſed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales ſatellitum jovis & ſaturni à motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum jovis circa ſolem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ideoque (b) annis centum conficit nodus iſte 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus au-

104. commodius explicabuntur, & quomodò variatio Lunæ ad proſtaphæreſim in calculo Aſtronomico referri ſoleat exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo menſis quadrante, ſive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in ſecundo acceleretur dum tendit à quadraturâ ad oppoſitionem, in tertio retardetur rurſus & in quarto iterum acceleretur.

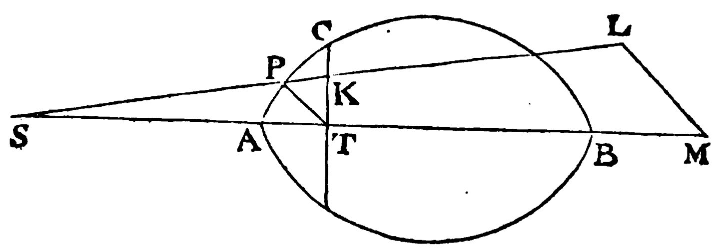
(b) * *Ideóque annis centum.* Tempus periodicum terræ circà ſolem eſt dierum 365.2565; tempus periodicum jovis circà ſolem eſt dierum 4332.514 (per phæn. 4.) tempus periodicum ſatellitis circà jovem eſt

autem augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob (c) cauſam quam hic exponere non vacat.

eſt dierum 16.6880 (per phæn. 2.) & tempus periodicum Lunæ circà terram dierum 27.321. (prop. 17.). Sumptiſque Logarithmis, erit

L. $(365.2565)^2$	=	5.1251956
L. 16.6880	=	1.2224043
utriuſque ſumma	=	6.3475999
Deindè L. $(4332.514)^2$	=	7.2734600
L. 27.321	=	1.4364966
utriuſque ſumma	=	8.7099566
Ab hâc ultimâ ſubtrahatur ſumma ſuperior - -		6 3475999
reſiduum erit L.		2.3623567

Cui reſpondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo & Analogiâ Newtoni patet motum nodorum ſatellitis extimi jovis eſſe partem circiter 230^{am}. motûs nodorum Lunæ, ſed eſt motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′ 21″, ut dicetur poſtea. Hiſce ſi multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum ſatellitis intervallo annorum centum 8°. 24′ Ab hujus ſæculi initio nullum in nodis ſatellitum jovialium ſenſibilem motum fuiſſe obſervatum teſtatur Clariſſ. Caſſinus in elem. Aſtr.



(c) 105. *Ob cauſam quam hic exponere non vacat.* Referat S Solem, ſitque P ſatelles, putà Luna revolvens circà Planetam primarium T ſcilicet terram, in ellipſeos umbilico poſitum; erit B apſis ſumma, A apſis ima, eritque T B, diſtantia maxima & A T diſtantia minima. Jam verò quò minor eſt diſtantia A T, reſpectu diſtantiæ T B, eò celerius apſides progrediuntur, (per not in cor. 8. prop. 66. lib 1). Ea eſt correctionis cauſa quam Autor noſter non exponit. Cum enim ſatellites Jovis & Saturni circà ſuos Planetas primarios deſcribant circulos ferè concentricos (phæn. 1. & 2.) Luna verò circà terram in orbitâ ellipticâ revolvatur, & major ſit motus nodorum in orbita elliptica quam in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuſcumque ſatellitis per Analogiam ex motu Augis Lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quam 1 ad 2, calculo non abſimili illi qui 31^{a}. prop. inſtituetur.

vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. (e) Variatio ſatellitis è jove ſpectati, eſt ad variationem lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideóque in ſatellite extimo non ſuperat $5''. 12'''$.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet (f) per corol. 19. & 20. prop.

105. (d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in ſingulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorum correctiones ſeu æquationes maximæ ſunt ut ſatellitum tempora periodica reſpectivè (per cor. 16. prop. 66. lib. 1.). Sed tempora periodica ſunt ut motus ipſi angulares reſpectivè (ibid.). Quarè in eâdem quoque ratione ſunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio Satellitis è jove ſpectati*, hoc eſt, motus angularis ſatellitis eſt ad motum angularem Lunæ ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad Solem revolvuntur, ſivè clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum ſatellitis (per cor. 16. prop. 66. lib. 1. not. in idem coroll.). Jam verò motus nodorum Lunæ annuus eſt 69681″, ut poſteà ſtatuitur à Newtono, nodus autem ſatellitis extimi jovialis annis centum conficit 8°. 24′ ideóque motus ejuſdem annuus eſt $302\frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ eſt dierum 27 321 & ſatellitis extimi dierum 16.688. Sumptis Logarithmis erit

L.	69.681	= 4.8431144
L. dierum	27.321	= 1.4364966
utriuſque Log. ſumma		= 6.2796110
Deindè L.	$302\frac{2}{5}$	= 2.4805818
Lòg. dier.	16.688	= 1.2224043
utriuſque ſumma		= 3.7029861

Hæc ſubtrahatur à ſummâ ſuperiori 6.2796110 remanet Log. 2.5766249, cui reſpondet numerus 378. ferè. Quare ex Analogiâ Newtoni & calculo colligitur variationem ſatellitis eſſe partem 378^{am}. variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat Newtonus 33′ 14″ ſivè 1994″. Quarè pars 378^{a}. eſt 5″ 15‴ ut Newtonus invenit, quamproximè.

(f) * *Per Cor. 19. & 20.* Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ excavato contineatur, ſimulque cum Planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzigiis ſuis, hoc eſt, in meridie & mediâ nocte velo-

prop. LXVI. lib. I. ut (g) & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit, niſi ubi motus ab Oceano profundo per loca vadoſa propagatus uſque ad horam quintam ſextam ſeptimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam ſupra, & per horas diei lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis ſolis vel lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquamdiu & per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit, id quod fiet ſpatio horæ unius duarumve ſed ſæpius ad littora ſpatio horarum trium circiter, vel etiam plurium ſi mare ſit vadoſum.

Liber Tertius. Prop. XXIV. Theor. XIX.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernen-

velociores erunt; in quadraturis ſive horâ ſextâ matutinâ, & veſpertinâ tardiores quam ſuperficies globi contigua, quare fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (per cor. 19. & 20.) idem poſteà iterum demonſtrabitur vireſque Solis & Lunæ ſeorſim computabuntur.

(g) * *Aqua maximam altitudinem.* Rem ità ſe habere patet ex obſervatis æſtibus marinis, ratio autem hæc eſt. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum & poſteà decreſcit, attamen hujus vis effectus nondum eſt maximus. Omnis enim motus ſemel impreſſus perſeverat uniformiter, donec motu contrario deſtruatur vel ſaltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per ſex circiter horas antemeridianas auctus & cum motu diurno conſpirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat & aquas magis magiſque attollet, uſquè dum eadem vis 105.
motui diurno contraria fluidi curſum paulatim ſiſtat & aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maxime circà octantes ſive horam tertiam notabilis eſt. Alia non deſunt exempla maximorum effectuum qui poſt cauſas maximas contingunt. Non in ipſis ſolſtitiis æſtivis maxime fervet æſtas, ſicut neque in ipſis ſolſtitiis Hybernis maxime friget hiems; ſed integro circiter menſe poſt ſolſtitia maximus deprehenditur æſtatis Hyemiſque effectus. Indubitatâ quoque conſtat experientiâ ſummum calorem ſecundâ aut tertiâ poſt meridiem horâ fieri.

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi ſollicitatum in lineis duabus progredi nequit, ſed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo deſcribit ac ſi unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur

(41,

DE MUNDI SYSTEMATE.

cernentur diſtinctè, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur ([i]) fluxus & refluxus maximus. In quadraturis ſol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teſte, major eſt effectus lunæ quam ſolis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra ſyzygias & quadraturas, æſtus maximus qui ſolâ vi lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam lunarem, & ſolâ ſolari in tertiam ſolarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius eſt; ideóque in tranſitu lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes lunæ, & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem in tranſitu lunæ à quadraturis ad ſyzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum diſtantiis à terrâ. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in ([k]) triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur ſol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis ([l]) paulò majores ſint, & in quadraturis paulò minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & luna in perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam antè vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. ([m]) Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuò non ſequantur. Pen-

165. (41. lib. 1.) ità motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur diſtinctè ſed motum quemdam mixtum efficient.

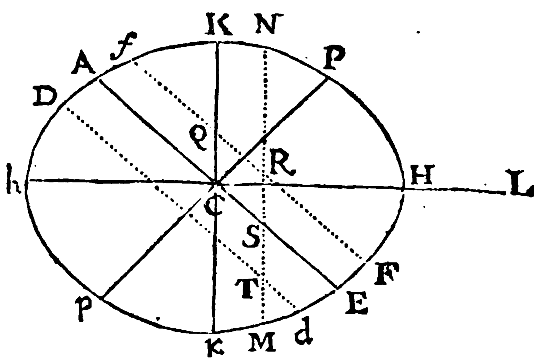
(i) * *Fluxus & refluxus maximus*, utpotè è virium ſummâ tum temporis oriundus.

(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (cor. 14. prop. 66. lib. 1.).

(l) * *Paulò majores ſint*, ob majorem virium ſummam & in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quam tempore æſtivo.

(m) * *Undè fit ut æſtus*. Si enim Luna in ſyzigiarum altera ſit circà perigæum, æſtumque maximum conjunctis cum ſole viribus tunc temporis excitet, neceſſe eſt ut in alterâ ſyzygia verſetur circà apogæum minoreſque vires obtineat.

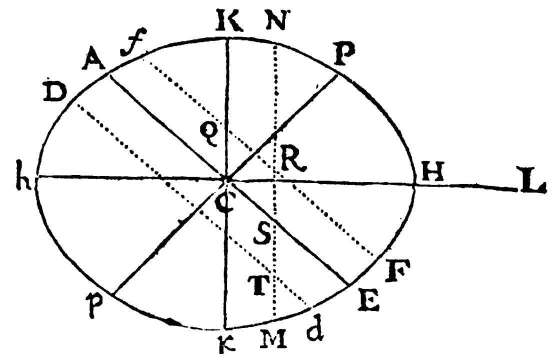
Pendet etiam effectus utriuſque luminaris ex ipſius declinatione ſeu diſtantiâ ab æquatore. Nam ſi luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, ſine actionis intenſione & remiſſione ideóque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maximè ſuperat effectum ſolis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam ſolis à terrâ, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.



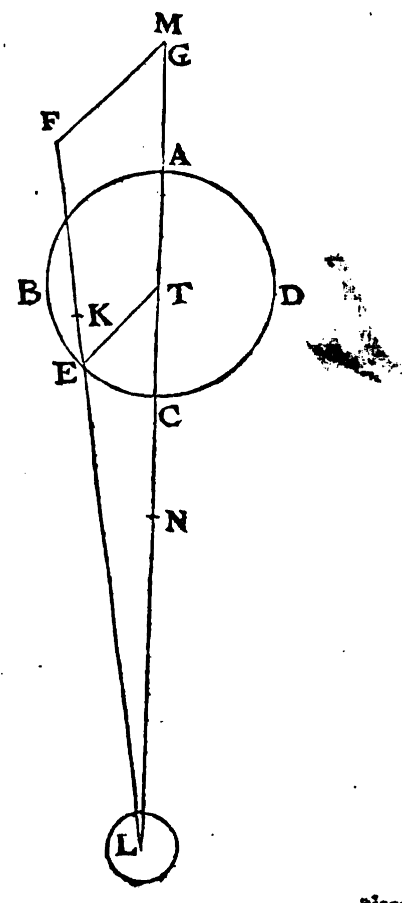
Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Deſignet [illegible] $E\,P$ tellurem aquis profundis undique coopertam; C centrum ejus; P, p polos; $A\,E$ æquatorem; F locum quemvis extra æquatorem; $F\,f$ parallelum loci; $D\,d$ parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; L locum quem luna tribus ante horis occupabat; H locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; h locum huic oppoſitum; K, k loca inde gradibus 90 diſtantia, $C\,H$, $C\,h$ maris altitudines maximas menſuratas à centro telluris; & $C\,K$, $C\,k$ altitudines minimas: & ſi axibus $H\,h$, $K\,k$ deſcribatur ellipſis, deinde ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem $H\,h$ deſcribatur ſphærois $H\,P\,K\,h\,p\,k$; deſignabit hæc figuram ma-

De Mundi Syſtemate.

ris (n) quam proximè, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfatâ ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo maris in locis omni-



106. (n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T deſcriptus tellurem referat, circulus autem centro L, deſcriptus exhibeat Lunam. Si nullâ eſſet in tellurem actio, tellus profundis aquis undiquè cooperta & quieſcens (per hyp.) in ſphæram ſeſe componeret. At ſingulæ telluris partes gravitant in Lunam eſtque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro reciprocè. Jam verò recta LT, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T poſiti versùs Lunam, ſitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ LE productâ ſumatur LK æqualis LT, ſitque LF ad LK in duplicatâ ratione LK ad LE, recta LF exponet gravitatem corporis in loco E verſus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut FG & GL (prop. 66. lib. 1.). Si autem à vi illâ quâ corpus in E, locatum urgetur quæ eſt ut GL, auferatur vis ut TL quâ centrum telluris urgetur verſus Lunam relinquentur vires ut FG, GT, quibus corpus E ſollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit verſus centrum terræ & vim ipſi communem cum centro ipſius terræ. Jam ſit C punctum telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppoſitum, ſintque B & D puncta circumpoſita, ſivè potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna verſatur, liquet punctum G à T maximè diſtare, ubi punctum E eſt aut in C, aut in A; in priori caſu G, tranſeat in M, in poſteriori in N; dum verò punctum E verſatur in circulo BD, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in



circulo

bus R, S, T, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuſvis F, affluxus erit maximus in F, horâ tertiâ poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in Q horâ tertiâ poſt occaſum lunæ; dein affluxus maximus in f horâ tertiâ poſt appulſum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in Q horâ tertiâ poſt ortum lunæ; & affluxus poſterior in f erit minor quam affluxus prior in F. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos, unum hemiſphærio KHk ad boream vergentem, alterum in hemiſphærio oppoſito Khk; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet.

circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atque vim F G; ipſa verò F G, fit B T aut D T, coeuntibus punctis F & K; quare fluidi particulæ in locis B & D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam verſus centrum T vi ex Lunâ procedente; Particulæ in loco C, verſus Lunam magis attrahuntur quam terra integra quæ in centro T, locata fingi poteſt, particulæ autem in loco A, verſus Lunam minus attrahuntur quam terra integra in T, ideóque eodem modo afficiuntur ac ſi ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant verſus T; in locis inter A, vel C, & B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores ſunt fluidi terreſtris partes punctis C & A, eò minùs graves ſunt, nam actio Lunæ ſivè vis ut G T, vim propriæ gravitatis verſus T, minuit, & quo propiores ſunt punctis B & D, eò graviores fiunt, eadem enim actio Lunaris ſivè vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido ſatis profundo undiquè coopertus ponitur fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ & cedendo facilè moventur inter ſe, fluidum illud verſus A & C poſitum à fluido verſus B & D, poſito expelletur, levius ſcilicet à graviore, attolletur ergò fluidum verſus A & C, deprimeturque verſus B & D, donec ſcilicet major fluidi moles & altitudo majorem gravitatem compenſet, & ubique conſtituatur æquilibrium. Quapropter ſuperficies maris ſeſe componet in figuram ſphæroidem cujus axis eſt recta A C, quæ producta per Lunam tranſibit. Hinc patet figuram maris in ſphæroidem oblongam formari debere.

107. Simili argumento patet conſideratâ Solis actione fluidum terreſtre componi in ſphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem tranſit. Si enim (in figur. præc.) globus L non Lunam ſed Solem deſignet, cætera ſe habent ut ſuprà. At in hoc caſu minor erit quam in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis gravitet verſus Lunam quam telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, indè provenit quod terræ centrum magis quam fluidum verſus Lunam gravitet; quare, ſi hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in terram major ſit quam actio Lunæ in eamdem, telluris enim ſemidiameter T C vel T A ferè evaneſcit reſpectu immenſæ Solis à terrâ diſtantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas verſus ſolem erit inſenſibiliter major gravitate telluris verſus eundem, & fluidi in A poſiti gravitas verſus ſolem erit inſenſibiliter minor gravitate telluris verſus eundem, quare figura ſphæroidea indè genita parum intumeſcet ad vertices C & A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immenſas Solis licet remotiſſimi vires, aliquis erit actionis Solaris effectus. 107.

De Mundi Systemate.

licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, & lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in (o) tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multò magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint (p) quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro

107. (o) * *In tempora ſolſtitiorum.* Tunc enim in ſyzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atque fluxuum differentia adhuc augebitur, ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis; nam præter declinationem Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in Boream aut auſtrum magis declinat. Hinc fit fluctus Borealis nobis viciniſſimus & fluctus auſtralis remotiſſimus in eâdem revolutione diurnâ.

(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In opuſculo de mundi ſyſtemate quædam occur-

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ob oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſivè advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales à diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquillè ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

occurrunt obſervationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exſcribemus. Fieri etiam poteſt, inquit Autor, ut æſtus omnium maximus ſit quartus vel quintus à ſyzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in tranſitu per loca vadoſa ad littora. Sic enim æſtus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ Lunari, & poſt horam unam & alteram ad portus in littore auſtrali ejuſdem inſulæ ut & ad inſulas Caſſiterides vulgò Sorling dictas. Dein ſucceſſive ad Falmuthum, Plimuthum Portlandiam inſulam Vectam, Winchelſeiam, Doveriam, oſtium Tameſis & Pontem Londinenſem, conſumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipſius alveis haud ſatis profundis impeditur æſtuum propagatio, incidit enim æſtus ad inſulas fortunatas & ad Occidentalia marique atlantico expoſita littora Hiberniæ, Galliæ, Hiſpaniæ & Africæ totius uſque ad caput bonæ ſpei in horam tertiam Lunarem, præterquam in locis nonnullis vadoſis ubi æſtus impeditus tardiùs advenit inque freto Gaditano quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æſtuat; pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æſtus primò ad Braſiliæ littora maximè Orientalia circà horam Lunarem quartam vel quintam; deindè ad oſtium fluvii Amazonum horâ ſextâ, ad inſulas verò adjacentes horâ quartâ, poſteà ad inſulas Bermudas horâ ſeptimâ & ad Floridæ portum S. Auguſtini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æſtus per Oceanum quam pro ratione motûs Lunæ; & perneceſſaria eſt hæcce retardatio ut mare eodem tempore deſcendat inter Braſiliam & novam Franciam, aſcendatque ad inſulas fortunatas & littora Europæ & Africæ & viceverſâ. Namque mare aſcendere nequit in uno loco quin ſimul deſcendat in altero. Lege jam deſcriptâ agitari quoque mare pacificum veriſimile eſt. Namque æſtus altiſſimi in littore Chilienſi & Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam Lunarem, ſed quâ velocitate propagantur inde ad littus Orientale Japoniæ & ad inſulas Philippinas cæteraſque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108.

108. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum curſu. Nam curſus ille facit aquam tardiùs influere ex mari & in mare citius & velocius re-

DE MUNDI SYSTEMATE.

bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* ſub latitudine boreali 20 gr. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein lunâ ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimam vel octavam, dein

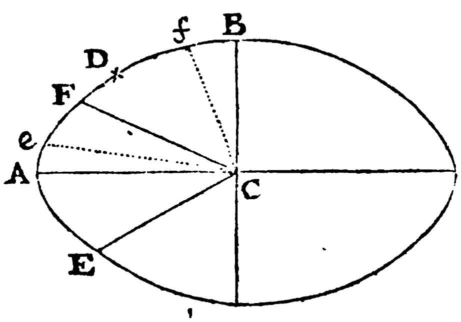
109. fluere atquè adeò diutius refluere quam influere, præſertim ſi longè in flumen aſcenditur ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio Avonæ ad tertium lapidem infrà Briſtoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere ſuprà Briſtoliam ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxús. Nam prope Luminarium ſyzigias, vehementior maris motus facilius ſuperando reſiſtentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam: intereà verò dum Luna ad ſyzigias properat, neceſſe eſt ut flumina ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos magis impleantuur & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt ſyzigias quam proximè antè. Eâ de cauſâ æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzigias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam antè ſyzigias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque & æſtuum retardatio & major erit & ſyzigias magis præcedet. Quæ omnia ità ſe habere colligo ex tabulis æſtuum quas Flamſteedius ex obſervationibus quamplurimis conſtruxit.

109. Æſtuum magnitudo non parum etiam pendet à magnitudine marium, ut in opuſculo citato obſervat Clariſſ. Autor. Sit C centrum terræ, E A D B oblonga maris figura, C A ſemiaxis major, C B ſemiaxis minor priori inſiſtens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A & B, ſitque E C F, vel ipſi æqualis e C f angulus ad centrum terræ quem ſubtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminati; verſetur autem punctum A, in medio inter puncta E, F, & punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum C A, C B, exponatur quantitas æſtus in mari ſatis profundo terram totam cingente, exceſſus altitudinis C A ſuper altitudinem C E vel C F deſignabit maximam quantitatem æſtus in medio maris E F littoribus E, F terminati, & exceſſus altitudinis C e ſuper altitudinem C f.

dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter à mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.



Cf, exponet maximam quantitatem æſtûs ad littora ejuſdem maris. (Nam, differentia inter Diametrum biſecantem angulum datum quem faciunt duæ Diametri Ellipſeos & alterutram ex illis Diametris major eſſe non poteſt ex naturá Ellipſeos quam ſi illa Diameter biſcecans ſit ſemi axis major, & differentia inter illas duas ipſas Diametros angulum datum conſtituentes major eſſe nequit quàm ſi Diameter angulum biſecans faciat angulum cum axe ſemi-rectum). Unde patet æſtus ad littora eſſe propèmodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut ferè nullus obſervetur aquarum motus in maribus non ſatis latè patentibus, niſi cum Oceano ipſo liberè communicent. 109. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicent, ut accidit in mari mediterraneo, æſtus quoquè eam ob cauſam minor deprehenditur. Hinc eſt etiam quod prope æquatorem ubi mare inter Africam & Americam anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quam hinc inde in zonis temperatis ubi maria latè patent, & in maris pacifici littoribus fere ſingulis tam Americanis quam Sinicis & intrà tropicos & extrà. Contingere tamen poteſt ut æſtus qui in Oceano mediocris eſt in fluviis evadat maximus propter tranſitûs anguſtias littorumque ſeorſim coeuntium convergentiam. Hæc de maris æſtu pro præſenti dicta ſint, de hâc Nobiliſſimâ inter Phyſicos quæſtione plurima in decurſu ubi recurret occaſio, adjungemus. Prolixius foret proſequi factas à diligentiſſimis Philoſophis æſtuum obſervationes; legantur quæ huc & illuc tum in tranſact. Angl. tum in Mon. Pariſ. diſperſa inveniuntur, ſed ea præſertim quæ Clariſſ. Viri Halleius num. 226. tranſact. & Caſſinus in Mon. Pariſ. an. 1712. 1713. ſcripta reliquerunt.

EDITOR LECTORI.

FElicius commentari non poſſumus ea quæ tradit Autor noſter de Maris æſtu, quam huic Propoſitioni ſubjungendo eas Diſſertationes quæ Præmio fuère condecoratæ à Celebri Pariſienſi Scientiarum Academiâ: Id quidem primum nobis fuerat propoſitum, ut ea quæ in illis Diſſertationibus momentoſiora viderentur & ad Newtonianæ Philoſophiæ illuſtrationem pertinerent, brevi compendio comprehenſa Notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii noſtri vitio detrita exhibere hæc Illuſtriſſimorum Virorum ſcripta meritò piguit, & non dubitavimus nos meliùs conſulturos tùm Lectoribus noſtris tùm ipſis eorum ſcriptorum Authoribus, ſi qualia ſunt edita hìc illa inſereremus: cumque Authorum à typothetis abſentiâ factum ſit ut in Editione Pariſinâ plurima irrepſerint menda nullo Errorum catalogo correcta, ea, demonſtrationibus ac calculis accuratè repetitis, emendavimus, figuraſque ad loca quibus reſpondent aptari curavimus.

Quatuor quidem Diſſertationes Pariſinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior à Patre Cavallieri Jeſuitâ, ſecunda à Daniele Bernoullio, tertia à . . . Mac-Laurino, quarta à Leonardo Eulero fuere ad Academiam miſſæ; Prior in eo occupatur ut Carteſianæ hypotheſeos circa cauſam æſtus marini vitia & hiatus corrigat & reſarciat, quod quidem ingenioſè admodum præſtat; tres reliquæ ex Legibus gravitatis aquarum Maris in Solem Lunam & Terram omnes Phænomeni propoſiti circumſtantias explicant & calculis determinant, has ergo tres, omiſsâ priore, hujus eſſe loci credidimus.

In Diſſertatione Mac-Laurini occurrit ſolutio ſyntheticâ Problematis de Figurâ Terræ, quale illud propoſueramus in Notis noſtris ad Prop. XIX. quodque parum felici ſucceſſu Analyticè ſolvere tentaveramus, ex ejus ſolutione patet Meridianum eſſe veram Ellipſim in Hypotheſi quod terra ſit homogenea, cum autem hæc in manus noſtras non devenerint niſi cum notæ ad eam Propoſitionem XIX prælum ſubiiſſent, inde factum eſt ut in iis Notis de illo Problemate ut nondum ſoluto egerimus: Quæ in his tribus Diſſertationibus ingenioſa ſunt enumerare longiùs foret, intelligit Lector quæ ſint ipſi ſperanda à tantis Viris & quam facilis, his intellectis & perlectis, futurus ſit tranſitus ad ea quæ ſequuntur de Lunæ motu, de præceſſione Æquinoctiorum, aliiſque; Lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod Typographo indulſerimus hæc qualia ſunt edere, ne, & ipſe Lector & Typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam Epitomem iſtarum Diſſertationum neceſſaria fuiſſet.

TRAITÉ
SUR
LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Par Mr. DANIEL BERNOULLY Profeſſeur d'Anatomie & de Botanique à Baſle.

Deviſe, *Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une Introduction à la Queſtion propoſée.

I.

DANS le grand nombre des Syſtêmes ſur le Flux & Reflux de la Mer, qui ſont parvenus à notre connoiſſance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons & de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleſtes & de la Terre, qui partagent encore les Philoſophes de notre tems : l'un & l'autre de ces Syſtêmes ont eu les plus grands Hommes pour Défenſeurs, & ont entraîné des Nations entieres dans leur parti. Il ſemble donc que tout le mérite qui nous reſte à eſpérer ſur cette grande Queſtion, eſt de bien opter entre ces deux Syſtêmes, & de bien manier celui qu'on aura choiſi pour expliquer tous les Phénomenes qu'on a obſervés juſqu'ici ſur le Flux & Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, & pour donner des uns & des autres les Calculs & les Meſures.

I I.

J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec juſtice le Pere de la vraie Philoſophie. Elle eſt fondée ſur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleſtes & de la Terre : cet incompréhenſible & inconteſtable Principe, que le grand Newton a ſi bien établi, & qu'on ne ſçauroit plus revoquer en doute, ſans faire tort aux ſublimes connoiſſances & aux heureuſes découvertes de notre ſiécle. Après un examen fort ſcrupuleux, j'ai vû que cette Gravitation mutuelle, conſidérée dans les Globes de la Terre, de la Lune & du Soleil, non-ſeulement pouvoit produire tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit neceſſairement, & qu'elle le devoit, ſuivant toutes les loix qu'on a obſervées juſqu'ici. Avec ces heureux ſuccès, j'ai pouſſé mes recherches auſſi loin qu'il m'a été poſſible de les porter. En chemin faiſant, je ſuis tombé ſur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la ſource auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, & même l'inſuffiſance de la Méthode uſitée, lorſqu'elle eſt appliquée à des Queſtions un peu détaillées. J'ai ſu[illegible] une toute autre route; j'ai pouſſé mes recherches bien plus loin, & je ſuis entré dans un détail tel que l'ACADEMIE m'a paru le demander; & je dois dire à l'avantage des Principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la Théorie & les Obſervations, accord qui doit être d'autant moins ſuſpect, que je n'ai conſulté les Obſervations, qu'après avoir achevé tous mes Calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la pluſpart des Obſervations, ſur leſquelles je n'étois pas trop bien informé, lorſque j'ai entrepris cet Ouvrage.

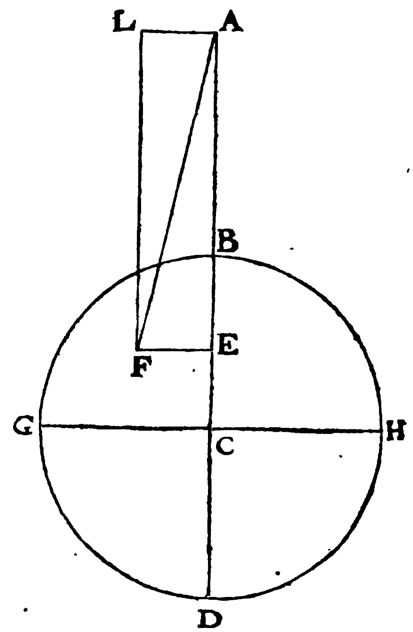
I I I.

Quant aux Tourbillons, j'avouë qu'il eſt bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obſtiner à les défendre : mais auſſi il n'en eſt pas de la Phyſique, comme de la Géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut abſolument démontrer la vérité ou la fauſſeté, pendant que dans la Phyſique il faut ſe rapporter ſouvent à un certain inſtinct naturel de ſentir le faux & le vrai, après avoir bien péſé toutes les raiſons de part & d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypotheſe des Tourbillons, ni dans les conſéquences que l'on en tire. Si nous diſons que le Tourbillon a la même denſité, la même direction & la même viteſſe que la Lune, ce Tourbillon ne ſçauroit faire aucun effet; & ſi au contraire

traire

traire nous ſuppoſons ces trois choſes n'être pas les mêmes de part & d'autre, il me paroît bien clair & bien certain, que l'effet du Tourbillon devroit ſe manifeſter infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des Eaux de la Terre. Cependant on ſçait parfaitement bien que la Lune, quoique ſujette à beaucoup d'irrégularités dans ſes mouvemens, n'en a aucune qui puiſſe être attribuée à l'action auſſi ſenſible d'un Tourbillon. Si nous paſſons par deſſus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embaraſſantes. C'eſt contre les loix de l'Hydroſtatique, que la Lune, qui nage dans le Tourbillon, puiſſe cauſer des variations dans la compreſſion des parties du Fluide. C'eſt une propriété eſſentielle des Fluides de ſe remettre auſſi-tôt à l'Equilibre, lorſque ſes Parties en ſont ſorties. Si une colonne de Tourbillon, entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne ſemblable, rien ne ſçauroit empêcher ſes parties de s'échaper de côté juſqu'au retabliſſement de l'Equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre Atmoſphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hauſſer à proportion le Mercure dans le Barometre, puiſque l'air chaud a plus de reſſort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté juſqu'à la parfaite conſervation de l'Equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en ſçauroit faire aucun ſur le Barometre; auſſi n'obſerve-t-on dans le Barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raiſonnement tout-à-fait ſemblable à celui des Tourbillonnaires pour expliquer les Marées, devroit être très-ſenſible. Pareillement ſi les eaux d'une Riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la ſurface des eaux, que bien près du pieu, & le fond du lit de la Riviere ſera toujours également preſſé. En voilà aſſez & trop ſur cette matiere; car ce ſera toujours aux Sectateurs de Deſcartes de montrer l'effet des Tourbillons ſur l'Océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'eſt plus conteſté; ſçavoir, que la Terre & tous les Corps céleſtes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe poſé, il eſt facile de faire voir, que la Terre que nous ſuppoſerons devoir être ſans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement ſa figure, & que c'eſt ce changement de figure qui eſt la cauſe du Flux & Reflux de la Mer: Comme ce changement dans la Figure de la ſurface de la Terre eſt produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, & je tâcherai dans la ſuite d'en donner la meſure.

I V.



Si *A* eſt le centre de la Lune, ou du Soleil: *B G D H* la Terre; ſi l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil & de la Terre la droite *A D*, & qu'on prenne au dedans de la Terre un Point quelconque *F*, on tirera *F E* perpendiculaire à *B D*, avec la droite *F A*, & on achevera le Rectangle *F L A E*. Chaque point *F* eſt tiré ou pouſſé vers *A*, & cette force étant repreſentée par *F A*, elle ſera conſidérée comme compoſée des deux Laterales *F L* & *F E*: cela étant, on voit que la force *F E* étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne ſçauroit que l'allonger au tour de *B D*: Et comme c'eſt une même raiſon pour tous les Plans qui paſſent par *B D*, il eſt clair que la Terre formera ainſi un Sphéroïde produit par la rotation d'une Courbe *B G D* autour de *B D*.

On remarquera, que cet allongement ne ſçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cauſe de la petiteſſe des Lignes, *F E* par rapport à *F A*. *En ſecond lieu*, à cauſe du peu de rapport qu'il y a entre la péſanteur du Point *F* vers *A*, à la péſanteur du même Point vers le centre de la Terre *C*. Nous verrons dans la ſuite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui eſt fort peu conſidérable, par rapport au Diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au Diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'Hemiſphere ſupérieur *G B H*, & pour l'inférieur *G D H*, doit être inſenſible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par *F E*, ſont tant ſoit peu plus grandes dans l'Hemiſphere *G B H*; que dans l'Hemiſphere oppoſé, dont les parties ſont plus éloignées du point *A*, & qu'ainſi ledit Hemiſphere *GBH* ſera un peu plus allongé que l'autre Hemiſphere: mais on ſent bien que la différence doit être inſenſible. On peut donc prévoir que les Poles *B* & *D* reſteront également éloignés du Point *C*, & que la Courbe *G B H* pourra être cenſée la même que *G D H*. Nous donnerons un Calcul juſte & détaillé de tout cela dans la ſuite de ce Traité.

Venons à une ſeconde conſidération, qui produira le même reſultat, que celle dont nous venons de parler.

V.

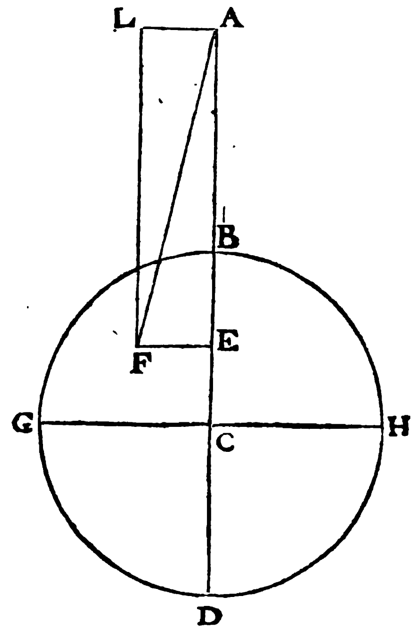
Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil & de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; & ce ſont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par ſon mouvement autour du Soleil, & autour du centre de Gravité (je l'appelle ainſi, pour me conformer à l'uſage) qui eſt entre la Terre & la Lune. Je démontrerai auſſi ci-deſſous, que cette force centrifuge doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre, & parallele à la Ligne *AD*, pendant que l'autre force ſe répand inégalement ſur les parties de la Terre. Elle eſt plus grande dans les parties les plus proches de *A*, & plus petite dans les parties qui en ſont plus éloignées, & cela en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Cette raiſon ſuppoſée, le Calcul fait voir, que pourvû que les Couches concentriques de la Terre autour du Point *C*, ſoient homogenes, la force moyenne, qui pouſſe les parties de la Terre vers *A*, eſt préciſément celle qui répond au centre de la Terre *C*; & que c'eſt dans ce centre *C*, où la force centrifuge eſt préciſément égale à la force centripete. Ainſi chaque partie qui eſt entre *C* & *B*, eſt plus pouſſée vers *A*, qu'elle n'eſt repouſſée; & au contraire chaque partie ſituée entre *C* & *D*, eſt moins pouſſée vers *A*, qu'elle n'eſt repouſſée; de ſorte qu'en s'imaginant deux Canaux communiquans entre eux *GH* & *BD*, on voit que chaque goute dans la partie *CB*, eſt tirée vers *A*, & que chaque goute dans la partie *CD*, eſt pouſſée dans un ſens contraire. Cela diminue l'action de la péſanteur vers le centre de la Terre dans le Canal *BD*, pendant que cette même péſanteur n'eſt pas diminuée dans le Canal *GH*, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'Axe *BD*, ce que je m'étois propoſé de faire voir.

Le Calcul montre que cette raiſon eſt en ſoi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne ſçauroit allonger l'Axe *BD* conſidérablement. Mais ſon reſultat eſt aſſez comparable avec celui de l'allongement expoſé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raiſon, doit être égal dans les Canaux *BC* & *CD*, la différence ne pouvant être ſenſible; & ainſi les Points *B* & *D* reſteront encore également éloignés du centre *C*.

VI.

Une troiſiéme raiſon, qui peut allonger davantage l'Axe *BD*, eſt que par l'allongement même, produit par les deux cauſes précedentes,

la péſanteur terreſtre qui fait deſcendre tous les Corps vers le centre *C*, eſt changée. Cette péſanteur peut être conſidérée comme égale dans les Canaux *GC* & *BC*, ou *DC* à des Diſtances égales du centre *C*, tant que la Terre eſt ſuppoſée Sphérique ; mais cette Sphéricité ôtée, il eſt naturel que cette égalité ne pourra plus ſubſiſter. Il eſt auſſi vraiſemblable que la péſanteur eſt diminuée dans les Canaux *CB* & *CD*, & qu'ainſi l'Axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au Syſtême de M. Newton, qui ſuppoſe la péſanteur produite par l'Attraction commune de la matiere en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Ce n'eſt pas que je croye cette hypotheſe bien démontrée ; car la concluſion de la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde en raiſon quarrée reciproque des Diſtances, qu'on ne ſçauroit plus nier, à une ſemblable attraction univerſelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la péſanteur ; cette conſéquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce ſujet, parce que tous les autres Syſtêmes ſur la péſanteur me ſeroient inutiles : c'eſt le ſeul, qui étant du reſſort de la Géometrie, donne des meſures aſſurées & fixes ; & il eſt d'ailleurs digne de l'attention de tous les Géometres & Phyſiciens.



V I I.

Les trois cauſes que je viens d'expoſer, comme pouvant & devant allonger la Terre autour de la Ligne qui paſſeroit par le centre du Soleil & de la Lune, ſont d'une force aſſez égale ; de ſorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune ſoit ſi petite, qu'elle ne ſçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, & peut-être moins d'un pied. Il ſera bon de remarquer ici que ce qui, après le Calcul, exprime leſdits allongemens, eſt toujours un certain multiple, ou ſous-multiple de $\frac{bg}{aG} \times b$, entendant par *b* le rayon de la Terre, par

a la diſtance du luminaire en queſtion & par $\frac{g}{G}$ la raiſon qui eſt entre la péſanteur d'un Corps placé en *B* vers *A*, & ſa péſanteur vers *C*, laquelle raiſon eſt extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette Formule, que le Calcul m'a enſeigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, ſçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les Calculs extrêmement pénibles, & qui ſe trouvent au bout du Calcul, n'être d'aucune importance. Ce ſeroit une choſe ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une Ligne qui proviendroient, ſi ladite quantité $\frac{bg}{aG} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.

Notre deſſein eſt d'abord de chercher & d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres cauſes, indépendamment de la Figure de la Terre; mais par rapport à la troiſiéme cauſe expoſée au ſixiéme Article, il faut ſuppoſer la Terre, c'eſt-à-dire, le Méridien *BGDH* d'une Figure donnée; & c'eſt l'hypotheſe la plus naturelle, de la ſuppoſer elliptique, ayant pour Axes les Lignes *BD* & *GH*; quelle qu'elle ſoit, elle n'en ſçauroit être ſenſiblement différente, & ſi elle l'étoit, cela ne ſçauroit produire un changement bien conſidérable ſur le rapport des deux Axes *BD* & *GH*, que nous cherchons. Outre cela nous verrons que c'eſt ici un Problême, qui dépend encore de la loi des changemens dans les Denſités des couches de la Terre. M. Newton ſuppoſe la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui eſt aſſez difficile dans toute autre hypotheſe. Mais cette ſuppoſition de M. Newton n'a aucune vraiſemblance; je dirai même, qu'elle ſeroit fort peu favorable à notre Syſtême, comme nous le verrons dans la ſuite. C'eſt pourquoi je n'ai pas voulu reſtreindre ſi fort la Solution du Problême en queſtion. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, & les peines du Calcul. J'ai donc rendu notre Queſtion infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, & pour choiſir ceux qui conviennent le plus à notre ſujet, & qui rendront par-là même plus vraiſemblables les hypotheſes, auxquelles ils appartiennent.

IX.

Voici à preſent nos hypotheſes. Nous conſidererons la Terre, comme

me naturellement ſphérique, & compoſée de couches concentriques: Nous ſuppoſerons ces couches homogenes, chacune dans toute ſon étendue; mais qu'elles ſont de différentes Denſités entre elles, & que la loi des variations de leur Denſité ſoit donnée. Quant à la Sphericité de la Terre, que nous ſuppoſerons, on voit bien qu'il ſeroit ridicule de s'y arrêter, puiſque l'élevation des eaux de l'Océan, cauſée par les deux Luminaires, ne ſçauroit différer ſenſiblement, que la Terre ſoit un peu applanie, ou un peu allongée. La ſuppoſition de l'Homogénéïté des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puiſqu'on ne ſçauroit donner aucune raiſon, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques Lemmes ſur l'Attraction des Corps.

I.

JE prie encore une fois le Lecteur, de ne conſidérer ce Chapitre, que comme hypothétique. Je ne ſuppoſe l'Attraction univerſelle de la matiere, que parce que c'eſt la ſeule hypotheſe, qui admette des Calculs, & qu'elle eſt d'ailleurs aſſez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les Philoſophes du monde.

On appelle au reſte Attraction qu'exerce un Corps *A* ſur un Corps *B*, la force accéleratrice, que le Corps *B* acquiert à chaque inſtant, en tombant vers *A*. On voit donc que l'effet de l'Attraction du Corps *A* ſur le Corps *B*, eſt de communiquer à celui-ci une péſanteur, qu'on ſuppoſe proportionnelle à la maſſe du Corps *A* diviſée par le quarré de la Diſtance; & cette péſanteur doit encore être multipliée par la maſſe du Corps *B*, pour avoir la force que ce Corps exerce s'il eſt empêché de s'approcher du Corps *A*.

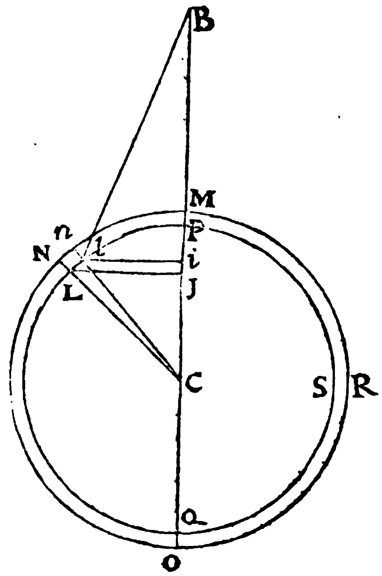
PROBLEME.

II.

Soit une couche ſphérique homogene, infiniment mince; & d'une épaiſſeur égale, compriſe entre les ſurfaces ſphériques *MNOR* & *PQLS*, trouver l'Attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera ſur un Corps placé au point *B*, pris hors de la ſurface extérieure.

SOLU-

SOLUTION.



Qu'on tire la droite BO par le Point B & le Centre C, dans laquelle on prendra deux Points infiniment proches J & i: on tirera ennſuite les deux Perpendiculaires JL & il, & par les Points L & l, on tirera du centre les droites CN & Cn. Soit à préſent $CB = a$; $CJ = x$; $Ji = dx$; $CP = b$; PM ou LN (que nous regardons comme infiniment petite) $= \varrho$: la Denſité de la matiere de la couche $= m$.

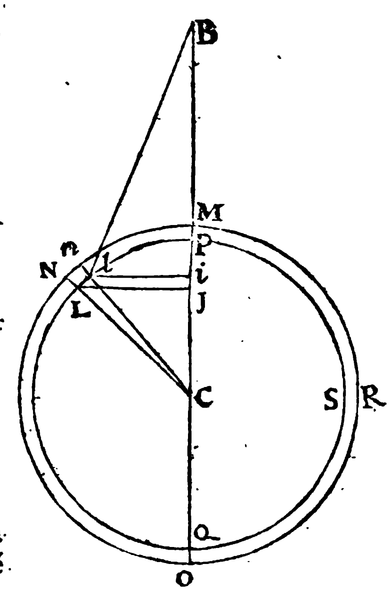
On voit que pendant la revolution autour de l'Axe MO, la petite partie $NLln$ garde toujours une même Diſtance du Point B, & que cette Diſtance ſera $= \sqrt{(aa - 2ax + bb)}$: or, comme il faut toujours diviſer par le Quarré des Diſtances, il faudra pour trouver la force accéleratrice en queſtion d'abord prendre $\frac{1}{aa-2ax+bb}$, & cette quantité doit être multipliée par la raiſon de Bi à Bl, & on aura $\frac{a-x}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}$: & cette quantité doit encore être multipliée par la Maſſe de l'Anneau, que la partie $NLnl$ forme par ſa revolution, & la Maſſe doit être exprimée par la Denſité m & la capacité de l'Anneau, c'eſt-à-dire (en nommant n la raiſon de la circonférence d'un Cercle à ſon rayon) par $m \times NL \times Ll \times n \times LJ$: ou par $m \times \varrho \times \frac{bdx}{\sqrt{(bb-xx)}} \times n \times \sqrt{(bb-xx)}$ ou enfin par $nmb\varrho dx$; de ſorte qu'on a la force accéleratrice abſoluë produite par ledit Anneau $= \frac{nmb\varrho(a-x)dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'Intégrale exprimera l'Attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette Intégrale, nous ſuppoſerons $aa - 2ax + bb = yy$, & nous aurons $\int \frac{nmb\varrho(a-x)dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-nmb\varrho(aa-bb+yy)dy}{2aayy}$ $= \frac{nmb\varrho}{2aa} \times \left(\frac{aa-bb-yy}{y} + C\right) = \frac{nmb\varrho}{2aa} \times \left(\frac{2ax-2bb}{\sqrt{aa-2ax+bb}} + C\right)$, entendant par C une Conſtante convenable: pour la trouver il faut remarquer, que l'Intégrale doit être $= o$, lorſque $x = -b$, d'où l'on tire

$C = \frac{2ab + 2bb}{a+b} = 2b$: ſubſtituant cette valeur, on obtient pour l'Intégrale en queſtion $\frac{nmb\varrho}{aa}\left(\frac{ax - bb}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + b\right)$, & mettant enfin b à la place de x, on obtient la force accéleratrice cherchée $= \frac{2nmbb\varrho}{aa}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

III.

Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce ſur le Corps placé au point B) eſt $= 2nmbb\varrho$, nous voyons que cette force accéleratrice eſt exprimée par la quantité de matiere diviſée par le quarré de la Diſtance du Point B au Centre C, & par conſéquent la même, que ſi cette quantité de matiere étoit concentrée au Centre.



SCHOLIE.

IV.

On remarquera que cette Solution n'a lieu, que lorſque le Point B eſt placé hors de la couche, parce que dans notre Calcul nous avons ſuppoſé, que chaque Anneau formé par la revolution de la partie $NLln$ produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorſque le Point B eſt placé entre les deux ſurfaces, ou au-dedans de la ſurface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une Solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas beſoin, & qu'ils ont déja été reſolus par l'Auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien dit du cas que nous venons de réſoudre, comme pareillement réſolu par M. Newton, ſi je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de ſuivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre Queſtion principale: auſſi ces précautions ſont-elles néceſſaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les Quantités conſtantes; & ainſi nous nous ſouviendrons toûjours dans

dans la ſuite d'exprimer la force accélératrice d'un Corps infiniment petit, par la Maſſe diviſée par le quarré de la Diſtance, & de dénoter la Maſſe par le produit de ſon étenduë, & de ſa Denſité.

PROBLEME.

V.

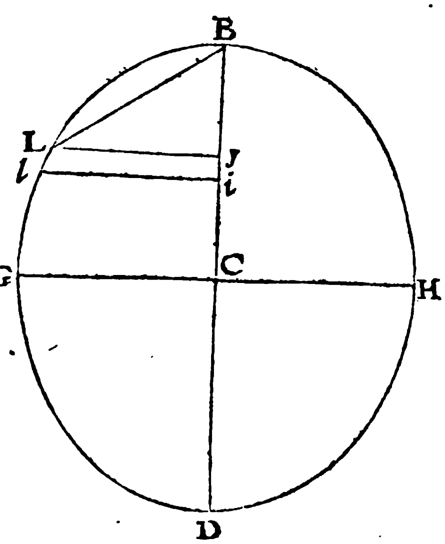
Trouver l'Attraction pour un Corps placé en B, cauſée par une Sphere ſolide, compoſée de couches homogenes; mais de différentes Denſités entre elles.

SOLUTION.

Il paroît par le troiſiéme Article, qu'on n'a qu'à concevoir la Maſſe de toute la Sphere ramaſſée au Centre C, & qu'elle cauſera la même Attraction, tant que le Point B eſt hors de la Sphere: nommant donc M la Maſſe du Globe, ou la ſomme des Maſſes de toutes les couches, l'Attraction cherchée ſera $= \frac{M}{aa}$. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VI.



Soit $BGDH$ une Ellipſe preſque circulaire, c'eſt-à-dire, dont la différence des Axes BD & GH ſoit regardée comme infiniment petite; & qu'on conçoive cette Ellipſe former par ſa rotation autour de l'Axe BD, un Sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce Sphéroïde produira ſur un Corps placé au Pole B.

SOLUTION.

Soit la Denſité de la matiere exprimée par μ; le petit demi Axe $GC = b$; le grand demi Axe $BC = b + \beta$; $BJ = x$; $Ji = dx$; on aura la perpendiculaire $LJ = \frac{b+\beta}{b} \times \sqrt{2(b+\beta)x - xx}$. On voit facile-

ment * que l'Attraction cauſée par la couche, qui répond au Rectangle $LJil$, eſt $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'eſt-à-dire, par $n\mu dx - n\mu dx : \sqrt{xx + \frac{bb}{(b+\beta)^2} \times (2bx + 2\beta x - xx)}$ ou par $n\mu dx - (b+\beta) n\mu x dx : \sqrt{(2b\beta xx + \beta\beta xx + 2b^3 x + 2bb\beta x)}$: Dans cette derniere quantité, nous rejettons le Terme $\beta\beta xx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du ſecond ordre, & nous changerons le Signe radical du Dénominateur en Signe exponentiel de Numerateur; & de cette maniere nous aurons $n\mu dx - (b+\beta) n\mu x dx \times (2b^3 x + 2b\beta xx + 2bb\beta x)^{-\frac{1}{2}}$: or on ſçait par la formation des ſuites de M. Newton, que $(2b^3 x + 2b\beta xx + 2bb\beta x)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $= (2b^3 x)^{-\frac{1}{2}} - (2b^3 x)^{-\frac{3}{2}} \times (b\beta xx + bb\beta x)$: ſubſtituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b+\beta) n\mu x dx}{\sqrt{2b^3 x}} + \frac{(b+\beta) n\mu x dx (b\beta xx + bb\beta x)}{2b^3 x \sqrt{2b^3 x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du Rectangle $LJil$: à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, & rejettant les termes affectés de la ſeconde Dimenſion de β, poſer $n\mu dx - \frac{n\mu dx \sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{\beta n\mu dx \sqrt{x}}{2b\sqrt{b}} + \frac{\beta n\mu x dx \sqrt{x}}{2bb\sqrt{b}}$, & l'Intégrale de cette quantité (qui doit être $= 0$, lorſque $x = 0$) eſt $= n\mu x - \frac{2n\mu x\sqrt{x}}{3\sqrt{2b}} - \frac{\beta n\mu x\sqrt{x}}{3b\sqrt{2b}} + \frac{\beta n\mu xx\sqrt{x}}{5bb\sqrt{2b}}$; & faiſant enfin $x = 2b + 2\beta$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du ſecond ordre $2n\mu b + 3n\mu\beta - 2n\mu b - 2n\mu\beta - \frac{2}{3}n\mu\beta + \frac{4}{5}n\mu\beta$, ou bien enfin

$$\frac{2}{3}n\mu b + \frac{2}{15}n\mu\beta,$$

qui marque la force accéleratrice cauſée par l'action de tout l'Ellipſoïde ſur un petit Corps placé au Pole B. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VII.

Les hypotheſes étant les mêmes, que dans la propoſition précedente, trouver la même choſe pour un petit Corps placé en G, qui eſt ſous l'Equateur de l'Ellipſoïde.

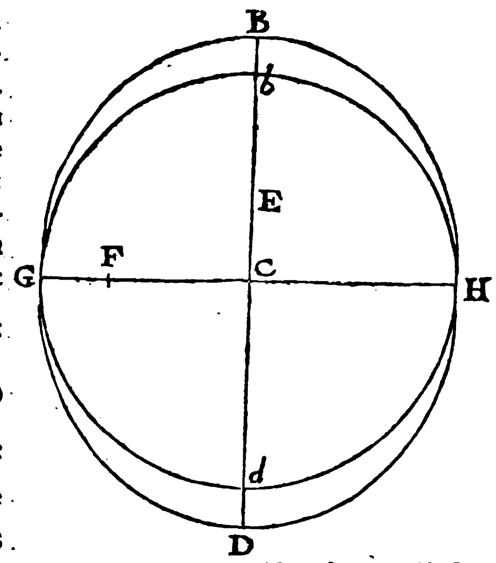
SOLUTION.

Il eſt facile de démontrer par la Géometrie, que toute Section de l'Ellipſoïde parallele à l'Axe de Rotation BD, fait une Ellipſe ſembla-

* Ceci ſe trouve demontré par le Cor. 1. de la Prop. XC. du 1er. Livre de Mr. Newton; on y voit que l'Attraction du point B par le Cercle dont LJ eſt le Rayon, eſt $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut multiplier par la Maſſe du petit Cylindre dont ce Cercle eſt la Baſe & dont Ji eſt la hauteur pour avoir l'Attraction cauſée par la Couche qui répond au Rectangle $LJiL$.

ble à l'Ellipſe génératrice $BGDH$. Conſidérons l'Ellipſoïde comme compoſée de la Sphere inſcrite, ayant pour Diametre le petit Axe GH, & de l'écorce formant un double Meniſque: l'action de la Sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3} n\mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la maſſe de cette Sphere eſt $\frac{2}{3} n\mu b^3$, & la diſtance du Point G au centre eſt $= b$. Il nous reſte donc à chercher quelle action reſulte du double Meniſque.

Concevons pour cet effet tout l'Ellipſoïde partagé en couches paralleles & perpendiculaires à GH. Soit la diſtance du centre d'une de ces couches au Point $G = x$; ſon épaiſſeur $= dx$; il n'eſt pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double Meniſque en queſtion) eſt $= \frac{n\beta}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$, & que ce bord étant multiplié par la Denſité μ, en donne la quantité de matiere $= \frac{n\mu\beta}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être cenſées agir également, & avec une même obliquité ſur le Corps placé au point G: on n'a donc qu'à multiplier cette quantité de matiere par la raiſon de la diſtance du centre de la couche au Point G à la diſtance du bord de la couche au même Point G, & diviſer par le quarré de cette Diſtance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui ſera donc $\frac{n\mu\beta}{2b} \times (2bx - xx)\, dx \times \frac{x}{\sqrt{2bx}} \times \frac{1}{2bx}$, ou bien $\frac{n\mu\beta dx}{4bb\sqrt{2b}} \times (2b\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ dont l'Intégrale eſt $= \frac{n\mu\beta}{4bb\sqrt{2bb}} \times (\frac{4}{3} bx\sqrt{x} - \frac{2}{5} xx\sqrt{x})$ puiſqu'il ne faut point ajoûter ici de conſtante;



& pour avoir enfin l'Attraction de tout le double Meniſque, il faut mettre $x = 2b$, après quoi on aura ſimplement $\frac{4}{15} n\mu\beta$. Si on ajoûte

*. Car l'aire de l'Ellipſe éloignée de G de la quantité x eſt $\frac{n}{2b} \times b + \beta(2bx - xx)$ & l'aire du Cercle inſcrit eſt $\frac{n}{2}(2bx - xx)$. Donc otant cette aire du Cercle de celle de l'Ellipſe reſte $\frac{n\beta}{2b}(2bx - xx)$ pour l'aire de Meniſque.

à cette quantité l'action de la Sphere inſcrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'Ellipſoïde ſur un Corps placé au Point $G = \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \beta$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

VIII.

On voit par ces deux dernieres Propoſitions, que les forces accéleratrices au Pole, & ſous l'Equateur dans un Ellipſoïde homogene, ſont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta$ à $\frac{2}{3} n \mu \beta + \frac{4}{15} n \mu \beta$, ou comme $5b + \beta$ à $5b + 2\beta$, laquelle raiſon peut paſſer pour celle de 1 à $1 + \frac{\beta}{5b}$. Je vois que cela eſt conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des *Princip. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. pour déterminer la Proportion de l'Axe de la Terre au rayon de ſon Equateur. Quant à ſon raiſonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand Homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne diſtingue qu'à peine avec un Microſcope.

LEMME.

Dans un Sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un Point quelconque, eſt à la force accéleratrice pour un autre Point pris dans le même Diametre, comme la diſtance du premier Point au centre, à la diſtance pareille du ſecond Point.

† M. Newton a démontré cette Propoſition à la 199. page de ſon Livre, que nous venons de citer: & comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, ſans qu'il ſoit queſtion de les exprimer analytiquement, il ſeroit ſuperflu, pour mon deſſein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME.

X.

Soit encore le double Meniſque, tel que nous l'avons décrit au ſeptieme Article, compris entre la ſurface de l'Ellipſoïde *GBDH*, & *GbHd*, qui marque la ſurface de la Sphere inſcrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double Meniſque produira au point *E*, pris dans l'Axe de rotation *BD*.

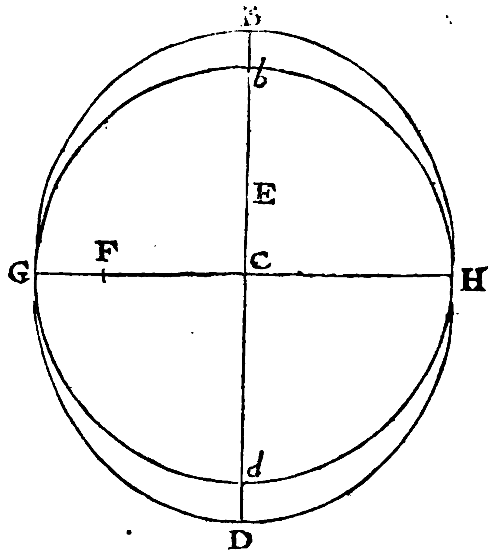
SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-deſſus: or on voit qu'on trouvera l'action du double Meniſque, en prenant celle de tout l'Ellipſoïde conſideré comme homogene avec les Meniſques, & en retranchant celle de la Sphere inſcrite. L'action de tout le Sphéroïde eſt en vertu

* Ceci ſe raporte à la page 80. & ſuiv. de ce Volume, & nous avons eſſayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la la Notte (r) & ſuivantes.

† C'eſt le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1er. vol. 1er. pag. 519.

des 6 & 9 Articles $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta) \times \frac{CE}{CB}$, & celle de la Sphere $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux Meniſques $= \frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta) \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$. Subſtituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité $\frac{CE}{CB - Bb}$, qui peut être cenſée égale à $\frac{CE}{CB} + \frac{Bb \times CE}{CB^2}$ (à cauſe que nous traitons la petite Bb, comme infiniment petite, par rapport à CB) & nous trouverons la force accéleratrice pour les Méniſques



$= \frac{2}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{Bb \times CE}{CB^2} = \frac{2}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB}$ (puiſque $\frac{Bb}{CB} = \frac{\beta}{b + \beta} = \frac{\beta}{b}$) $= -\frac{8}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.
XI.

Le Signe négatif fait voir, que la Gravitation au Point E, cauſée par l'action des deux Méniſques, ſe fait vers le Pole B, & non vers le Centre C. Au reſte on remarquera, que cette Propoſition n'eſt vraie que pour les Points compris entre C & b, en excluant tous les Points, qui ſont au-delà de b; & cela à cauſe que le Lemme du 9. §. ne ſçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice cauſée par l'action de la Sphere pour le Point E, ſi ce Point eſt pris hors de la Sphere inſcrite au Sphéroïde. Ainſi par exemple, au point B, la Gravitation cauſée par les Méniſques, ſe feroit vers le Centre avec une force accéleratrice $\frac{22}{15} n \mu \beta$. Je reſtreins ces Propoſitions, quoique ma Méthode ſuffiſe pour des ſolutions beaucoup plus générales; & cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre ſujet.

PROBLEME.
XII.

Trouver la même choſe que dans l'Art. X. pour un Point quelconque F, pris dans une Ligne GH perpendiculaire à BD.

S o-

SOLUTION.

On obtient encore l'action des Méniſques, en retranchant celle de la Sphere de celle du Sphéroïde. Or celle de la Sphere eſt $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$, & celle du Sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \beta) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des § § 7. & 9. Donc la Gravitation au Point F ſe fait vers le centre C par la ſimple action du double Méniſque, & la force accéleratrice y ſera $= \frac{4}{15} n \mu \beta \times \frac{CF}{CG}$. C. Q. F. T.

XIII.

Voilà les Propoſitions qui nous ſeront néceſſaires, pour meſurer les hauſſemens & baiſſemens des eaux dans la Mer libre par l'action de l'un des deux Luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui ſe trouve entre la péſanteur & la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyſe pure pour la Solution de nos deux derniers Problêmes, ſe plongeront dans des Calculs extrêmement pénibles, & verront par là l'avantage de notre Méthode.

CHAPITRE III.

Contenant quelques Conſidérations Aſtronomiques & Phyſiques, préliminaires pour la Détermination du Flux & Reflux de la Mer.

COmme le Flux & Reflux de la Mer dépendent de la Lune & du Soleil, on voit bien que notre ſujet demande une exacte Théorie du mouvement de ces deux Luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requiſe ici. Mais on eſt encore bien éloigné de ſçavoir avec la même préciſion la Théorie de la Lune, qui eſt cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'eſt venuë là-deſſus, d'employer le principe de la conſervation de ce que l'on appelle communément *Forces vives* (principe déja employé ſous un autre nom par le grand & incomparable M. Huguens, pour trouver les Loix du choc des Corps parfaitement élaſtiques, & auquel on eſt redevable d'une grande partie des connoiſſances nouvelles dans la Dynamique, tant des Fluides, que des Solides:) Cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup plus

plus exactement, que l'on n'a fait juſqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui ſont tous ſujets aux loix Méchaniques. Je m'étois propoſé d'inſerer ici ma nouvelle Théorie ſur la Lune; mais, comme notre ſujet n'eſt déja que trop étendu, & qu'il demande des diſcuſſions aſſez pénibles, je la differerai à une autre occaſion, où je la donnerai en forme d'Addition, ſi l'Académie trouve ce Traité digne de ſon attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoiſſances tirées du Syſtême du Monde, qui ſervent à donner un Syſtême général du Flux & Reflux de la Mer; & quand nous viendrons au détail, nous ſuppoſerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

I I.

On ſçait que la Lune & la Terre font un Syſtême à part: l'un & l'autre de ces Corps tournent autour d'un Point, & font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une Ellipſe: l'action du Soleil ſur l'un & l'autre Corps, change un peu ces Ellipſes, & fait même que la proportion des diſtances dudit Point aux Centres de la Lune & de la Terre, ne demeure pas exactement la même: mais, comme nous ne prétendons juſqu'ici que d'expoſer en gros les choſes néceſſaires à notre Queſtion, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, & conſidérerons la Terre & la Lune, comme faiſant des Ellipſes parfaites & ſemblables entre elles autour d'un même Point.

I I I.

Par ladite Revolution, les deux Corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; & cet effort eſt contrebalancé par leur Gravitation mutuelle: & comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges ſoient auſſi égales: d'où il ſuit que le Point autour duquel ces deux Corps tournent, doit être placé, en ſorte que les forces centrifuges ſoient égales: c'eſt là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce Point, *Centre de Forces centrifuges*, ou bien, puiſque les viteſſes gardent dans notre hypotheſe une proportion conſtante, *Centre de Maſſes*, que *Centre de Gravité*. Il eſt vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du Centre de Gravité dans le ſens commun: Mais quelle idée y peut-on attacher, lorſque la péſanteur eſt inégale dans les différentes parties du Corps? Il n'y a aucun Point alors, qu'on puiſſe nommer tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en ſoit, il eſt certain que les diſtances du Point en queſtion aux Centres de la Terre

Terre & de la Lune, ſont en raiſon reciproque des Maſſes ou Quantités de matiere de ces Corps.

I V.

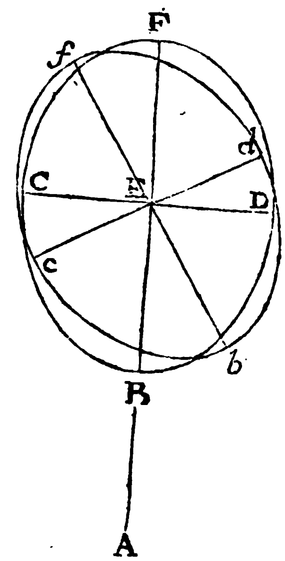
Si la Lune & la Terre étoient des Corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun composé de Couches concentriques parfaitement homogenes, & qu'ils fuſſent parfaitement ſphériques, ſans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une Cauſe Phyſique, autour d'un Axe paſſant par leur propre Centre de Gravité, il eſt clair, que toutes les parties des Corps garderoient pendant leur Revolution un Parallélisme; de ſorte que les deux Corps vûs du Centre de Gravité commun, paroîtroient faire préciſément le tour en ſens contraire autour d'un Axe perpendiculaire au plan des Orbites, pendant chaque Revolution des Corps. Cependant cela ne ſe fait point dans la Lune: car nous ſçavons qu'elle nous montre conſtamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) & cela eſt contraire au Parallélisme, que nous venons d'alléguer: quoique ce ne ſoit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce Phénomene de la Lune, je ne laiſſerai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire ſur la Terre, comme eſſentiel à notre matiere.

V.

Conſidérons donc, que la parfaite Homogénéité dans les Couches concentriques de la Lune, auſſi bien que ſa parfaite Sphéricité, ſont moralement impoſſibles: mais il n'eſt pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne ſuffit pas de dire que le Centre de Gravité de la Lune pris dans le ſens commun, tâche toûjours à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de Revolution. Quelques inégales que fuſſent les Couches, & quelque irréguliere que fut la Figure, la Lune garderoit toujours le Parallélisme des Faces, s'il n'y avoit pas une autre raiſon; ſçavoir, celle de l'inégalité de péſanteur de ſes Parties vers la Terre: les parties ayant d'autant plus de péſanteur, qu'elles ſont plus près de la Terre: c'eſt cette raiſon, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux enſemble; de ſorte que quand même la Lune ſeroit parfaitement homogene, ſa ſeule Figure, jointe à l'inégalité de péſanteur de ſes parties vers le Centre de la Terre, pourroit même produire le Phénomene en queſtion.

Soit A le Centre de la Terre: $BCFD$, par exemple, une Ellipſe; dont l'Axe BF ſoit le plus grand, & CD le plus petit: que cette Ellipſe forme par ſa Revolution autour de l'Axe BF, le Corps de la Lune.

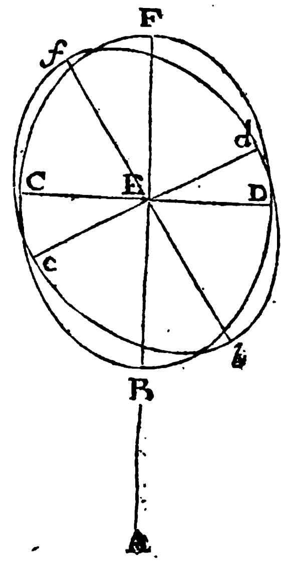
ne. Suppoſons après cela la Lune homogene & mobile autour de ſon Centre *E*, & ſervons-nous de l'hypotheſe ordinaire, que la péſanteur de chaque partie de la Lune vers *A*, ſoit en raiſon quarrée reciproque des diſtances au Point *A*. Cela étant, je dis, que la Lune montrera conſtamment au Point *A* la Face *CBD*, & que l'Axe *FB* paſſera toujours par le Point *A*, & que la Lune reprendroit cette ſituation, dès qu'elle en ſeroit détournée. Comme cette matiere eſt aſſez intéreſſante, tant pour l'Aſtronomie, que pour la Phyſique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort ſenſible, tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un Corps flottant dans un Fluide; car les parties d'un tel Corps, ſont pareillement animées de différentes péſanteurs: or on ſçait qu'un Corps flottant, qui n'eſt pas Sphérique, ou qui étant tel, n'eſt pas homogene, n'eſt pas indifférent à chaque ſituation; mais qu'il affecte conſtamment de certaines ſituations, qu'il reprend auſſi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le Corps n'a qu'une ſeule ſituation d'Equilibre; d'autres fois pluſieurs, ſuivant la ſtructure du Corps: Mais on ſe tromperoit toujours, ſi l'on croyoit, que le Centre de Gravité du Corps tâche à ſe mettre dans l'endroit le plus bas qu'il eſt poſſible; de même qu'on ſe trompe, en diſant, que le Centre de Gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de la Terre. On voit donc aſſez, que la cauſe principale de ce que la Lune nous préſente toujours une même face, eſt l'inégalité de péſanteur; & à cette cauſe, il faudra joindre, ou la non-parfaite Sphéricité, ou la non-parfaite Homogénéïté des Couches de la Lune, ou les deux cauſes à la fois.



VI.

Comme la Queſtion que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en Longitude, que les Aſtronomes ont obſervée, il ne ſera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre Théorie. Nous avons vû que le Sphéroïde *CBDF* mobile autour d'un Point *E*, doit toujours montrer au Point *A* la Face *CBD* tant que le Point *E* reſte dans ſa place. Suppoſons à préſent, que ce Corps s'éloigne un peu de cette ſituation, en faiſant une rotation infiniment petite autour du Point *E*, la force qui tend à la remettre dans ſa ſituation naturelle, eſt de même infiniment petite; ce qui fait voir,

 que



que le Point *E* faiſant ſa revolution autour du Point *A*, ce ne ſçauroit plus être exactement la Face *CBD*, qui regarde vers *A*, parce qu'à chaque petit mouvement du Point *E*, la Lune fait une petite rotation autour de ce Point, pour garder le Parallèliſme, & la Force qui tâche à tourner vers le Point *A* la Face *CBD*, étant encore infiniment petite, ne ſçauroit s'en acquitter aſſez-tôt : & ce ſera la même choſe pendant que le Point *E* parcourt un ſecond Elément, & ainſi de ſuite, juſqu'à-ce qu'à la fin, la Lune ſe place aſſez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans ſa ſituation naturelle, ſoit aſſez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaiſon, qui ſurvient par la rotation du Point *E* autour du Point *A*. [Cette explication pourra nous ſervir dans la ſuite, pour démontrer un des principaux Phénomenes des Marées.] La Lune prendra donc la ſituation oblique *cbdf*, ſi ſa Revolution autour du Point *A* eſt ſuppoſée ſe faire de *E* vers *D*. Mais cette ſituation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la Ligne *FA*, ſans que la Lune eût aucune nutation, ſi le Point *E* faiſoit ſa Revolution autour du Point *A* dans un Cercle parfait, & avec une viteſſe conſtante : c'eſt donc l'inégalité des diſtances *AE*, & des viteſſes du Point *E*, qui fait que l'obliquité de la ſituation *fcbd* varie ; & c'eſt cette variation qui fait la nutation de la Lune en Longitude.

VII.

Venons maintenant à la Terre, & examinons quel mouvement elle doit avoir autour du Centre de Gravité, qui eſt entre elle & la Lune : cette recherche eſt néceſſaire pour notre Queſtion, & elle ne ſera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que ſi la Terre eſt parfaitement homogene, ſoit dans toute ſon étenduë, ſoit ſeulement dans chacune de ſes Couches concentriques ; & ſi elle eſt en même tems parfaitement ſphérique, elle doit conſerver parfaitement un Parallèliſme dans la ſituation de ſes parties, pendant ſa Révolution. Cependant cette parfaite Homogénéïté, eſt moralement impoſſible ; & la parfaite Sphéricité a été refutée par les Obſervations les plus exactes. Ce Parallèliſme ſeroit donc alteré, de même qu'il l'eſt dans la Lune, & la Terre ne manqueroit pas de preſenter

ſenter à la Lune une même face; ſans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; & l'effet de cette action étant, à cauſe dudit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'Axe de la Terre, & quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de la Terre. Mais l'une & l'autre doivent être tout-à-fait inſenſibles, à cauſe de la grandeur de la Maſſe de la Terre, de l'extrême petiteſſe de l'action de la Lune, & de la rapidité du mouvement journalier.

VIII.

On voit donc que la Terre fera ſa revolution autour du Centre de Gravité, qui lui eſt commun avec la Lune, de telle maniere que ſon Axe gardera conſtamment une ſituation parallele. Si nous conſidérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il eſt clair que l'autre mouvement doit être ſuppoſé ſe faire d'une maniere à garder un Paralléliſme dans toutes les Sections de la Terre. Cela étant, il s'enſuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même Ellipſe; que chaque partie a une même force centrifuge, & que les Directions des forces centrifuges ſont par-tout paralleles entre elles. Et c'eſt ici le point principal, que je me ſuis propoſé d'établir, & de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.

Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit auſſi s'entendre à l'égard du Soleil; en ſorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à ſon Orbite annuelle, doit être cenſée la même, & leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Propoſition n'eſt pas ſi eſſentielle à l'égard de l'Orbite annuelle, comme à l'égard de l'Orbite, qui ſe fait autour du Centre de Gravité, qui eſt commun à la Terre & à la Lune, à cauſe de l'extrême petiteſſe de cette derniere Orbite.

CHAPITRE IV.

Qui expoſe en gros la Cauſe des Marées.

I.

Après avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raiſons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux Axes, qui paſſent par les Centres des deux Luminaires, il n'eſt pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le Flux & Reflux de la Mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il eſt clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux Axes d'Allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action composée des deux Luminaires, peut toujours être conſiderée comme une action ſimple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant cette conſidération ſuffit, pour voir en gros, que la Mer doit en chaque endroit s'élever & ſe baiſſer environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cauſe en tout ſon jour, d'en développer tous les effets, & de les reduire à leur juſte meſure, autant que les circonſtances peuvent le permettre.

II.

La Queſtion qui ſe préſente d'abord, & qui eſt en même tems la plus importante pour notre ſujet, eſt de trouver la quantité de l'allongement cauſé par chacun des deux Luminaires. Nous ne conſidérerons donc qu'un ſeul Luminaire. Voici, avant toutes choſes, les ſuppoſitions dont je me ſervirai dans les Calculs, & que j'ai déja expoſées en partie.

I. Nous ſuppoſerons que la Terre eſt naturellement ſphérique. Cette hypotheſe n'eſt que pour abréger le Calcul, & on voit bien que l'effet des deux Luminaires doit être ſenſiblement le même ſur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

II. Que les Couches concentriques de la Terre ſont d'une même matiere, ou d'une même denſité. Cette ſuppoſition eſt ſans doute fort naturelle ; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait inſenſibles: mais il me ſemble qu'il n'y a aucune vraiſemblance de ſuppoſer que la Terre eſt homogene dans toute ſon étendue, comme M. Newton l'a fait.

III. Que la Terre, que nous ſuppoſons ſans, l'action des Luminaires, ronde, eſt changée par l'action de l'un des deux Luminaires en Ellipſoïde, dont l'Axe paſſe par le Centre du Luminaire agiſſant. C'eſt l'hy-

l'hypotheſe de M. Newton; & quoi qu'on ne puiſſe pas le démontrer pour le Syſtême des Attractions, elle ne doit pas nous arrêter: car quelle que ſoit la Figure de la Terre après ce petit changement, on voit aſſez qu'elle ne ſçauroit s'éloigner ſenſiblement de l'Ellipſoïde. Auſſi trouvons-nous cette Figure elliptique dans toutes les hypotheſes, qu'on pourroit ſe former ſur la péſanteur, ſuſceptibles d'un Calcul & tant ſoit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette Figure extérieure de la Terre, n'en ſçauroit produire, qui ſoit ſenſible, entre l'Axe du Sphéroïde, & le Diametre qui lui eſt perpendiculaire.

IV. Nous ſuppoſerons, que les Luminaires ne ſçauroient faire changer de figure toutes les Couches qui compoſent la Terre juſqu'au Centre. Car vraiſemblablement la Terre eſt, dans ſa plus grande partie, ſolide; & quand même elle ſeroit toute fluide, ſa Maſſe ſeroit trop grande, pour être miſe toute entiere en mouvement, & pour obéir aſſez vîte à une action auſſi petite. Ces refléxions m'ont engagé à conſidérer la Terre, comme un noyau ſphérique, compoſé de Couches parfaitement ſphériques & inaltérables par l'action des deux Luminaires, & inondé d'un Fluide homogene, tel que ſont les eaux de la Mer; & à ſuppoſer, qu'il n'y a que ce Fluide inondant, qui reçoive des impreſſions des Luminaires, & que ſa profondeur n'eſt pas ſenſible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypotheſe eſt ſans contredit la plus naturelle, lorſque la Terre n'eſt pas ſuppoſée homogene dans toute ſon étenduë, mais, ſi on la ſuppoſoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypotheſe n'entre plus en ligne de compte.

V. Enfin nous ſubſtituerons à la place des Forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les Luminaires, un autre force qui agiſſe de la même façon, afin que nous puiſſions conſidérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, & un entier équilibre dans toutes ſes parties. Cette force à ſubſtituer, doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre (§. *VIII. Chap. III.*) & parallele à la Ligne qui paſſe par les Centres de la Terre & du Luminaire, dont il ſera queſtion.

III.

La Force centrifuge dont nous venons de parler, doit être priſe pour notre ſujet, préciſément telle, qu'elle ſoit égale à la force totale de l'Attraction du Luminaire, tout comme ſi la Terre ſe ſoutenoit dans ſa diſtance, en décrivant un Cercle parfait; & cela eſt vrai, quelle que ſoit la Force centrifuge réelle de la Terre. C'eſt ici une Propoſition, dont on ne ſent la vérité, qu'après quelque réflexion; & elle eſt fondée ſur ce que la différence entre la Force centrifuge, telle que nous venons de

la

la décrire, & la force centrifuge réelle, n'eſt employée qu'à pouſſer ou repouſſer la Terre, & ne ſçauroit lui faire changer ſa figure, puiſque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie eſt pouſſée également & parallelement.

IV.

La Force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la Gravitation totale de la Terre vers le Luminaire, & la premiere Force étant la même dans toutes les Parties, on voit bien qu'on pourroit ſuppoſer la Force centrifuge égale à la Gravitation vers le Luminaire, telle qu'elle eſt au Centre de la Terre. Car la Gravitation qui répond au Centre, peut être cenſée la moyenne entre toutes les Gravitations du Globe; & cela, quelque relation qu'on ſuppoſe entre les Diſtances & les Gravitations, puiſque la différence des diſtances eſt inſenſible, par rapport à la Diſtance totale; & que par conſéquent la Gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de Diſtances, & qu'il ſe fera ainſi une juſte compenſation pour l'Hemiſphere tourné au Luminaire, & pour l'Hemiſphere oppoſé. Cette Propoſition n'eſt pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du Calcul m'a fait voir, qu'elle peut être cenſée vraie pour notre ſujet: & comme elle abrége fort le Calcul, je l'ai miſe ici, pour en faire uſage dans la ſuite.

PROBLEME.

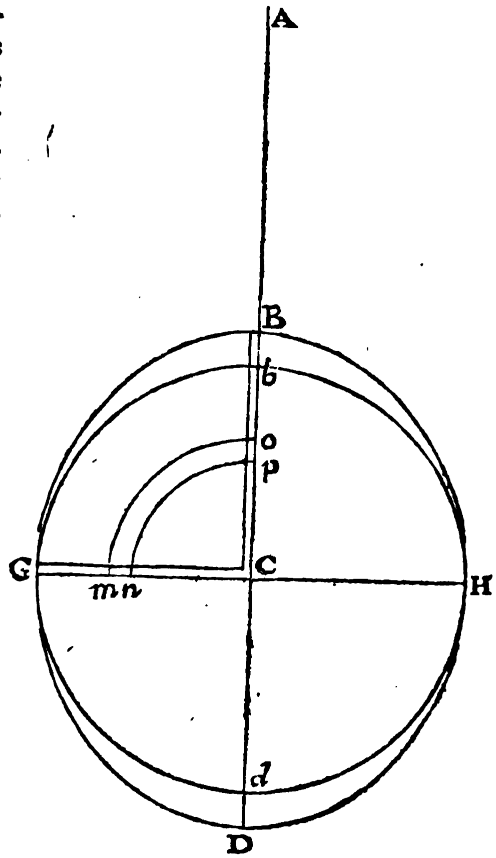
V.

Soit *A* le Centre du Soleil, *BGDH* la Terre; *AD* une Ligne tirée par les Centres du Soleil & de la Terre: trouver la différence entre *BD* & ſa perpendiculaire *GH*, qui paſſe par le Centre *C*.

SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux Canaux *BC* & *GC*, communiquans entre eux au Centre *C*, rempli d'un Fluide de différentes Denſités, telles qu'on ſuppoſe dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous conſidererons la Sphere inſcrite *GbHd*, & nous ſuppoſerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, ſur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypotheſe du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de *GbHd*, cette conſidération ne ſçauroit changer ſenſiblement le reſultat du Calcul, parce que ces changemens de figure

figure ſont tout-à-fait inſenſibles, & que, ſelon toutes les apparences, ils ne ſçauroient ſe faire au-delà d'une certaine profondeur aſſez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la Solution de notre Problême, de ce que le Fluide doit être en équilibre dans les Canaux *G C* & *B C*. Pour ſatisfaire à cette loi, & pour obſerver un ordre, nous diviſerons la Solution en trois parties: dans la premiere, nous chercherons la preſſion totale du Fluide *B C* au Point *C*: dans la ſeconde, nous ferons la même choſe à l'égard du Fluide *G C*; & enfin nous ferons le Calcul, en faiſant les deux preſſions totales égales entre elles.



I. Soit $A\ C = a$; $G\ C$, ou $b\ C = b$; la cherchée $B\ b = \mathfrak{c}$: Qu'on tire du Centre *C* deux quarts de Cercles infiniment proches $p\ n$, $o\ m$; ſoit Cp ou $Cn = x$; $p\ o$ ou $n\ m = d\ x$; la Denſité variable en $p\ o$ ou $n\ m = m$, la Denſité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau ſphérique, & qui forme le double Méniſque) $= \mu$. Soit la Gravitation au Centre *C* vers le Centre du Soleil $A = g$, & la force centrifuge, qui agit parallèlement à *B D*, ſera par-tout $= g$ (§ *VIII. Chap. III.* & §. *IV. Chap. IV.*) qu'on nomme *G* la Force accélératrice en *G* ou *b*, cauſée par l'action du Globe *G b H d*, & *Q* la même force accélératrice pour les Points *p* & *n*. Après toutes ces préparations, on voit que la goute *p o* (dont la Maſſe doit être exprimée par la Denſité *m*, & par la hauteur $d x$, c'eſt-à-dire $m d x$) eſt animée par pluſieurs Forces accélératrices: la *premiere* Force accélératrice eſt celle qui reſulte de l'action du Globe *G b H d*, que nous avons nommé *Q*: la *ſeconde* eſt la Force centrifuge de *A* vers *C*, provenant par la revolution de la Terre autour du Point *A*: nous avons démontré, que cette Force doit être faite $= g$: la *troiſiéme* ſe fait vers *A*, & provient de la Gravitation vers le Soleil: celle-ci eſt négative à l'égard du Point *C*,

& doit être faite $= -\frac{aa}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatrième* provient de l'action du double Ménisque, compris entre $GBHD$ & $GbHd$, & elle eſt encore négative à l'égard du Point C; elle eſt $= -\frac{8}{15} n \mu \beta \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. §. X. & XI. Chap. II. En multipliant toutes ces preſſions accéleratrices de la goute po par ſa Maſſe, on obtient la preſſion abſolue qu'elle exerce ſur le Point C; & cette preſſion abſolue ſera $\left(Q + g - \frac{aag}{(a-x)^2} - \frac{8n\mu\beta x}{15b}\right) \times m\,dx$.

On remarquera ici en paſſant, que comme a eſt ſenſé infiniment plus grand que x, on peut poſer $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = 1 + \frac{a}{2x}$, & ainſi cette preſſion devient

$$\left(Q - \frac{2xg}{a} - \frac{8n\mu\beta x}{15b}\right) \times m\,dx.$$

dont l'Intégrale donnera la preſſion de la Colonne pC; ſçavoir,

$$\int Qm\,dx - \int \frac{2gm\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mx\,dx}{15b},$$

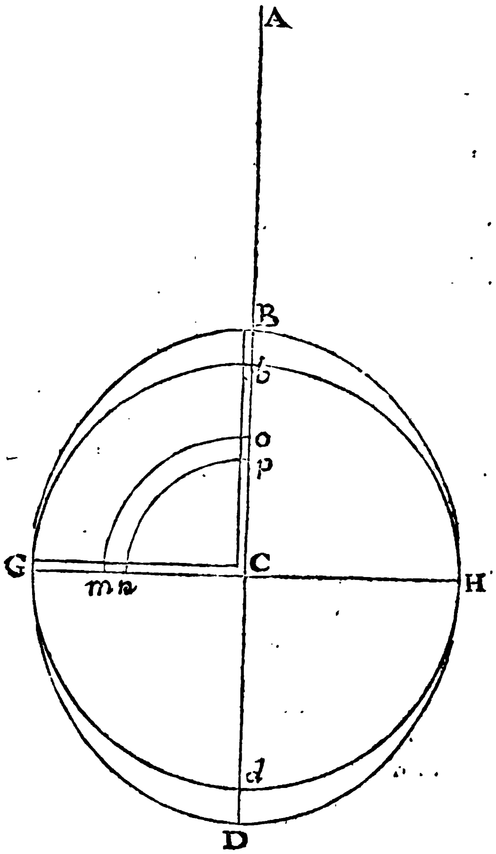
après quoi on aura la preſſion de toute la Colonne bC, en ſubſtituant dans l'Intégrale b à la place de x. A cette preſſion, il faut encore ajoûter celle de la petite Colonne Bb, dont la gravitation ou péſanteur vers C doit être cenſée uniforme dans toute ſa hauteur, & égale à G: il faut auſſi remarquer, que toutes les autres forces qui agiſſent ſur cette petite Colonne Bb peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la péſanteur près la ſurface de la Terre vers ſon centre; ainſi donc la preſſion de la petite Colonne Bb doit être ſimplement eſtimée par ſa hauteur β, ſa denſité μ & ſa péſanteur G, ce qui fait $\mu\beta G$. Il reſulte enfin de tout cela, que la preſſion totale de toute la Colonne BC ſur le Point C eſt

$$\mu\beta G + \int Qm\,dx - \int \frac{2gmx\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mx\,dx}{15b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

II. Pour trouver à préſent la preſſion de la Colonne GC, il faut chercher toutes les Forces qui animent la goute mn, dont la Maſſe eſt encore $m\,dx$. La *premiere* de ces Forces provient de l'Attraction du Globe $GbHd$, & eſt encore $= Q$, puiſque cette Force eſt la même en n & en p: la *ſeconde* Force, provenant de la Force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle ſe tourne autour du Point A, eſt $= 0$, cette Force étant par-tout perpendiculaire à GC (§. *VIII. Chap. III.*) La *troiſiéme* Force provient de la Gravitation des Parties de la Terre vers A, cette Gravitation eſt au Point n vers le Point $A = \frac{aag}{aa+xx}$, & étant

étant décompoſée, la Gravitation reſultante vers C doit être exprimée par $\frac{aagx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$: dans cette derniere expreſſion on peut rejetter au Dénominateur le terme xx, comme le Calcul me l'a fait voir; ainſi il provient $\frac{gx}{a}$, qui marque la troiſiéme force vers C reſultante de la Gravitation vers A. La *quatriéme* Force accéleratrice, qui anime la goute mn à deſcendre vers le centre, provient de l'action du double Méniſque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. eſt $= \frac{4}{15} n\mu\beta \times \frac{x}{b}$. En prenant la ſomme de toutes ces Forces accéleratrices, la Force totale ſera $Q + \frac{gx}{a} + \frac{4n\mu\beta x}{15b}$; cette Force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite Maſſe mdx; & du produit il faut prendre l'Intégrale, qui marquera la preſſion qu'exerce la Colonne mC ſur le centre C: Cette preſſion eſt donc



$$\int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b};$$

& pour avoir la preſſion, qui réponde à toute la Colonne GC, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

III. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des preſſions des Colonnes BC & GC, il ne reſte plus pour achever la Solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiere & ſeconde partie. On aura donc

$$\mu G\beta + \int Qmdx - \int \frac{2gmxdx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mxdx}{15b} = \int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b},$$

& cette équation arrangée donne

$$5\mu Gab\beta - \int 4n\mu a\beta mxdx = \int 15gbmxdx;$$

& de là on tire la valeur cherchée de β, qui eſt conſtante; ſavoir,

$$\beta = \frac{\int 15gbmxdx}{5\mu Gab - \int 4n\mu amxdx}. \text{ C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

VI.

On voit par notre Solution, que généralement *Bb* doit être égale à *Dd*; car la valeur de *ϐ* eſt la même, ſoit que l'on prenne *x* affirmativement, ſoit négativement. Auſſi auroit-il été ridicule de ſuppoſer la Courbe *BGDH* une Ellipſe, ſi les deux parties *GBH* & *GDH* n'étoient pas devenues par le Calcul également allongées, & la ſuppoſition auroit renfermé une contradiction.

Au reſte ces deux petites Lignes ne ſeroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'eſt fondée que ſur ce que nous avons rejetté pluſieurs fois dans notre Solution de certaines petites quantités; mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait inſenſibles, non-ſeulement par rapport à la Ligne *BC*, mais même par rapport à la petite Ligne *Bb*, qui ne ſçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore néceſſaire d'avertir ici, qu'il faut être ſur ſes gardes, en rejettant dans le Calcul de certains termes; car, comme dans l'équation réſultante, pluſieurs termes ſe détruiſent, & qu'il n'en reſte que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui ſont inſenſibles, même par rapport aux quantités reſtantes dans l'équation.

Ce n'eſt qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma Solution pluſieurs termes, & je ne les aurois point négligées, ſi la fin du Calcul ne m'avoit enſeigné, qu'ils peuvent & doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.

Pour avoir une juſte idée de notre équation, remarquons que *μ* ſignifie la denſité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, & *m* la denſité quelconque de la couche, dont la diſtance au centre eſt égale à *x*: *n* exprime la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité: *b* eſt le rayon de la Terre: *a* la diſtance entre les centres du Soleil & de la Terre: *g* exprime la force accéleratrice vers le Soleil, d'un Corps placé au centre de la Terre; & enfin *G* exprime la force accéleratrice, ou la péſanteur des Corps à la ſurface de la Terre vers ſon centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation ſont homogenes & comparables entre eux, & en même tems de quelle maniere il faut faire uſage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. *G* doit être exprimée par la Maſſe de toute la Terre, diviſée par le quarré de ſon rayon; c'eſt-à-dire, qu'il faut ſuppoſer

ſer $G = \frac{\int 2nmxxdx}{bb}$, & comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g & G, auſſi-bien que celui d'entre a & b, on voit qu'on peut enfin exprimer ϵ ſimplement par b: mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $mxxdx$ & $mxdx$: c'eſt ce que nous allons faire dans quelques hypotheſes particulieres.

VIII.

Soit d'abord la denſité de la Terre uniforme, & nommément celle de l'eau de la Mer: c'eſt ici l'hypotheſe de M. Newton.

En ce cas m eſt une conſtante & égale à μ, & ainſi notre équation finale du V. §. eſt $\epsilon = \frac{15gbb}{2a(5G - 2n\mu b)}$;

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3} n\mu b$, ou bien $2n\mu b = 3G$, & ſubſtituant cette valeur pour le ſecond terme du Dénominateur, il provient $\epsilon = \frac{15gb}{4Ga} \times b$.

Nous verrons dans la ſuite, que cette expreſſion analytique donne préciſément la hauteur indiquée par M. Newton (†) ſimplement en pieds, pouces & lignes, ſans en donner le Calcul, ou du moins ſans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine néceſſaire pour l'approfondir. Notre Methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une ſi petite quantité, qu'il ne me paroît pas poſſible

X 3 d'en

(†) C'eſt dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III.; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la Mer ſous le Soleil ou au point oppoſé au Soleil, ſurpaſſe la hauteur de l'eau de la Mer à 90^d de ces points de 1^{pied} 11$\frac{1}{8}$ pouc., & c'eſt à peu près à cela que revient l'expreſſion $\frac{15gb}{4Ga}b$, car (par Cor. 1. Prop. 8. de ce Livre) la gravité à la ſurface du Soleil eſt à la gravité à la ſurface de la Terre comme 10000 à 435. Le Demi-Diamêtre du Soleil étant vû de la Terre ſous l'Angle de 16'. 4'' ce Diametre eſt à ſa diſtance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainſi la gravité de la Terre ſur le Soleil (qui eſt g) eſt à la gravité à la ſurface de la Terre (qui eſt G) comme $\frac{10000}{214^2}$ à 435; D'où l'on trouve le Log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le Diametre du Soleil étant à celui de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le Rayon de la Terre $= b$ eſt à la diſtance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainſi le Log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, & L. $\frac{gb}{Ga} = -8.4072372$ Enfin, reduiſant le Rayon de la Terre b en pouces à raiſon de 1145 $\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 Toiſes chacune pour le Rayon, ſon Log. eſt 8.3718709. Ainſi le Log. de $\frac{gb}{Ga}b = 0.7791081$ dont le nombre eſt 6.014 dont les $\frac{15}{4}$ ſont 22$\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

d'en déduire les Phénomenes des Marées, tels que les obſervations les donnent. C'eſt ce que je ferai voir plus au long dans la ſuite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, & tous ceux de ſa Nation, qui ont écrit ſur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il eſt eſſentiel d'étendre les hypotheſes des denſités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces denſités contribue beaucoup au hauſſement & baiſſement des eaux dans les Marées; qu'on en peut déduire tel effet, qu'on trouvera néceſſaire pour l'explication des Phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheſes. Mais ce que je ſouhaite ſur-tout que l'on remarque, c'eſt que les mêmes hypotheſes qui donnent plus d'effet aux Luminaires, pour hauſſer & baiſſer les eaux dans les Marées, ſont d'ailleurs extrêmement vrai-ſemblables par pluſieurs raiſons Phyſiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

I X.

Suppoſons la Terre creuſe en dedans, juſqu'à une diſtance donnée c depuis le centre, & que la croute (dont l'épaiſſeur ſera $= b - c$, ſoit encore par-tout d'une denſité égale à celle de l'eau de la Mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la conſtante μ, & ainſi le Calcul ſe fera comme dans le précedent Article, avec cette reſtriction, que les intégrales des quantités $mxxdx$, & $mxdx$ doivent être $= o$, lorſque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int mxdx = \frac{1}{2}\mu xx - \frac{1}{2}\mu cc$, ou (en faiſant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu bb - \frac{1}{2}\mu cc$; ſubſtituant cette valeur dans l'équation finale du V §. il vient

$$6 = \frac{15gb(bb-cc)}{10Gab - 4n\mu a(bb-cc)};$$

& (*par le VII.* §.) G eſt $= \frac{\int 2nmxxdx}{bb} = \frac{2n\mu}{3bb} \times (x^3 - c^3) =$ (puiſqu'il faut poſer $x = b$) $\frac{2n\mu}{3bb} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation, on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3bbG}{2n \times (b^3 - c^3)}$, & enfin $4n\mu a(bb-cc) = \frac{6abbG(bb-cc)}{b^3 - c^3}$ & ſubſtituant cette valeur dans le ſecond terme du Dénominateur de notre équation, on a $6 = \frac{15g}{2G} \times \frac{b+x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2bb + 2bc + 5cc}$.

Cette quantité eſt la même, que celle du précedent Article, lorſque $c = o$; mais elle devient plus petite, à meſure qu'on ſuppoſe la Terre plus creuſée, & elle deviendroit tout-à-fait nulle, ſi on ſuppoſoit la Terre preſque entierement creuſe en forme d'une voute ſphérique, dont l'épaiſſeur fût peu conſidérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque ſuffit ſeule, pour refuter le ſentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pourroit

roit y avoir en ce cas aucun Flux & Reflux de la Mer, au moins dans notre Syſtême.

X.

Si l'on ſuppoſoit la loi des denſités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b} \mu$, c'eſt-à-dire, que les denſités fuſſent proportionnelles aux diſtances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\epsilon = \frac{15 g b}{7 G a} \times b,$$

& par conſéquent beaucoup plus petite, que ſi la Terre étoit par-tout d'une même denſité, ſçavoir en raiſon de 7. à 4. Auſſi cette hypotheſe n'eſt-elle aucunement vraiſemblable, y ayant apparence que les couches plus denſes ſont plus bas que les couches plus legeres.

X I.

Si la loi des denſités eſt exprimée par $m = \frac{b \mu}{x}$, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe les denſités, ſuivre la raiſon inverſe des diſtances des couches au centre, on trouveroit

$$\epsilon = \frac{15 g b}{G a} \times b,$$

ce qui fait la valeur de ϵ quatre fois plus grande, que dans la ſuppoſition de M. Newton, de la parfaite homogenéité de la Terre.

X I I.

Suppoſons enfin la loi des denſités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{3}} \mu$, il faudra mettre $\frac{3}{2} \mu b b$ pour $\int m x dx$, & l'équation du V I. §. diviſée par μ ſera

$$\epsilon = \frac{45 g b}{10 G a - 12 n \mu a b} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2 n m x x dx}{b b} = \int \frac{2 n \mu x^{\frac{2}{3}} dx}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{6 n \mu x^{\frac{5}{3}}}{5 b^{\frac{2}{3}}}$ $=$ (en faiſant $x = b$) $\frac{6}{5} n \mu b$. D'où l'on voit que le Dénominateur de notre équation fondamentale devient $= 0$, & par conſequent $\epsilon = \infty$. Ainſi l'élevation des eaux ſeroit infinie.

X I I I.

J'ai mis cette derniere hypotheſe, non qu'elle ſoit poſſible, puiſque la denſité ne ſçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage & la ſupériorité de notre Théorie, puiſqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: ſi les Marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les obſerve, nous pour-

rions

rions lui aſſigner une cauſe ſuffiſante. Ayant au reſte bien examiné tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, je ſuis entierement convaincu, que la force aſſignée par M. Newton ne ſçauroit ſuffire pour les produire : il faut donc dire dans le ſyſtême même de ce Philoſophe, que les denſités de la Terre ne ſont pas uniformes, mais qu'elles croiſſent vers le centre. Cette hypotheſe n'eſt-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle-même ? L'eau eſt-elle le ſeul Fluide que nous connoiſſions ? & ne faut-il pas que les Fluides plus péſants, ſoient plus proches du centre de la Terre ? le Mercure eſt près de quatorze fois plus péſant que l'eau: la grande compreſſion que ſouffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte & plus denſe ?

Si nous conſidérons outre cela, combien les Planetes & la Terre, qui nagent ſans doute dans un milieu reſiſtant, quoique extrêmement ſubtil, conſervent leur mouvement, ſans en perdre la moindre partie conſidérable pendant une longue ſuite de ſiécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces Corps ont beaucoup plus de matiere, que M. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'enviſage cette Queſtion, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de denſité vers le centre.

X I V.

Si, tout le Noyau ou tout le Globe de la Terre reſtant, l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, changeoit de denſité, la quantité ϵ ſuivroit la raiſon reciproque des denſités des eaux de la Mer. Il ſuit de là que ſi la Terre étoit inondée de Mercure, les Marées ſeroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne ſont actuellement. Et ſi au contraire l'air étoit un Fluide homogene peſant, mais ſans élaſticité, ſa hauteur ſeroit environ de 850 ϵ plus grande à ceux qui ont le Soleil au Zenith, qu'à ceux qui l'auroient à l'Horiſon. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'Atmoſphere, à ne donner que deux pieds de valeur à ϵ; & cette différence en produiroit une ſur le Barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'obſerve point à cet égard aucune variation dans le Baromettre ? C'eſt l'élaſticité de l'air qui en eſt la cauſe; cette élaſticité fait que la hauteur du Barometre doit être conſtamment la même dans toute la ſurface de la Mer, en faiſant abſtraction ſeulement des cauſes accidentelles & paſſageres, qui peuvent ſurvenir tout d'un coup, & qui n'agiſſent ſur l'air, que parce que celui-ci ne ſçauroit obéir aſſez promptement, ni ſe mettre dans un inſtant dans ſon état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il eſt faux, que la preſſion du Mercure ſoit égale à la preſſion, ou plûtôt au poids de la Colonne d'air verticale couchée deſſus, ce que l'on affirme ordinairement; mais

mais la preſſion du Mercure eſt égale au poids moyen de toutes les Colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'eſt-à-dire, égale au poids de tout l'Atmoſphere (dont la hauteur eſt conſidérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raiſon de la baſe de la Colonne du Mercure à toute la ſurface de la Terre. Cette Propoſition fait voir que la hauteur moyenne du Barometre doit être la même ſous l'Equateur & ſous le Cercle Polaire, quoique le poids abſolu de la Colonne d'air verticale ſous l'Equateur pendant les plus grandes chaleurs ne ſoit pas la moitié ſi grand que celui d'une pareille Colonne d'air ſous le Cercle Polaire en Hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas ſenſiblement la hauteur du Barometre, quoi qu'ils élevent les eaux conſidérablement. La véritable raiſon n'en eſt que l'élaſticité de l'air, qui doit faire preſſer également tous les endroits de la ſurface de la Terre; & cette ſeule refléxion démontre entierement l'inſuffiſance des inégales compreſſions de la matiere des Tourbillons, pour expliquer les Marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I.

X V.

Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, & il n'eſt pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité ϵ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la Mer, & la plus petite, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil) eſt toujours $= \frac{ngb}{Ga} \times b$: le cofficient n dépend des différentes denſités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ eſt connu par les Obſervations aſtronomiques: il ne reſte donc qu'à voir comment on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'eſt en comparant les effets que les Forces g & G produiſent; la premiere, en retenant la Terre dans ſon Orbite annuelle; la ſeconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la diſtance moyenne de la Lune au centre de la Terre eſt nommée α, la Force centrifuge de la Lune ſera $= \frac{bb}{\alpha\alpha} G$, & la force centrifuge de la Terre eſt $= g$: or la Force centrifuge moyenne de la Terre dans ſon Orbite, eſt à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de Gravité du ſyſtême de la Terre & de la Lune, comme la diſtance du Soleil diviſée par le Quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil, eſt à la diſtance de la Lune au centre de Gravité commun de la Terre & de la Lune, [M. Newton ſuppoſe cette diſtance $= \frac{39}{40} \alpha$, voyez ſes *Princ. Math. Phil. nat. Edit.* 2. *pag.* 430.; il fonde cette ſuppoſition ſur quelques Phénomenes des Marées,

rées, mais mal choiſis à mon avis; elle eſt donc encore fort douteuſe; mais comme elle n'eſt pas de conſéquence pour notre ſujet, je ne laiſſerai pas de l'adopter ici] diviſée par le quarré du têms périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre T, & celui de la Lune t, cette Analogie $g : \frac{bb}{\alpha\alpha} G :: \frac{a}{TT} : \frac{39\,\alpha}{40\,tt}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40\,abbtt}{39\,\alpha^3 TT}$, & par conſequent

$$\epsilon = \frac{ngb}{Ga} \times b = \frac{40\,nb^3tt}{39\,\alpha^3 TT} \times b.$$

REMARQUE.

Pour voir que cette Formule s'accorde avec celle de M. Newton pour la ſuppoſition de l'homogenéïté de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. *VIII.*) & M. Newton ſuppoſe $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (*Princip. Mat. Phil. nat. Edit. 2. pag.* 430.) $\frac{tt}{TT} = \frac{1000}{178725}$ (*Princip. Math. pag.* 395.) & enfin $b = 19695539$ pieds après la meſure de M. Caſſini. De tout cela il reſulte

$$\epsilon = \frac{40.\ 15.\ 1.\ 1000.\ 19695539}{39.\ 4.\ (60\frac{1}{4})^3.\ 178725.}\ \text{pieds},$$

cela fait $\epsilon = 1$ pied 11. pouces & un quart. M. Newton trouve 1 pied 11 pouces & un huitieme. (*Princ. Math. pag.* 429.) La différence me paroît trop petite, pour en rechercher l'origine.

XVI.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu auſſi de la Lune, ſans y rien changer; de ſorte que les équations fondamentales des §. §. V. & VII. ſervent également pour la Lune, en entendant par a la diſtance entre les centres de la Terre & de la Lune, & par g la péſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypotheſe qu'on prenne pour exprimer les différentes denſités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$\epsilon = \frac{ngb}{Ga} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n\gamma b}{G\alpha} \times b,$$

prenant

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au Zenith, & à l'Horiſon, pour α la diſtance entre les centres de la Lune & de la Terre, & pour γ la péſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

XVII.

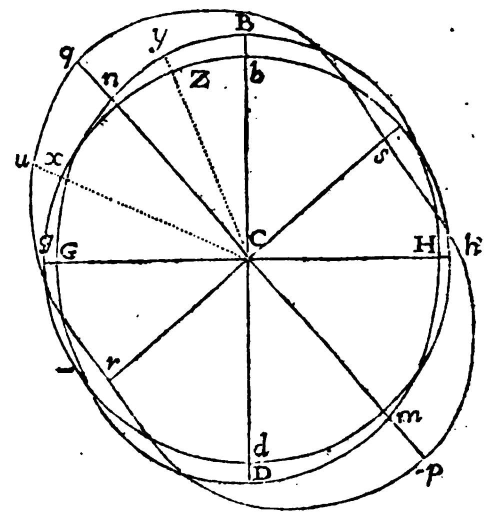
Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil ſur la Mer, eſt qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de Satellites, ne ſçauroit donner immédiatement la Force accéleratrice qu'elle cauſe au centre de la Terre, & que nous avons nommé γ. Je trouve par ma nouvelle Théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-deſſus, plus générale, plus exacte, & ſur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer lad. valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; ſçavoir la Maſſe de la Lune, comparée avec celle de la Terre, & leur commun centre de Gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puiſſe les obſerver aſſez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la Force accéleratrice γ, en comparant les effets de la Lune ſur la Mer avec ceux du Soleil; cette Methode ſeroit fort bonne, ſi on ſçavoit bien ſéparer les effets des deux Luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les Marées bâtardes, qui ſuivent les Quadratures, avec les plus grandes Marées, qui ſuivent les Syzygies. Nous verrons ci-deſſous ce que l'on peut trouver à redire à cette Methode, & comment on pourra en ſubſtituer d'autres plus exactes.

XVIII.

Au reſte, il eſt clair que la Lune & le Soleil produiront leurs effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure Théorie, pour troubler l'action de la Lune, eſt qu'il allonge un peu la Terre: mais il eſt auſſi bien évident, que la Lune changera également la ſurface de la Mer ſur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même choſe dans la premiere hypotheſe du ſecond Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la ſurface de la Mer, ſi les deux Luminaires pouvoient produire dans un inſtant tout leur effet, c'eſt-à-dire, ſi l'eau n'avoit point d'inertie, & qu'elle pût prendre incontinent ſa juſte figure; car c'eſt de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la ſuite pluſieurs inégalités, & autres Phénomenes, qu'on a obſervés dans les Marées.

 Soit



Soit $bgdb$ le Globe de la Terre parfaitement ſpherique, & conſidérons d'abord le Soleil, que nous ſuppoſerons placé dans la Ligne prolongé bd paſſant par le centre de la Terre C: notre Globe ſe changera en Sphéroïde, tel que $BGDH$, les eaux baiſſant autour de gh, & montant autour de b & d. Soit enſuite la Lune dans la Ligne prolongée qp; il eſt clair qu'elle agira ſur le Sphéroïde de la même façon, qu'elle feroit ſur le Globe parfait, duquel le Sphéroïde differe d'une quantité tout-à-fait inſenſible: ainſi donc la Lune fera monter & baiſſer les eaux par deſſus la ſurface du Sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la ſurface ſphérique, ſans l'action du Soleil. Il faut donc prendre nq, ou mp, à bB, ou dD en raiſon des Forces lunaire & ſolaire, c'eſt-à-dire, comme $\frac{l}{\alpha}$ à $\frac{g}{a}$, tracer enſuite les courbes $qrps$, telles qu'en prenant un Angle quelconque uCq, égal à un Angle yCB, la perpendiculaire ux interceptée entre les ſurfaces des Sphéroïdes, ait à la perpendiculaire yz, interceptée entre le premier Sphéroïde & le Globe, la raiſon de nq à Bb. Voilà donc une Conſtruction géometrique générale, qui montre à chaque moment, & à chaque endroit, la hauteur de la Mer, & les variations de cette hauteur. Mais elle demande des Calculs longs & pénibles. Nous verrons dans la ſuite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonſtances & les hypotheſes les plus ſimples, & en ajoûtant des corrections & équations à faire pour chaque circonſtance changée.

XIX.

Voici donc les cas & les hypotheſes, par leſquelles nous commencerons. Nous ſuppoſerons d'abord, que la Lune fait des Cercles parfaits autour de la Terre, & pareillement la Terre autour du Soleil: que ces Orbites ſont dans le plan de l'Equateur de la Terre: que toute la Terre eſt inondée: que la ſurface de la Mer prend dans un inſtant ſa juſte Figure, tout comme ſi l'eau n'avoit point d'inertie, ni reſiſtances; & enfin qu'il ne faille déterminer les loix des Marées, que ſous l'Equateur. Mais avant de faire

les

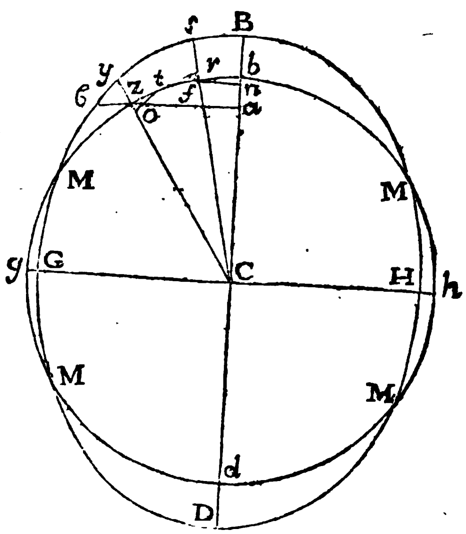
les Calculs, il ſera bon d'expoſer préliminairement quelques Lemmes géometriques.

CHAPITRE V.

Contenant quelques Propoſitions de Géometrie préliminaires pour l'Explication & le Calcul des Marées.

PROBLEME.

SOit, comme ci-devant, le Cercle $bgdh$ & l'Ellipſe preſque circulaire $BGDH$, & ſuppoſons la Sphere & le Sphéroïde, décrits par la rotation du Cercle & de l'Ellipſe autour de l'Axe BD, égaux ; trouver le rapport entre les petites Lignes Bb & Gg.



SOLUTION.

Nous ſuppoſerons pour nous ſervir des mêmes expreſſions, que nous avons employées juſqu'ici, $Bb + Gg = \beta$; $Gg = x$, & $Bb = \beta - x$; Cb ou $Cg = b$; n la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité. Ceci poſé, on ſçait que la Sphere ſera $= \frac{2}{3} n . b^3$: on ſçait auſſi, qu'un Ellipſoïde (dont le grand Axe eſt $= 2A$, & le plus petit Diametre $= 2B$) eſt $= \frac{2}{3} n BBA$; cela donne notre Sphéroïde $= \frac{2}{3} n (b - x)^2 \times (b + \beta - x)$ $= \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\beta)$ ſi l'on néglige les infiniment petits du ſecond ordre. Faiſant à préſent par la condition du Problême la Sphere égale au Sphéroïde, on a $\frac{2}{3} nb^3 = \frac{2}{3} n (b^3 - 3bbx + bb\beta)$ c'eſt-à-dire, $x = \frac{1}{3}\beta$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

I.

Si $Gg = \frac{1}{3}\beta$, il faut que Bb ſoit $= \frac{2}{3}\beta$, & par conſéquent double de l'autre.

l'autre. Ainſi donc l'eau monte deux fois plus autour de la Ligne, qui paſſe par le centre de l'un des Luminaires, & celui de la Terre, qu'elle ne deſcend à la diſtance de 90 dégrés.

PROBLEME.

III.

Si l'on tire du centre *C* une droite quelconque *Cy*, trouver la petite Ligne *yz*, qui marque la hauteur verticale du Point *y* pris dans l'Ellipſe, par deſſus le Pont *Z* pris dans le Cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le Point z la droite $\beta\alpha$ perpendiculaire à l'Axe: on voit qu'en conſéquence de nos hypotheſes, l'Angle $\beta y z$ doit être pris pour un droit, & le petit Triangle $\beta y z$ cenſé ſemblable au Triangle $C\alpha z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{\alpha z}{Cz} \times \beta z.$$

Soit à preſent $C\alpha = s$; $z\alpha = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'Ellipſe

$$\alpha\beta = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{B\alpha \times \alpha D} = \frac{b - \frac{1}{3}\beta}{b + \frac{2}{3}\beta} \times \sqrt{(b + \tfrac{2}{3}\beta - s) \times (b + \tfrac{2}{3}\beta + s)}.$$

Si on change cette quantité en ſuites, & qu'on rejette toujours les infiniment petits du ſecond ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\beta = \sqrt{bb - ss} + \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta.$$

De là on tire $\alpha\beta - \alpha z = \beta z = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta$, & par conſequent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \beta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE I.

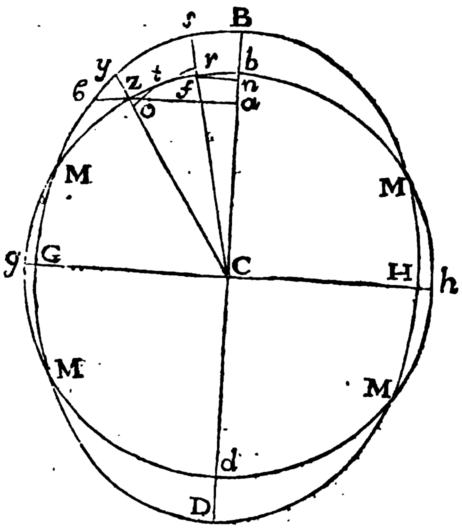
IV.

Pour trouver les Points *M*, où l'Ellipſe coupe le Cercle, on n'a qu'à faire $yz = 0$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773\,b$, & l'Arc *bM* de 54°. 44'.

COROL-

COROLLAIRE II.

V.



Si la Terre tournoit autour d'un Axe perpendiculaire au plan de notre Figure, & que le Cercle $bgdh$ repréſentât ainſi l'Equateur de la Terre, dans lequel l'un des Luminaires eſt ſuppoſé ſe trouver: ſi par cette rotation de la Terre, le Point B eſt parvenu en y, le Luminaire reſtant dans l'Axe BD, l'Angle bCZ ſera l'Angle horaire, dont le Coſinus eſt appellé s, le Sinus total b; & on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant & après ladite rotation ſera repréſentée par $Bb - yz$, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{3}\varrho + \frac{bb-3ss}{3bb} \times \varrho$, ou par $\frac{bb-ss}{bb} \times \varrho$, ou enfin (en nommant le Sinus de l'Angle horaire σ) par $\frac{\sigma\sigma}{bb}\varrho$. Nous concluërons de là, que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute-Mer.

COROLLAIRE III.

VI.

Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, ſont pour chaque Point Z, proportionelles aux aires du Triangle $C\alpha z$. Car l'intervalle de tems doit être exprimé ſimplement par un petit Arc de Cercle, qui eſt $= \frac{-bds}{\sqrt{bb-ss}}$, en conſiderant s comme variable; & ſi nous faiſons cette quantité égale à un petit élement de tems dt, nous aurons $\frac{-bds}{\sqrt{bb-ss}} = dt$ & $ds = \frac{-dt\sqrt{bb-ss}}{b}$. Or par le V §. tout le baiſſement des eaux étant $= \frac{bb-ss}{bb} \times \varrho$, ſa différentielle ſera $= \frac{2\varrho s\,dt\sqrt{bb-ss}}{b^3}$; & comme les quantités ϱ, b & dt ſont conſtantes, nous voyons, que les variations verticales des Marées, qui ſe font en de petits intervalles de tems égaux, ſont proportionnelles aux quantités répondantes $s\sqrt{bb-ss}$, ou aux Aires des Triangles $C\alpha z$.

SCHO-

SCHOLIE.

VII.

On voit que ces proprietés tendent à déterminer les hauſſemens & baiſſemens d'une même Marée pour chaque moment, & nous verrons dans la ſuite, combien elles répondent aux Obſervations. Ces Propoſitions ſuffiroient pour ce deſſein, ſi nous ne voulions conſidérer que ce qui arrive aux Conjonctions & Oppoſitions des deux Luminaires: mais comme cette reſtriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la Théorie des Marées, nous paſſerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque Luminaire peut être conſideré, comme agiſſant ſur la Mer, indépendamment l'un de l'autre; puiſque les petites variations cauſées par l'un des deux, ne changent pas ſenſiblement toute la figure de la Terre: une quantité de quelques pieds ne ſçauroit être ſenſible par rapport à tout le Diametre de la Terre. Nous allons donc conſidérer les deux Luminaires à la fois, & dans une poſition en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'Equateur. Nous conſidérerons auſſi ſur la Terre un Point quelconque dans l'Equateur, pour voir combien la Mer doit être plus haute ou plus baſſe dans ce Point, qu'elle ne feroit ſans l'action des Luminaires. C'eſt ici une Queſtion des plus eſſentielles pour notre ſujet. Souvenons-nous cependant, que β ſignifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une Marée, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil, & δ la même choſe pour la Lune.

PROBLEME.

VIII.

Soit $b\beta d\delta$, l'Equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il ſeroit ſans l'action des deux Luminaires: ſuppoſons le Soleil dans la Ligne prolongée db, & la Lune dans la Ligne prolongée $\delta\beta$; & ſoit un point Z donné de poſition: trouver la hauteur yz, qui marque l'élevation de la Mer pour ledit point Z produit par les deux Luminaires.

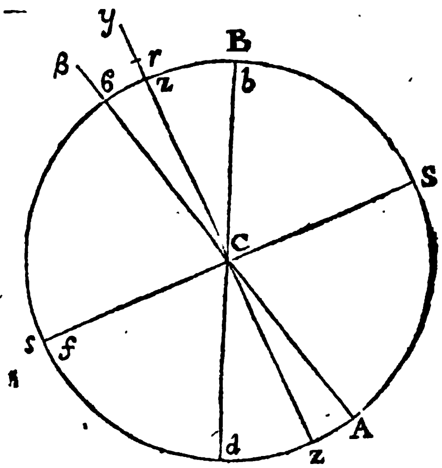
SOLUTION.

Suppoſons que le Soleil éleve les eaux en b de la hauteur Bb, & la Lune de la hauteur $B\beta$ au Point β. On aura par les précedentes Propoſitions $Bb = \frac{2}{3}\beta$, & $B\beta = \frac{2}{3}\delta$: qu'on partage la hauteur cherchée yz en deux parties yr, & rz, dont la premiere convienne à l'action de la Lune; & l'autre à l'action du Soleil: ſoit le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'An-

l'Angle donné $bCz = \frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle $ϐCz$ pareillement donné $= \frac{\rho}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $rz = \frac{3ss-bb}{3bb} \times ϐ = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times ϐ$, & pareillement $yr = \frac{2bb-3\rho\rho}{3bb} \times \beta$, & par conſéquent

$$yz = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times ϐ + \frac{2bb-3ϐϐ}{3bb} \times \beta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE. IX.



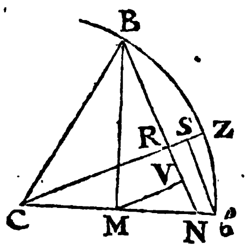
On voit par cette Solution la loi qu'il faudroit obſerver pour conſtruire une Table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, & pour chaque moment, les hauteurs des Marées, en ſuppoſant le Point z changer continuellement de poſition, juſqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à préſent quel eſt le Point Z, qui marque la plus grande hauteur yz, les Poles b & $ϐ$ étant donnés de poſition.

LEMME. X.

Si le Sinus de l'Angle bCz eſt appellé, comme ci-deſſus, $\frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle $ϐCz$, $\frac{\rho}{b}$; le Sinus de la ſomme de ces deux Angles; c'eſt-à-dire, le Sinus de l'Angle $bCϐ$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\rho = \frac{m\sqrt{(bb-\sigma\sigma)} - n\sigma}{b}, \; * \; \&$$

$$\rho^2 = \frac{mmbb + nn\sigma\sigma - mm\sigma\sigma - 2mn\sigma\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}{bb}.$$



* La lettre n exprime ici $\sqrt{bb-mm}$. La demonſtration de ce Lemme eſt fort ſimple, le Rayon BC étant b, le Sinus de tout l'Angle BCϐ étant $\frac{m}{b}$, on aura BM$=m$, CM$=\sqrt{bb-mm}$; ϐS$=\sigma$, CS$=\sqrt{bb-\sigma\sigma}$, BR$=\rho$. Prolongez BR en N, & menez MV parallele à CR, les Triangles CϐS & BMV ſeront ſemblables à cauſe des Angles droits S & V & des Angles égaux CϐZ & MBN; Donc on aura Cϐ (b) : CS $(\sqrt{bb-\sigma\sigma})$ = BM (m) : BV $= \frac{m\sqrt{bb-\sigma\sigma}}{b}$; On trouvera de même que Cϐ (b) : ϐS (σ) = CN : NR = CM (n) : RV $= \frac{n\sigma}{b}$; Donc BR(ρ) = BV − RV $= \frac{m\sqrt{bb-\sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$: C.Q.F.T.

Je n'ajoûterai pas la démonſtration de ce Lemme: mais il eſt pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de ϱ, qui marque le Sinus de la différence de deux Angles donnés par leurs Sinus; on tombe facilement dans une autre expreſſion beaucoup plus prolixe, & qui rend le Calcul du Problême, que nous allons expoſer, preſque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les Points *Z*, où les hauteurs *y z* ſoient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de *y z*, ſçavoir $\frac{-2\epsilon\sigma d\sigma - 2\delta\varrho d\varrho}{3bb}$ (§. *VIII.*) ſoit $=0$, ou bien $\varrho d\varrho = \frac{-\epsilon}{\delta}\sigma d\sigma$.

Et ſi l'on différentie l'équation ſeconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités *m*, *n* & *b* pour conſtantes, & σ pour variable,

$$\varrho d\varrho = \frac{nn\sigma d\sigma - nm\sigma d\sigma}{bb} + \frac{2mn\sigma\sigma - nmbb}{bb\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}} d\sigma.$$

En comparant ces deux valeurs de $\varrho d\varrho$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$\left(-\frac{\epsilon}{\delta}bb\sigma + mm\sigma - nn\sigma\right)\sqrt{bb-\sigma\sigma} = 2mn\sigma\sigma - mnbb$: ſi l'on ſuppoſe pour abréger la Formule $\frac{-\epsilon bb}{\delta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve après une reduction entiere de l'équation, le Sinus de l'Angle *b C z*, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(4+AA)}}\right)}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

SCHOLIE.

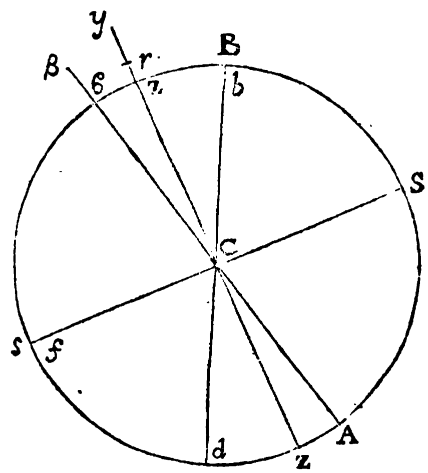
XII.

Il ne ſera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des Signes ambigus. Mais pour faciliter la choſe, & pour en donner une idée d'autant plus diſtincte, on pourra faire les remarques qui ſuivent.

1°. Que notre Formule marque en même tems quatre Points *z*, *Z*, *s* & *S*; que les deux premiers diametralement oppoſés, marquent que la Mer *y* eſt la plus haute, & les deux autres diametralement oppoſés marquent que la Mer *x* eſt la plus baſſe, & que l'Arc *z s* eſt toujours de 90°, ce que l'on connoit de ce que $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}}$, exprimant le Sinus d'un Angle, ſon Coſinus eſt exprimé par $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que

2°. Que l'Angle $bC\beta$ étant aigu, le Point z tombe entre les Points b & β, que ſi cet Angle eſt droit, le Point z tombe préciſément ſur β (en ſuppoſant la Force lunaire plus grande que la Force ſolaire, comme elle l'eſt ſans doute); & enfin, lorſque l'Angle $bc\beta$ eſt obtus, que le Point z tombe au-delà du Point β, l'Arc bz devenant plus grand que l'Arc $b\beta$, avec cette loi que le Point z s'approche reciproquement du Point d, tout comme il s'étoit éloigné du Point b. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, ſi la Force ſolaire ſurpaſſoit la Force lunaire.



COROLLAIRE I.

XIII.

On trouve le Sinus de l'Angle βCz exprimé par $\frac{\beta}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le Sinus de l'Angle bCz. On voit même que ſans faire le Calcul de nouveau, on n'a qu'à renverſer les lettres β & δ dans la la valeur de A, indiquée au §. XI. & ſuppoſer $-\frac{\delta bb}{\beta mn}+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=B$, & on aura $\frac{\beta}{b}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\pm\frac{B}{2\sqrt{(4+BB)}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

XIV.

Conſidérant l'Angle $bC\beta$ comme variable, on voit que l'Angle βCz, qui marque l'Angle horaire entre le moment de la plus haute Marée, & celui du paſſage de la Lune par le Méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puiſqu'il eſt $=o$, tant lorſque l'Angle $bC\beta$ eſt nul, que lorſqu'il eſt égal à un droit: nous allons déterminer cet Angle dans la Propoſition ſuivante.

PROBLEME.

XV.

Déterminer l'Angle $bC\beta$ tel que ſon Angle βCz devienne le plus grand qu'il eſt poſſible.

SOLUTION.

Pour déterminer l'Angle en queſtion, il faut faire $d\varrho = 0$; or ϱ étant exprimé par des conſtantes, & par la variable B (§. *XIII.*) il faut ſuppoſer $dB = 0$, c'eſt-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta bb}{\zeta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être ſuppoſée égale à zero, en conſidérant les lettres m & n comme variables: ſubſtituons pour n ſa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. *X.*) nous aurons

$$B = \frac{-\delta bb + 2\zeta mm - \zeta bb}{\zeta m \sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faiſant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\zeta + \delta}{2\delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.

Si ζ étoit $= \delta$, c'eſt-à-dire, ſi les deux Luminaires avoient une force égale, pour mettre la Mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la Force lunaire étant plus grande que la Force ſolaire, m devient plus petit que b: cependant l'Angle $bC\zeta$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera auſſi, qu'il y a quatre Points, tels que ζ, dont deux ſont autant éloignés du Point b, que les deux autres le ſont du Point d; & que dans ces quatre Points, la haute Marée vient alternativement après & avant le paſſage de la Lune par le Méridien.

Nous allons voir à préſent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des Marées, & pour faire voir, combien notre Théorie bien ménagée s'accorde là-deſſus avec les Obſervations.

CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaiſons.

I.

ON a été de tout tems ſoigneux à bien remarquer l'heure des hautes & baſſes Marées, pour établir là-deſſus, autant qu'il eſt poſſible,

ble, des regles pour l'utilité de la Navigation; & quoi qu'il ſoit impoſſible de donner des regles générales & exactes, on n'a pas laiſſé de continuer ces recherches. Mais je ne ſçache pas qu'on ſe ſoit encore aviſé de raiſonner là-deſſus autrement, que par *induction* ſur un grand nombre d'Obſervations, pendant que c'eſt ici une matiere, qui dépend beaucoup de la Géometrie pour l'eſſentiel, & que ce n'eſt que par rapport à quelques circonſtances, qu'on eſt obligé de recourir aux Obſervations, pour établir des regles: & cela eſt ſi vrai, que la ſeule Théorie m'a fait voir pluſieurs Points, dont je n'étois pas encore inſtruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choſes, juſqu'où la Théorie peut aller, pour éclaircir notre ſujet: nous nous attacherons encore aux hypotheſes marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le Lecteur de relire. Nous irons enſuite plus loin, & nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypotheſe; lorſqu'elle eſt en quelque façon changée.

I I.

Il eſt bon d'avertir ici le Lecteur, lorſque je parlerai des deux Marées qui ſe ſuivent, que j'entends deux Marées pareilles, qui ſe ſuivent au bout de 24. heures, en ſautant la Marée intermediaire; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a obſervées, lorſqu'on a comparé enſemble les deux Marées, qui ſe font dans un même jour. Si l'on veut comparer enſemble des Marées, qui ont pluſieurs jours d'intervalle, nous choiſirons celles qui ſe font pendant que la Lune eſt au-deſſus de l'Horiſon.

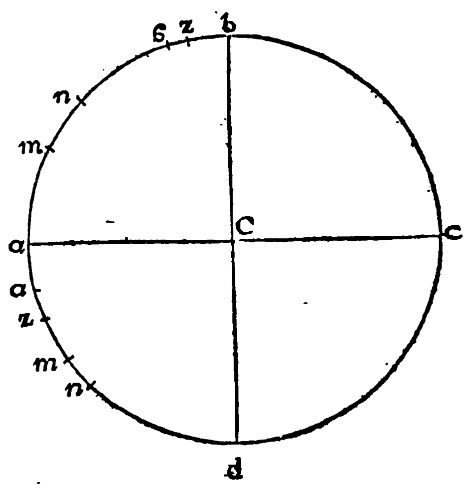
I I I.

Il eſt clair, que ſi la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute Marée répondroit préciſément au paſſage de la Lune par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit d'un jour lunaire précis; & ſi au contraire la Force du Soleil ſurpaſſoit infiniment la Force lunaire, la Marée ſe feroit au moment du paſſage du Soleil par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit préciſément d'un jour ſolaire. Mais comme les deux dites Forces ſont, ſuivant toutes les Obſervations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute Marée doit dépendre du paſſage par le Méridien de l'un & de l'autre Luminaire: mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la Force lunaire eſt, ſans contredit, plus grande que la Force ſolaire. Nous verrons dans la ſuite, qu'il y a quatre ſituations de la Lune, dans leſquelles l'intervalle de deux Marées, qui ſe ſuivent, eſt préciſément d'un jour lunaire; & qu'en

deçà, ou en delà de ces quatre Points, les Marées doivent néceſſairement avancer ou retarder ſur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations & retardemens, qui ſont fort inégaux, & nous ajoûterons pluſieurs autres Remarques ſur cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les Obſervations, qu'on a faites juſqu'ici. Il eſt vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les Forces des deux Luminaires, que ce rapport eſt encore incertain, & qu'il eſt même variable: mais j'indiquerai quels ſont les moyens les plus ſûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonſtances, & enſuite généralement. Avant que de traiter cette Queſtion, qui eſt une des plus utiles, & des plus eſſentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes & baſſes Marées, en ſuppoſant le rapport entre les forces des deux Luminaires connu.

IV.

Soit *b a d c* l'Equateur, dans le plan duquel les deux Luminaires ſont encore ſuppoſés ſe mouvoir de *b* vers *a*, pendant que l'Equateur de la Terre ſe tourne dans le même ſens autour de ſon Centre *C*. Prenons dans l'Equateur un Point *b*, & conſidérons les Luminaires ſe trouver dans leur Conjonction au Point *b*, c'eſt-à-dire, étant l'un & l'autre dans la Ligne prolongée *d b*; on voit qu'en ce cas la haute Marée doit être dans ce moment-là en *b*, & préciſément à midi.



V.

Voyons à préſent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: ſuppoſons pour cet effet, que le Soleil ſe trouvant encore à midi au Point *b*, la Lune réponde au Point *ϐ*: la haute Marée répondra dans ce moment au Point *z*, & les Arcs *b z*, *ϐ z* ſe déterminent par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. il faut donc que le Point *b* parcoure dans l'Equateur l'Arc *b z*, pour ſe trouver dans l'endroit de la plus haute Marée; car on peut négliger les petits Arcs, que les Luminaires parcourent, dans le tems que le Point *b* de l'Equateur parcourt l'Arc *b z*. On voit donc, que ſi l'on veut regler le tems des hautes

Marées

Marées après le tems vrai, on doit prendre l'Arc bz pour l'Arc horaire, qui marque l'heure de la haute Marée de ce jour-là.

Cette regle ſuppoſe le Point β en repos, pendant le tems qui convient audit Arc horaire bz; mais il eſt facile de corriger cette ſuppoſition: car nous verrons dans la ſuite, que l'Arc bz eſt preſque égal à l'Arc $b\beta$; & cela étant, il eſt clair, qu'on n'a qu'à ſubſtituer des heures lunaires aux heures ſolaires, qui répondent à l'Arc bz, pour corriger la dite ſuppoſition.

V I.

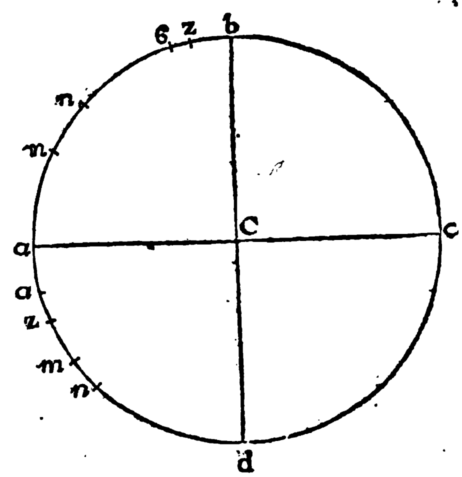
Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes Marées, en le rapportant au midi, c'eſt-à-dire, au paſſage du Soleil par le Méridien: voici à préſent, comment on peut déterminer l'heure des hautes Marées, en la rapportant au paſſage de la Lune par le Méridien, qu'on connoît par les Ephémerides: on peut le faire immédiatement par le moyen de l'Arc βz: nous verrons que le Point z ne ſçauroit s'éloigner du Point β au-delà d'environ dix dégrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet Arc ne ſçauroit varier ſenſiblement; d'où il ſuit que ce petit Arc βz marquera toujours l'Arc horaire entre le moment du paſſage de la Lune par le Méridien & le moment de la haute Marée.

V I I.

L'Arc βz étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute Marée ſuivra le paſſage de la Lune par le Méridien, depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elle le précedera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies: on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'Arc βz fait un *maximum,* lorſque le Sinus de l'Arc $b\beta$ eſt $= \sqrt{\frac{\beta+\delta}{2\delta}}$: c'eſt alors que la haute Marée retarde ou avance le plus ſur le paſſage de la Lune par le Méridien: & comme vers ce tems-là les Points β & z peuvent être cenſés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſera alors préciſément d'un jour lunaire: & cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux Marées qui ſe ſuivent: il eſt de 24. heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une Conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une Marée à l'autre, eſt le plus petit dans les Syzygies, & le plus grand dans les Quadratures.

VIII.



Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous ſuppoſerons, que la Lune répondant au Point m, & la haute Marée étant dans ce moment là au Point n, l'Arc mn ſoit alors le plus grand qu'il eſt poſſible. Soit outre cela encore le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'Arc $mb = m$, ſon Coſinus $= n$. Cela étant, nous avons déja dit, & nous le remarquerons encore ici:

1°. Qu'on aura $m = \sqrt{\frac{\beta + \delta}{\delta}}$.

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'Arc mn par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le Sinus de cet Arc eſt

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

en ſuppoſant $B = \frac{-\delta bb}{\beta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut ſuppoſer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{\beta + \delta}{2\delta}}$, & $n = \sqrt{\frac{\delta - \beta}{2\delta}}$: après ces ſubſtitutions, on trouve le Sinus de l'Arc mn $= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta\delta - \beta\beta}}{2\delta}\right)}$; & comme δ eſt beaucoup plus grand que β, on peut cenſer le Sinus de l'Arc mn être ſimplement $= \frac{\beta}{2\delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'Arc nb, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il eſt remarquable que cet Arc ne dépend point du rapport, qui eſt entre la Force lunaire δ, & la Force ſolaire β; car il eſt toujours de 45 dégrés.

4°. Que ſi la Lune eſt ſuppoſée dans un Point quelconque β, les Arcs bz & βz peuvent ſe déterminer par le moyen des XI. & XIII. §. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit: mais ſi l'on ſuppoſe le Point β bien près du Point b, nos Formules font voir, qu'on peut cenſer alors le Sinus de l'Arc $\beta z = \frac{\beta}{\beta + \delta} \times m$, & le Sinus du petit Arc $bz = \frac{\delta}{\beta + \delta} \times m$.

Cet-

Cette Formule nous ſervira à determiner combien les Marées priment vers les Syzygies.

5°. Que ſi la Lune ſe trouve en α bien près de a, la haute Marée repondra dans ce moment au Point z au-delà du Point α, & on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. ſi l'on traite bien l'équation qui y eſt marquée, le Sinus du petit Arc $\alpha z = \frac{\epsilon}{\delta - \epsilon} \times n$, en prenant pour n le Coſinus de l'Arc $b\,\alpha$, ou ce qui revient au même, le Sinus du petit Arc $a\,\alpha$. Cette valeur du petit Arc αz nous ſervira à déterminer, combien les Marées retardent vers les Quadratures.

Ces deux dernieres Remarques ſont fondées ſur ce que m ou n, étant comme infiniment petits, les quantités A & B deviennent comme infiniment grandes, & alors on peut ſubſtituer ſimplement $\frac{1}{A}$ & $\frac{1}{B}$ à la place des Quantités

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4 + AA}}\right)} \ \& \ \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}:$$

& après ces ſubſtitutions, on trouve les Sinus des petits Arcs, comme nous les avons déterminés.

IX.

Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, ſont tout-à-fait conformes aux Obſervations. Mais pour en ſentir toute la force, il faudroit toujours ſçavoir le rapport qu'il y a entre les Forces δ & ϵ, & c'eſt ce que j'ai déja dit, qu'on ne ſçauroit déterminer immédiatement par les principes d'Aſtronomie, faute d'Obſervations aſſez juſtes ſur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets Phyſiques, que la Lune produit ſur la Terre, pour en déduire ſa force; & je n'en connois point d'autres, que les Marées mêmes: mais il s'en faut ſervir avec beaucoup de circonſpection. Comme c'eſt ici un point très-eſſentiel, je n'ai pas voulu manquer de le conſidérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes reflexions là-deſſus.

X.

On pourroit déduire le rapport moyen entre les Forces δ & ϵ du rapport des plus hautes Marées, qui ſe font près des Syzygies, & des plus petites Marées aux Quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande Marée doit être à celle de la plus petite Marée, comme $\delta + \epsilon$ eſt à $\delta - \epsilon$. Mais les hauteurs des Marées dans les Ports, où l'on fait les Obſervations, dépendent de tant de circonſtances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionelles aux hauteurs des Marées dans la Mer libre; & c'eſt ce qui fait, qu'on trou-

trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites Marées, aſſez différent dans différents Ports.

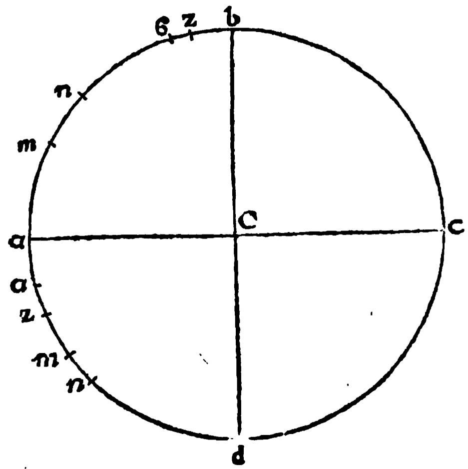
M. Newton, qui a ſuivi cette Méthode, rapporte une Obſervation faite par Sturm au-deſſous de Briſtol, où cet Auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande & de la plus petite Marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \beta$. Cette Obſervation eſt bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: «Dans les grandiſſimes Marées, la Mer «s'éleve de 50 pieds en plomb au-deſſus du bas de l'eau: dans les Ma«rées bâtardes, elle ne différe que de quinze pieds.» Si j'ai bien compris cette Obſervation, la plus grande Marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times \beta$. Ces deux reſultans ſont bien différens: il eſt vrai, que le rapport de δ à β eſt variable; mais cette variation ne ſçauroit aller ſi loin; ſi la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\beta}$ eſt $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\beta}$ ſera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre refléxion à faire ſur cette Méthode de trouver le rapport entre les Forces des deux Luminaires: c'eſt que les Marées ſont une eſpece d'Oſcillations, qui ſe reſſentent toujours des Oſcillations précedentes: cette raiſon fait que les variations des Marées, ne ſçauroient être auſſi grandes qu'elles devroient être, ſuivant les Loix hydroſtatiques. Concevons un pendule attaché à une Horloge animée ſucceſſivement par des poids différens: On ſçait, que plus ces poids ſont grands, plus les Oſcillations du pendule deviennent grandes: mais en changeant les poids, les premieres Oſcillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en eſt pas de même des durées des Oſcillations, lorſque le pendule eſt ſucceſſivement animé par différentes péſanteurs. Conſidérons d'abord un pendule ſimple animé par la péſanteur ordinaire, & qui faſſe ſes Oſcillations dans deux ſecondes de tems, & ſuppoſons enſuite la péſanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande; je dis que la premiere Oſcillation, qui ſuivra ce changement, ſe fera de même que toutes les autres ſuivantes dans une ſeconde de tems.

Cette conſidération me porte à croire, que les Obſervations ſur les durées & ſur les intervalles des Marées ſont plus ſûres pour notre deſſein, que les hauteurs des Marées: ſi cette refléxion eſt bien fondée, on pourroit faire attention aux Méthodes ſuivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ & β.

1°. Il faudroit pendant pluſieurs mois obſerver, quel eſt le plus petit intervalle de deux Marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen eſt d'un jour moyen lunaire, que je ſuppoſe de 24 heures 50 minutes; mais il ſera moindre dans les Syzygies; quoique plus grand

qu'un jour ſolaire, ou de 24 heures: ſuppoſons ce plus petit intervalle de 24 heures, & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N; &



il faudra prendre dans la Figure ci-deſſus un Arc horaire $b\,6$ de 50 minutes de tems: De cet Arc $b\,6$, il faut prendre une partie $6\,z$, qui réponde à $(50-N)$ minutes. Or par la IV. Remarque du VII. §. l'Arc $6z$ eſt à l'Arc $b6$, comme $\frac{6+\delta}{6}\times m$ eſt à m: d'où nous tirons cette analogie,

$$50-N:50::6:6+\delta;$$

& cette analogie donne

$$\delta=\frac{N}{50-N}\times 6.$$

Soit N égal à 35 (c'eſt ainſi qu'on l'obſerve à peu près dans les Marées regulieres) & on aura $\delta=\frac{35}{15}\,6$.

2°. On pourroit auſſi faire attention aux plus grands intervalles; ſi ce plus grand intervalle (qui ſe fait ordinairement après les Quadratures) étoit de 24 heures & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même Méthode, que nous venons d'indiquer, & par la V. Remarque du VII. §. $\delta=\frac{M}{M-50}\times 6$.

Soit $M=85$ minutes (c'eſt à peu près la valeur que l'on obſerve) & on trouvera

$$\delta=\frac{85}{35}\times 6.$$

Voilà les deux Méthodes, que je crois les plus exactes; & la premiere doit l'emporter ſur la ſeconde, parce que les Marées ſont plus irrégulieres après les Quadratures, qu'après les Syzygies. Il y a encore

pluſieurs autres Méthodes pareilles à celles que je viens d'expoſer, & dont j'ai fait en partie le Calcul; mais comme je ne ſuis pas aſſez content des Obſervations, ſur leſquelles ces Méthodes ſont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il eſt poſſible, toutes les Obſervations qui déterminent le rapport entre δ & ϵ, il faut ſuppoſer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\epsilon}=\frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}=2$, & ſa plus grande valeur $=3$. C'eſt donc ſur ces ſuppoſitions que nous raiſonnerons & calculerons dans la ſuite; & comme nous ne conſidérons encore toutes les circonſtances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reſte de ce Chapitre $\frac{\delta}{\epsilon}=\frac{5}{2}$.

M. Newton ſuppoſe $\frac{\delta}{\epsilon}$ environ $=4$: mais j'ai déja dit, pourquoi ſa Méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus grande qu'elle n'eſt: la raiſon en eſt, que ſi les Marées, n'avoient point d'influence les unes ſur les autres, comme elles ont, les plus grandes Marées différeroient davantage des plus petites, & par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ plus petite.

Avant que de finir cette digreſſion ſur le rapport entre la force de la Lune, & celle du Soleil, & d'en faire l'application à notre ſujet, je ferai ici une refléxion ſur les Forces abſolues de la Lune & du Soleil. Nous avons fait voir aux §. §. VIII. & XV. du Ch. IV. que dans l'hypotheſe de l'homogenéïté de la Terre adoptée par M. Newton, le Soleil ne ſçauroit faire varier les eaux au-delà de deux pieds, ni par conſéquent la Lune au-delà de cinq pieds. Ces deux Forces combinées enſemble pour les Quadratures feroient une Force abſolue à faire varier les eaux en pleine Mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une Marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine Mer, il puiſſe provenir tous les effets des Marés aux Quadratures? Encore eſt-il très-vraiſemblable, que la variation actuelle des eaux différe beaucoup de la variation entiere, que la Théorie indique comme poſſible: peut-être même, que la variation actuelle eſt à peine ſenſible par rapport à l'autre, & cela non-ſeulement à cauſe des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cauſe de l'inertie des eaux & du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que ſi ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une viteſſe infinie, les Luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la Mer, quelque Force qu'ils euſſent. Je ſuis donc entierement perſuadé, que les Forces abſolues des deux Luminaires ſont beaucoup plus grandes, que M. Newton ne les ſuppoſe, & tous ſes

ſes Commentateurs après lui, prenant l'homogenéïté de la Terre; pour une hypotheſe, ſur laquelle ils bâtiſſent tout leur Syſtême. Ces refléxions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en ſuppoſant, que les Denſités des Couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (ſuppoſition d'ailleurs extrêmement probable par pluſieurs raiſons Phyſiques, dont j'ai expoſé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune & du Soleil ſur la Terre. Après cet examen ſur les Forces, tant relatives, qu'abſolues des deux Luminaires, nous allons en faire uſage, pour conſidérer de plus près tout ce qui regarde la durée des Marées, leurs intervalles, & pour faire voir le merveilleux accord entre la Théorie & les Obſervations.

X I.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus petits dans le tems des Syzygies: leur intervalle moyen eſt alors de 24 heures 35 minutes, & les Marées priment chaque jour de 15 minutes ſur le mouvement de la Lune.

X I I.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus grands dans le tems des Quadratures: ils ſont alors de 24 heures 85 minutes, c'eſt-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les Marées retardent de 35 minutes par jour ſur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des Marées plus incertaine & plus irréguliere que dans les Syzygies; & c'eſt auſſi ce que l'on obſerve: mais ce n'eſt pas la ſeule raiſon.

X I I I.

Les Marées répondront préciſément au paſſage de la Lune par le Méridien, tant dans les Quadratures, que dans les Syzygies, ſi celles-ci ſe font auſſi au moment du paſſage de la Lune par le Méridien. Mais ſi les Quadratures & les Syzygies ne ſe font pas dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien, il faut des corrections. Dans les Syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. & par conſéquent $\frac{5}{8}$ de minutes par heure, que la haute Marée avancera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Syzygies ſe font avant ce même paſſage; & que la haute Marée retardera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Syzygies ſe font après ce paſſage. Dans les Quadratures il faut une correction de 35 minutes par jour, en vertu du §. XII. c'eſt-à-dire, environ une minute &

& demie par heure, que la haute Marée retardera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Quadratures ſe font avant ledit paſſage; & qu'elle avancera, ſi les Quadratures ſe font après le paſſage de la Lune par le Méridien. Car près des points *b* & *a*, les Arcs *ϐz* & *α z'* peuvent être cenſés proportionnels aux Arcs *bϐ* & *a α*.

X I V.

Si au lieu de rapporter les hautes Marées aux jours lunaires, on vouloit conſidérer les jours ſolaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes Marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les Syzygies, retardent de 35. minutes dans un jour, ou d'environ une minute & demie par heure; & qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les Quadratures, ce qui fait environ trois minutes & demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les Syzygies.

Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la Marée dans les Syzygies une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies auront devancé ladite heure moyenne, & en retrancher une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies retarderont ſur la même heure moyenne.

Et pour les Quadratures nous aurons la regle ſuivante:

Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les Quadratures de l'heure moyenne de la Marée, trois minutes & demie par chaque heure, que les Quadratures avanceront ou retarderont ſur la même heure moyenne.

X V.

M. Caſſini, dont les remarques ingénieuſes ſur les Marées m'ont ſervi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les Syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute & demie; & deux minutes & demie dans les Quadratures, au lieu de trois minutes & demie.

X V I.

Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux Marées qui ſe ſuivent, lequel intervalle eſt de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'eſt pas également éloigné des Syzygies & des Quadratures; mais qu'il eſt beaucoup plus près des Quadratures, que des Syzygies: auſſi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le Point *b* juſqu'au Point *m* (qui eſt celui, dont il eſt queſtion ici) doivent compenſer tous les retardemens depuis le Point *m* juſqu'au Point *a*, & que les accélerations ſont beaucoup plus petites que

que les retardemens, on voit d'abord, que le Point *m* doit être plus près du Point *a*, que du Point *b*. Mais nous déterminerons exactement ce point *m* par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le Sinus de l'Arc *mb* eſt $= \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0{,}8366$ lequel Sinus répond à un Arc de $56^{d}.\ 47^{m}$. L'Arc *mb* étant donc de $56^{d}.\ 47^{m}$., l'Arc *ma* ſera de $33^{d}.\ 13^{m}$., & les deux Arcs *mb* & *ma* ſont comme 3407 à 1993.

L'Arc *nb* étant toujours de 45 dégrés (*par la III. Remarque du VIII.* §.) nous avons l'Arc $mn = 11^{d}.\ 47^{m}$.; & cet Arc *mn* marque le plus grand intervalle poſſible entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée. Cet intervalle eſt donc de 47 minutes de tems: le paſſage de la Lune par le Méridien ſuivra la haute Marée depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & la précédera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui ſe fait environ $2\frac{1}{4}$ jours avant & après les Quadratures) ne ſurpaſſe jamais 47 minutes de tems.

XVII.

Toutes ces Propoſitions depuis le XI. §. juſqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes Marées, & de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonſtrations ſoyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre ſuivant, comment on peut donner des corrections aſſez juſtes à l'égard de toutes les hypotheſes que j'ai expoſées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui eſt poſſible, à cette matiere, je montrerai plus préciſément, comment on peut trouver l'intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée, pour tout Arc donné entre les deux Luminaires; après quoi je donnerai une Table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix dégrés. Il ſera facile après cela moyennant les Ephémerides & des Interpolations, de déterminer l'heure des Marées généralement.

XVIII.

Soit donc encore le Soleil en *b*; la Lune dans un Point quelconque *m*: la haute Marée en *n*. Soit le Sinus de l'Arc $mb = m$: le Sinus total $= 1$, le Coſinus de l'Arc $mb = n$: qu'on faſſe (§. *XIII. Chap. V.*).

$$B = \frac{-\delta bb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4mm - 7}{2mn}:$$

on

on aura le Sinus de l'Arc *m n* (qui eſt l'Arc horaire entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée)

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}.$$

Si l'on change cette Quantité radicale en ſuites, en faiſant attention que *B* eſt toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, ſans aucune erreur ſenſible, ſuppoſer le Sinus de l'Arc horaire $mn = \frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$, & même ſimplement $= \frac{1}{B}$ près des Syzygies & des Quadratures. Voici à préſent la Table dont je viens de parler.

La *premiere* Colonne marque de dix en dix Dégrés l'Angle compris entre les deux Luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la Marée : la *ſeconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & ajoûter depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies à l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, pour trouver l'heure de la Marée; & la *troiſiéme* marque la vraie heure de la haute Marée.

TABLE FONDAMENTALE

pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées.

Diſtances entre les deux Luminaires en Dégrés.	*Tems de la haute Mer avant & après le paſſage de la Lune par le Méridien.*	*Heure de la haute Mer.*	
o Dégrés.	o Minutes.	o Heur.	o Min.
10	11½ avant.	0	28½
20	22 avant.	0	58
30	31½ avant.	1	28½
40	40 avant.	2	0
50	45 avant.	2	35
60	46½ avant.	3	13½
70	40½ avant.	3	59½
80	25 avant.	4	55
90	0	6	0
100	25 après.	7	5
110	40½ après.	8	0½
120	46½ après.	8	46½
130	45 après.	9	25
140	40 après.	10	0
150	31½ après.	10	31½
160	22 après.	11	2
170	11½ après.	11	31½
180	0	12	0

X I X.

La Table que nous venons de donner, détermine généralement l'heure des hautes Mers pour les hypotheſes expoſées au X I X. §. Chap. IV. s'il eſt vrai que la raiſon moyenne entre les Forces de la Lune & du Soleil, ſoit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir bien examiné toutes les Obſervations qui peuvent la déterminer: cependant, comme ces Obſervations ne ſont ni aſſez juſtes, ni en aſſez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout-à-fait exacte: il eſt pourtant certain, que cette Table ne ſçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude néceſſaire, les Marées étant ſujettes à pluſieurs irrégularités, dont on ne ſçauroit donner aucune meſure, & qui ſont de beaucoup plus grande conſéquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la Table. Nous allons examiner avec quelles précautions & corrections on doit s'en ſervir.

CHAPITRE VII.

Qui contient à l'égard de pluſieurs Circonſtances variables, les Corrections néceſſaires pour les Théoremes & pour la Table du Chapitre précedent, & une Explication de pluſieurs Obſervations faites ſur les Marées.

I.

Les Vents & les Courants irréguliers contribuent le plus à rendre les Marées incertaines & irrégulieres. Ils accélereront & augmenteront le Flux, ou le retarderont & le diminueront, ſelon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le Flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut ſe contenter de ces effets, & qu'il eſt difficile & même impoſſible d'en marquer le détail, ou des meſures préciſes.

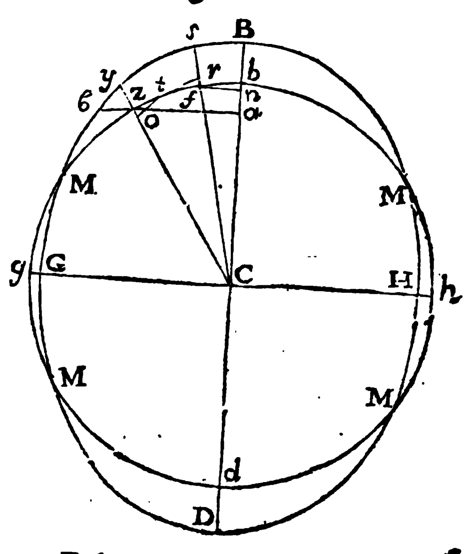
I I.

La ſeconde circonſtance qui fait varier les Marées, eſt la ſituation du Port, ſa profondeur, ſa communication avec la Mer libre, la pente de ſon fonds & des environs, &c. Tout cela fait qu'il eſt impoſſible de marquer l'heure abſoluë des Marées dans les Ports, ou Bayes, ou Côtes differemment ſituées. Mais comme toutes circonſtances demeurent toujours les mêmes, on peut ſuppoſer qu'elles font le même effet ſur toutes les Marées; ſçachant donc combien la Marée eſt retardée dans les Syzygies, on la ſçaura auſſi à-peu-près dans toutes les autres ſituations.

tuations de la Lune. Cette ſuppoſition eſt la ſeule reſſource qui nous reſte : j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les différentes déclinaiſons des deux Luminaires à l'égard de l'Equateur: il n'eſt pas vraiſemblable non plus, qu'elle ſoit également juſte pour les grandes Marées dans les Syzygies, & pour les Marées bâtardes dans les Quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, pluſieurs Obſervations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des Marées répond aſſez bien à la Théorie. Il faut donc ſçavoir par un grand nombre d'Obſervations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, & ajoûter cette heure au tems marqué dans la ſeconde & troiſiéme Colonne de notre Table : c'eſt cette heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, que les Mariniers appellent *heure du Port*: elle varient extrêmement dans les différens Ports, comprenant tout le tems & durée d'une Marée.

III.

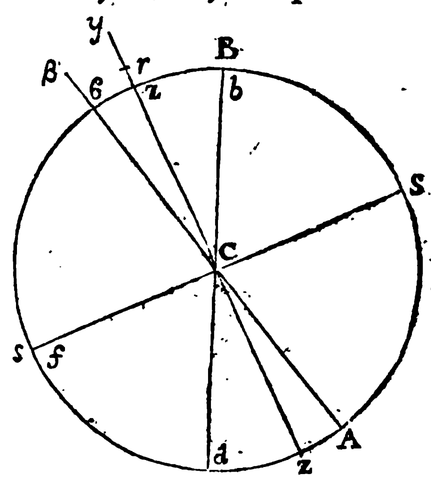
Ce retard de l'heure moyenne des pleines Mers dans les Syzygies, à l'égard du midi, s'obſerve auſſi dans la Mer libre, ou plutôt dans les Iſles qui ſont en pleine Mer : mais il n'eſt pas ſi grand, & vient d'une autre cauſe, ſçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéïr aſſez promptement, à cauſe de la viteſſe du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raiſonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude: On pourroit douter, ſi cette raiſon doit faire avancer ou retarder les Marées : Suppoſons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les Luminaires, que la haute Marée, répondent à un même Point dans cette Figure : comme le mouvement des Luminaires n'eſt pas ſenſible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les conſidérerons comme demeurant dans la ligne db: l'Equateur de la Terre changera ſa figure naturelle $bgdh$ en $BGDH$; & cette figure $BGDH$ tournant autour du Centre C de B vers G, le ſommet B viendra quelque tems après en y: cela étant, ſi les eaux pouvoient ſe compoſer dans un inſtant dans un état d'équilibre, l'élévation Bb devroit ſe changer en yz, & la force qui devroit produire ce changement, ſeroit exprimée par $Bb - yz$: mais cette force étant infiniment petite, ſi l'Angle BCy



 eſt

eſt infiniment petit, elle ne ſçauroit produire tout ſon effet. On voit par-là, qu'il faut ſuppoſer l'Angle *B C y* d'une grandeur conſidérable, &, conſidérer enſuite le ſommet *B* comme tranſporté en *y*, afin que la différence des preſſions ſoit aſſez grande, pour conſerver le ſommet des eaux au Point *y*, malgré la rotation du Globe. Le vrai ſommet étant donc en *y*, l'Angle *B C y* ſera l'Angle horaire, qui marquera les retardemens réels des hautes Marées ſur le paſſage de la Lune par le Méridien. Là-deſſus nous pourrons faire les Remarques qui ſuivent.

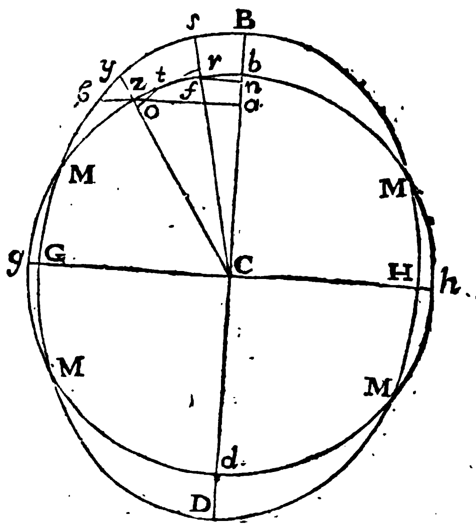
1°. Si les Luminaires ne ſont pas en conjonction, & que le Soleil ſoit en *b*, & la Lune en *ε* on pourra conſidérer la choſe, comme ſi les Luminaires étoient en conjonction, mais dans la Ligne *C z*, déterminée de poſition au VIII. §. du Chap. V. & augmenter toujours l'Angle *b C z* de l'Angle *B C y*, dont nous venons de parler: d'où il paroit que l'Angle horaire *B c y* doit toujours être ajoûté au tems marqué dans la troiſiéme Colonne de notre précedente Table: car la hauteur des Marées ne paroît pas devoir changer la choſe, puiſque les changemens de preſſion pour un petit tems donné, ſont proportionnels aux baiſſemens des eaux; qui doivent ſe faire pour conſerver le ſommet des eaux dans un même Point *y*.



2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent; l'Angle *B C y* ſeroit nul: mais il doit être plus grand, d'autant qu'on ſuppoſe le mouvement journalier plus grand & plus prompt; & la différence des hauteurs entre les hautes & baſſes Marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la viteſſe du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine Mer répondroit preſque au Point *G*; mais auſſi la différence des hautes & baſſes Mers ſeroit comme nulle. Il me ſemble après avoir bien conſidéré la choſe, que les hauteurs des Marées dans les Syzygies doivent être cenſées proportionnelles aux Sinus des Angles *G C y* dans la Mer libre, & que ſi la hauteur *B b* ſans le mouvement journalier de la Terre eſt $=\varepsilon$, elle ſera avec le mouvement journalier de la Terre $=\frac{C\alpha}{C\,b}\times\varepsilon$. Or, comme on a obſervé, que dans la Mer libre la haute Marée ſuit environ de deux heures le midi dans les Syzygies; il faut ſuppoſer l'Angle

gle BCy de 30 dégrés, & les forces abſolues des Luminaires doivent être ſuppoſées plus grandes en raiſon de $\sqrt{3}$ à 2 pour élever les eaux, autant qu'elles le ſeroient ſans le mouvement journalier de la Terre.



I V.

Nous avons encore fait voir, que ſans le concours des cauſes ſecondes, les plus grandes Marées devroient ſe faire dans les Syzygies, & les plus petites dans les Quadratures. Cependant on a obſervé, que les unes & les autres ſe font un ou deux jours plus tard. Ce retardement eſt encore produit, ſinon pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être miſes en mouvement, & qui ne ſçauroient obéir aſſez promptement aux forces qui les ſollicitent, pour leur faire ſuivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cauſe, & M. Caſſini me paroit le ſoupçonner de même, quoi qu'il ne ſe ſerve pas de nos principes, la voici: c'eſt qu'il ſe pourroit bien que cette cauſe, qui nous eſt encore ſi cachée, & qui donne une tendance mutuelle aux Corps flottans & compoſans le ſyſtême du monde, que cette cauſe, dis-je, ne ſe communiquât pas dans un inſtant d'un Corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un Torrent central de matiere ſubtile, & d'une étenduë infinie, vers le centre de la Terre, & un ſemblable vers le centre de la Lune, ces deux Torrens pourroient produire la Gravitation mutuelle de ces deux Corps, & la viteſſe du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune juſqu'à la Terre: en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire ſur notre Océan, ſeroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la ſuppoſition que la Gravitation ſe communique dans un inſtant. Quoi qu'il en ſoit, comme ce retardement a été obſervé le même à-peu-près après les Syzygies & après les Quadratures, nous pouvons encore ſuppoſer, qu'il eſt le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'eſt-à-dire, que les Marées ſont toujours telles, qu'elles devroient être, ſans leſdites cauſes, un ou deux jours auparavant.

Au reſte je n'ai mis ici ce que je viens de dire ſur la cauſe qui pourroit produire la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde (Gravitation, qu'il n'eſt plus permis de revoquer en doute) que comme

un exemple: je ne prétens pas expliquer ce Phénomene, j'avoue même, qu'il m'eſt encore tout-à-fait incompréhenſible: je ne crois pas non plus que l'ACADEMIE en ait voulu demander une explication; je ſouhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient ſe ſervir d'autres principes, pour expliquer le Flux & Reflux de la Mer, ne le feroient qu'en apparence, & que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne ſeroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la Gravitation ou l'Attraction mutuelle du Soleil, de la Lune & de la Terre, ſans diſconvenir pour cela de nos principes au fond, leſquels ſont ſûrs, & doivent être conſidérés comme des faits averés par l'expérience.

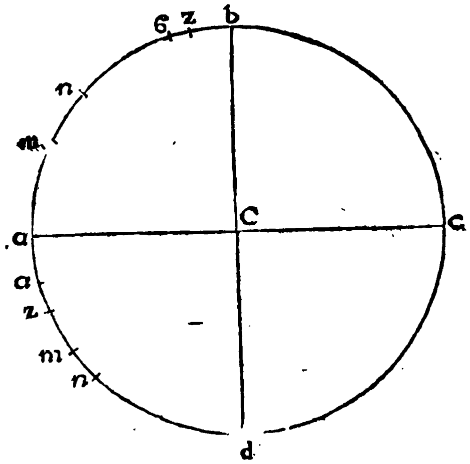
V.

Je profiterai de cette occaſion, pour parler d'un des principaux Phénomenes, & pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire là-deſſus, & dont l'éclairciſſement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre Méthode & de nos Calculs.

On a déterminé après un nombre infini d'Obſervations, que dans les Syzygies l'heure moyenne de la haute Mer eſt à Breſt à 3 heures 28 minutes, & dans les Quadratures à 8 heures 40 minutes; & que la différence n'eſt que de 5. heures 12. minutes depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures. Cette différence a été obſervée tout-à-fait la même à Dunkerque, & dans d'autres Ports; quoique les heures des Marées ſoient différentes aux divers Ports. C'eſt donc ici une Obſervation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale & bien averée: cependant il eſt certain, que ſans les cauſes ſecondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du Port pour les Syzygies; & pour les Quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'eſt-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

L'heure moyenne de la haute Mer dans les Syzygies, eſt dans la Théorie pure préciſément à midi, puiſqu'il faut conſiderer les Syzygies, comme tombant préciſément ſur l'heure du midi. Si les Syzygies ſe faiſoient plus tard, la haute Mer arriveroit plus tôt & reciproquement; & les accélerations compenſent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'obſervations. L'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, doit être de même cenſée celle qui ſe fait, lorſque la Quadrature ſe fait préciſément à midi; car, lorſqu'il eſt queſtion d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'eſt-à-dire l'heure du midi, afin que les différences ſe détruiſent ou ſe compenſent les unes les autres. Soit donc le Soleil au Zenith *b*, & la Lune en *a* à 90 dégrés du Zenith, ou à l'Horiſon: cela étant, on voit que ſi la haute Mer eſt ſuppoſé ſe faire préciſément au moment du paſſage de la Lune par le Méridien,

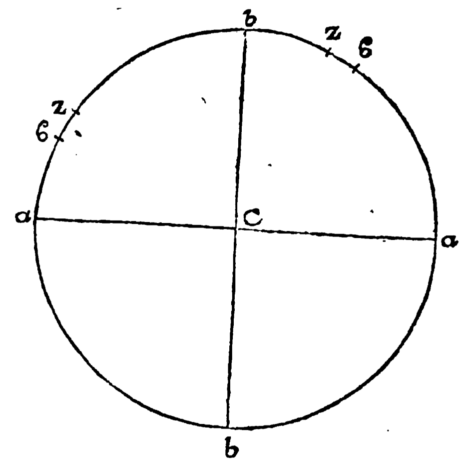
ridien, elle doit ſe faire 6 heures lunaires après midi; car le Point *b* doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'Arc horaire *b a α* (ſuppoſant que le paſſage de la Lune par le Méridien, qui a été à l'heure du midi en *b*, réponde au Point *α*); mais pour parler plus préciſément, la Lune & le Méridien ſe trouvant en *α*, la haute Marée répondra au Point z', & l'Arc *α* z ſera égal aux deux tiers du petit Arc *a α* (§. *XIII. Chap. VI.*) c'eſt donc l'Arc *b a* z' qui marque l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures: l'Arc *b a* eſt



de 90 dégrés; le petit Arc *a α* eſt d'environ 3. dégrés, & l'Arc *α* z' de 2 dégrés, & par conſéquent l'Arc *b a* z' de 95 dégrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abſtracto* l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, pendant que celle des Syzygies eſt à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, ſuivant les Obſervations, on ne trouve que 5. heures 12 minutes à la place de 6 heures 20. minutes. Je répons que c'eſt cette même anticipation des Syzygies & des Quadratures à l'égard des plus grandes & des plus petites Marées, dont nous avons parlé dans le précedent Article, qui en eſt la cauſe. Il eſt ſi vrai, que c'eſt ici la véritable raiſon, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes Mers pour les Syzygies & les Quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement ladite anticipation, ſur laquelle on eſt encore bien diviſé, les uns la faiſant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé aſſez exactement, & d'un commun accord l'autre Point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en conſidérant que les Marées ſe reglent après les Luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant: imaginons-nous les

Syzy-



Syzygies ſe faire en b & les Quadratures en b & a: l'effet des Luminaires ſera, en vertu de notre ſuppoſition, dans le tems des Syzygies, comme ſi le Soleil étoit en b, & la Lune en 6, en prenant l'Arc $b6$ d'environ $25\frac{1}{4}$ dégrés; & le même effet dans les Quadratures ſera comme ſi le Soleil étant en b, la Lune ſe trouvoit en 6^1 environ $64\frac{3}{4}$ dégrés; dans les Syzygies, la haute Mer répond au Point z, & dans les Quadratures au Point z^1. C'eſt donc l'Arc zbz^1 qui exprime l'Arc horaire entre l'heure moyenne de la haute Mer des Syzygies & celle des Quadratures (ſubſtituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cauſe du mouvement de la Lune.) Or la Table miſe à la fin du précedent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les Syzygies à $25\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, l'heure de la haute Mer eſt à 10 heures 46. minutes du matin; & que la Lune étant après les Syzygies à $64\frac{3}{4}$ dégrés du Soleil, la haute Mer ſe fait à 3 heures 35 minutes du ſoir: l'intervalle eſt donc de 4 heures 49 min. tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce reſultat répond déja aſſez bien à l'Obſervation, qui le donne de 5. heures 12. minutes.

Mais ſi au lieu de deux jours on prend $\frac{8}{5}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu près à 20 dégrés de diſtance de la Lune depuis les Syzygies & les Quadratures, l'heure moyenne de la haute Mer le jour des Syzygies, ſera en vertu de la Table, à 11 heures 2 minutes du matin, & le jour des Quadratures, à 3 heures $59\frac{1}{2}$ minutes du ſoir; & l'intervalle de l'une à l'autre ſera de 4. heures $57\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire, qui fait à-peu-près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en queſtion, en donant un jour & demi au retardement des Marées, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que l'état des Marées eſt tel qu'il devroit être naturellement, un jour & demi plutôt: c'eſt alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine Mer aux Syzygies à heures pareilles aux Quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'Obſervations l'a donné: auſſi ce terme d'un jour & demi, eſt-ce celui qui eſt le plus conforme aux Obſervations, & en conſultant les Tables qui ſont dans les Me-

Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. & 332. & prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonſtances, l'explication naturelle de ce Phénomene, ſa conformité avec toutes les Obſervations faites juſqu'ici, & ſon uſage pour déterminer au juſte un des points des plus eſſentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, font bien voir la juſteſſe & la ſupériorité de nos Méthodes. *

VI.

Les autres corrections que l'on doit apporter aux Formules & à la Table du précedent Chapitre, regardent l'hypotheſe que nous avons faite, pour rendre d'abord la Queſtion & les Calculs plus faciles; ſçavoir *que les deux Luminaires font des Cercles parfaits autour de la Terre, & cela dans le plan de l'Equateur.* Cette ſuppoſition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les diſtances des Luminaires à la Terre, auſſi-bien que dans leur mouvement, & elle fait outre cela leur déclinaiſon, à l'égard de l'Equateur, nulle. Voyons donc à préſent ce que les différentes diſtances, l'inégalité des viteſſes & l'obliquité des orbites peuvent faire ſur l'heure des Marées.

VII.

Les différentes diſtances des deux Luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces ſur la Mer; & c'eſt cependant de ce rapport que dépendent preſque toutes les Propoſitions du précedent Chapitre. Nous avons ſuppoſé ce rapport pour les diſtances moyennes de la Lune & du Soleil, comme 5 à 2, fondés ſur un grand nombre d'Obſervations, qui doivent nous confirmer dans cette ſuppoſition, à l'égard des variations des diſtances, après avoir remarqué & démontré la Propoſition qui ſuit:

Les Forces de chaque Luminaire ſur la Mer ſont en raiſon reciproque triplée de leurs diſtances à la Terre.

En voici la Démonſtration. Nous avons dit & démontré au Chapitre quatriéme, que la Force de chaque Luminaire eſt généralement $= \frac{ngb}{Ga}, \times b$ en entendant par n un nombre conſtant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la péſanteur dans la region de la Terre vers le Luminaire à la péſanteur qui ſe fait vers le centre de la Terre, & par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la

* Je vois après avoir fini cette Piece, que M. Caſſini a deja indiqué ce que nôtre Remarque contient de Phyſique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

Terre b à la diſtance du Luminaire a: or comme les différentes diſtances ne changent que les quantités G & a, nous voyons que la Force de chaque Luminaire eſt conſtamment proportionelle à $\frac{g}{a}$, & la quantité g, qui exprime la péſanteur vers le centre du Luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des Diſtances a, il s'enſuit que les Forces de chaque Luminaire ſur la Mer, ſont en raiſon reciproque triplée de leurs Diſtances à la Terre.

M. Newton a déja démontré cette Propoſition, qui ſe confirme auſſi par toutes les Obſervations faites ſur les Marées, quand on en fait une juſte eſtime, & une application bien ménagée. La Propoſition que nous venons de démontrer, nous enſeigne qu'à la place de notre Equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\epsilon$, employée dans le Chapitre précedent, il faut ſe ſervir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \epsilon.$$

en dénotant par l & s les diſtances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, & par L & S leurs Diſtances données quelconques; & là-deſſus on pourra calculer toutes les Queſtions traitées ci-deſſus pour des Diſtances quelconques entre les Luminaires & la Terre: mais nous ne conſidérerons que deux cas, 1°. Lorſque la Lune étant dans ſon Périgée, & la Terre dans ſon Aphelie, le rapport de δ à ϵ devient le plus grand; & 2°. Lorſque la Lune étant au contraire dans ſon Apogée, & la Terre dans ſon Perihelie, le rapport de δ à ϵ devient le plus petit. Nous donnerons 1000 parties à la diſtance moyenne de la Lune, 1055 à ſa plus grande diſtance, & 945 à ſa plus petite diſtance; & pour le Soleil, nous poſerons les pareilles diſtances être en raiſon de 1000, 1027 & 983: & nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3,115\,\epsilon$; & dans le *ſecond* cas $\delta = 2,022\,\epsilon$.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous ſuppoſerons ſimplement pour le premier cas $\delta = 3\,\epsilon$, & pour le ſecond $\delta = 2\,\epsilon$; & afin que nos regles ſoient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant preſque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Diſons donc ſimplement, que dans le Perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3\,\epsilon$, & dans l'Apogée $\delta = 2\,\epsilon$. Cela étant, voici les conſéquences que nous en tirons.

1°. Un jour & demi après les Syzygies, l'intervalle de deux Marées qui ſe ſuivent, eſt dans le Périgée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; & dans l'Apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour & demi après les Quadratures, le même intervalle eſt dans le Perigée de 25 heures 15 minutes; & dans l'Apogée de 25 heures

heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propoſitions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir ſe faire environ $2\frac{1}{4}$ jours avant & après les Quadratures, ſans nos corrections, mais qui ſera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, & $4\frac{1}{4}$ après les Quadratures) eſt de 39 minutes environ le Perigée de la Lune, & d'une heure environ ſon Apogée. Ce plus grand intervalle ſe fait auſſi plutôt dans le Perigée, & plus tard dans l'Apogée; la différence eſt d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la Table pareille à celle de ci-deſſus, mais qui ſerve pour le Perigée & pour l'Apogée de la Lune, nous remarquerons que les Sinus des petits Arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le paſſage de la Lune & la haute Mer ſont toujours

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

& qu'à la place de cette quantité, on peut ſubſtituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B}-\frac{3}{2B^3}$ (§. *XVIII. Chap. VI.*) & même qu'on peut négliger ici, ſans le moindre ſcrupule, le ſecond terme, puiſqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous conſidérerons donc ces petits Arcs horaires, comme reciproquement proportionnels aux quantités *B*, c'eſt-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta bb}{\varepsilon mn}+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter ſans peine les deux derniers termes pour notre preſent deſſein, & dire par conſéquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{\varepsilon}$, tout le reſte étant égal, les intervalles entre le paſſage de la Lune, & la haute Marée ſont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{\varepsilon}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{\varepsilon}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la ſeconde Colonne de notre précedente Table, doivent être multipliés par la Fraction $\frac{5}{6}$ dans le Perigée, & par $\frac{5}{4}$ dans l'Apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troiſiéme Colonne ſe déterminent comme dans la précedente Table. Mais quant aux nombres de la premiere Colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 dégrés, à cauſe du retard d'un jour & demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 dégrés, à la place deſquels je mettrai un nombre rond de 20 dégrés.

Voici donc à preſent une Table corrigée à l'égard de toutes les cir-

conſtances expoſées juſqu'ici. La premiere Colonne marque la diſtance qui eſt entre le Soleil & la Lune, environ le tems de la haute Mer, ou plutôt ici, environ le paſſage de la Lune par le Méridien. Les trois Colonnes ſuivantes marquent le nombre de minutes entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Mer pour le Perigée, pour les Diſtances moyennes & pour l'Apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures abſolues des hautes Mers pour les Perigées, les Diſtances moyennes & les Apogées de la Lune. Et pour ſe ſervir de cette Table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des ſix dernieres Colonnes l'heure moyenne du Port en vertu du III. §. La Table n'a été calculée que de dix en dix dégrés: les interpolations ſuppléeront avec aſſez de juſteſſe à telle autre Diſtance entre les deux Luminaires, que les Ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut auſſi être employée, lorſque la Lune ſe trouve à une Diſtance donnée de ſon Apogée ou Perigée.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIG

pour trouver l'heure des hautes Marées.

Diſtances entre les Luminaires au moment du paſſage de la Lune par le Meridien.	*Tems de la haute Mer avant & après le paſſage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.*			*Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut ſe ſervir au défaut des Ephémérides, qui marquent le paſſage de la Lune par le Méridien.*		
	Perigée de la Lune.	*Diſtance moyenne de la Lune.*	*Apogée de la Lune.*	*Perigée de la Lune.* H. M.	*Diſtance moyenne de la Lune.* H. M.	*Apogée de la Lune.* H. M.
0	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½
10	9½ après.	11½ après.	14 après.	0 49½	0 51½	0 54
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20
30	9½ avant.	11½ avant.	14 avant.	1 50½	1 48½	1 46
40	18 avant.	22 avant.	27½ avant.	2 22	2 18	2 12½
50	26 avant.	31½ avant.	39½ avant.	2 54	2 48½	2 40½
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10
70	37½ avant.	45 avant.	56 avant.	4 2½	3 55	3 44
80	38½ avant.	46½ avant.	58 avant.	4 41½	4 33½	4 22
90	33½ avant.	40½ avant.	50½ avant.	5 26½	5 19½	5 9½
100	21 avant.	25 avant.	31 avant.	6 19	6 15	6 9
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20
120	21 après.	25. après.	31 après.	8 21	8 25	8 31
130	33½ après.	40½ après.	50½ après.	9 13½	9 20½	9 30½
140	38½ après.	46½ après.	58 après.	9 58½	10 6½	10 18
150	37½ après.	45 après.	56 après.	10 37½	10 45	10 56
160	33 après	40 après.	50 après.	11 13	11 20	11 30
170	26 après.	31½ après.	39½ après.	11 46	11 51½	11 59½
180	18 après.	22 après.	27 ½ après.	0 18	0 22	0 27½

Cette Table ſuppoſe encore le plan des Orbites de la Lune & du Soleil être le même que celui de l'Equateur de la Terre, ce qu'il faut ſur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres Colonnes. Mais cette ſuppoſition n'a pas beaucoup d'influence ſur les autres Colonnes; & les Ephémerides, qui marquent le paſſage de la Lune par le Méridien, ſuppléeront aux trois dernieres.

VIII.

Après avoir expoſé au long tout ce que les différentes diſtances des Luminaires, & ſur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des Marées, nous dirons auſſi un mot ſur l'inégalité du mouvement des Luminaires.

Cette inégalité ſeroit d'une très-grande importance, s'il falloit conſtruire une Table pour les heures des Marées, ſans ſe rapporter aux Tables & aux Ephémerides: mais elle ne nous eſt d'aucune conſéquence, puiſque nous ſuppoſons l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, auſſi-bien que l'Arc compris entre les deux Luminaires, connus par les Ephémerides. C'eſt la raiſon qui m'a engagé à rapporter l'heure des Marées au paſſage de la Lune par le Méridien, en donnant une Table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde ſur l'autre.

IX.

Il nous reſte à conſidérer les inclinaiſons des Orbites à l'égard de l'Equateur: pour cet effet il faut concevoir un Cercle qui paſſe par les centres du Soleil, de la Lune & de la Terre; & c'eſt proprement ce Cercle que doivent repréſenter toutes nos Figures, que nous avons conſidérées juſqu'ici, comme repréſentant l'Equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les Points reſteront dans ce Cercle aux mêmes endroits; & que les Arcs ſe conſerveront tels, que nous les avons déterminés: mais les Angles horaires formés ſur l'Equateur par ſes Arcs, en ſont changés. On ne ſçauroit ſans une Théorie parfaite de la Lune déterminer au juſte ces Angles horaires, à cauſe de la variabilité de l'inclinaiſon de l'Orbite lunaire à l'égard de l'Equateur; mais auſſi ce changement n'eſt-il pas fort conſidérable, par rapport à l'Arc horaire compris entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & le moment de la haute Mer; nous ſuppoſerons, & nous pouvons le faire ici ſans aucune erreur ſenſible, que les Orbites de la Lune & du Soleil ſont dans un même plan, ayant chacune une inclinaiſon avec l'Equateur de $23^{d}.\ 30^{m}$. & nous conſidérerons là-deſſus la Lune dans trois ſortes de ſituation: 1°. Lorſque ſa déclinaiſon, à l'égard de l'Equateur, eſt nulle; & alors

il faut multiplier les nombres de la ſeconde, troiſiéme & quatriéme Colonnes de notre Table par $\frac{92}{100}$, & ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & l'heure de la haute Mer. 2°. Lorſque la Lune ſe trouve dans ſa plus grande déclinaiſon à l'égard de l'Equateur ; & alors il faut multiplier leſdits nombres de notre Table par $\frac{100}{92}$. Et enfin 3°. lorſque la Lune ſe trouve au milieu de ces deux ſituations ; auquel cas il faut ſe ſervir de notre Table, ſans y apporter aucun changement. Quant aux autres ſituations de la Lune en longitude, on peut ſe ſervir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles ſont fondées ſur la proportion qu'il y a entre les petits Arcs de l'Ecliptique & de l'Equateur, compris entre deux mêmes Méridiens fort proches l'un de l'autre.

X.

Il ſuit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle poſſible entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée, eſt environ un jour avant les Quadratures, & quatre jours après les Quadratures, la Lune dans ſon Apogée & dans ſa plus grande déclinaiſon à l'égard de l'Equateur de la Terre ; & que dans le concours de toutes ces circonſtances, ledit plus grand intervalle peut aller juſqu'à 63 minutes de tems, que la haute Marée avancera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien un jour avant les Quadratures, & qu'elle retardera quatre jours après les Quadratures.

X I.

Voilà mes refléxions ſur le tems des Marées ; je me flatte qu'elles ont toute la préciſion qu'on peut eſperer ſur cette matiere, du moins quant à la Méthode. Toute l'incertitude qui y reſte encore, eſt fondée ſur le rapport moyen entre les forces de la Lune & du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puiſque tous nos Théoremes conviennent ſi bien avec les Obſervations. Un plus grand nombre d'Obſervations nous donnera peut-être un jour plus de préciſion là-deſſus. Il eſt vrai que nous n'avons déterminé l'heure & les intervalles des Marées, que ſous la Ligne Equinoctiale ; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puiſſe changer ſenſiblement les intervalles des Marées : ainſi je n'ai pas jugé néceſſaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaiſon avec la hauteur des Marées : c'eſt à quoi nous ferons attention dans la ſuite.

CHA-

CHAPITRE VIII.

Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.

JE me propoſe à préſent d'examiner les diverſités des hauteurs des Marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous ſuppoſerons d'abord pris ſous l'Equateur, pour toutes les diverſes circonſtances qui peuvent ſe rencontrer. Nous ſuivrons, pour cet effet, la même Methode que nous avons obſervée pour déterminer généralement l'heure des Marées, c'eſt-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus ſimples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant ſurmonter trop de difficultés à la fois: nous nous ſervirons donc d'abord des mêmes hypotheſes que nous avons employées dans le Chap. VI. & que nous avons expoſées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pouſſerons nos recherches dans le Chapitre ſuivant à tous les cas poſſibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des Marées.

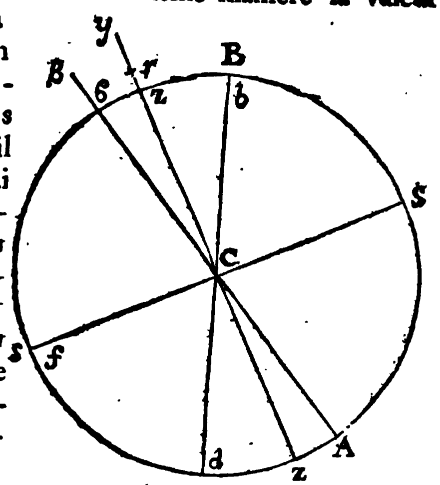
II.

J'entens par hauteur d'une Marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer ſuivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. §. XI. XII. & XIII. du Chap. V. qui determinent l'Equateur, les lieux de la Lune & du Soleil étant donnés, la poſition des deux points auſquels la Mer eſt la plus haute & la plus baſſe; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute Mer, & enſuite la hauteur de la baſſe Mer.

III.

Remarquons d'abord, que les deux points de la Circonférence, qui marquent la haute & la baſſe Mer, ſont éloignés entre eux de 90 dégrés. On le voit par les expreſſions des §. §. XI. & XIII. & nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Suppoſant donc le Soleil répondre au Point *b*, la Lune au Point *ϐ*, & que la haute Mer réponde au Point *z*, il faut prendre l'Arc *zs* de 90 dégrés,

grés, & le Point s ſera celui qui répond à la baſſe Mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de yz, qui marque l'élevation des eaux pour le Point z; & enſuite prenez de la même maniere la valeur de sx, qui étant négative, marque la dépreſſion des eaux; cela étant fait, on voit que la ſomme de yz & de sx marquera la hauteur de la Marée; mais dans l'expreſſion analytique de sx, il faut changer les Signes. Il eſt vrai que cette Methode ſuppoſe, que pendant l'intervalle, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer, la Lune ne change pas de place; & c'eſt à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois dégrés l'Arc $b\beta$ dans le Calcul de sx: mais ce feroit une exactitude hors de place, & qui augmenteroit beaucoup les peines du Calcul, qui n'eſt déja que trop embaraſſé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja inſenſible par ſa nature, en prenant l'Arc $b\beta$, tel qu'il eſt, non au moment de la haute Marée, ni à celui de la baſſe Mer, mais au milieu de leur intervalle; & c'eſt ce que nous ſuppoſerons dans la ſuite.



Soit donc comme dans le V. Chap. le Sinus de l'Arc $b\beta = m$; ſon Coſinus $= n$; le Sinus de l'Angle $bCz = \sigma$; le Sinus de l'Angle $\beta Cz = \varrho$; le Sinus total $= b$; & nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$

De là on trouvera sx en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $bb - \sigma\sigma$, & $bb - \varrho\varrho$ à la place de $\sigma\sigma$ & de $\varrho\varrho$: & de cette façon on aura

$$sx = \frac{3\sigma\sigma - bb}{3bb} \times \beta + \frac{3\varrho\varrho - bb}{3bb} \times \delta.$$

Changez à preſent les Signes dans la valeur de sx, & ſuppoſez la hauteur de la Marée $= M$, & vous aurez

$$M = \frac{bb - 2\sigma\sigma}{bb} \times \beta + \frac{bb - 2\varrho\varrho}{bb} \times \delta.$$

Cette derniere expreſſion marque généralement la hauteur des Marées, puiſqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma\sigma$ & $\varrho\varrho$ par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. Mais les Calculs ne laiſſent pas d'être aſſez pénibles, quoi-que les Formules ne ſoient pas prolixes. Nous tâcherons

 donc

donc de rendre ces Calculs plus faciles, ſans déroger beaucoup à l'exactitude des Formules.

I V.

Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, ſi la Force lunaire étoit infiniment plus grande que la Force ſolaire. On auroit en ce cas $\rho = o$ & $\sigma = m$,

$$M = \zeta + \delta - \frac{2mm}{bb} \times \zeta,$$

laquelle Formule ne ſçauroit manquer d'être aſſez approchante ; elle donne même la juſte valeur pour les Syzygies & pour les Quadratures.

V.

Pour déterminer les hauteurs des Marées plus exactement encore, nous conſidérerons la valeur de ρ comme fort petite, au lieu de la ſuppoſer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons ſuppoſer hardiment $\rho = \frac{\zeta mn}{\delta}$, & on verra que cette ſuppoſition ne ſçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, ſi l'on conſulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, & le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver, n'eſt preſque d'aucune conſéquence pour notre préſent ſujet. On voit outre cela, que ρ étant fort petit, on peut ſuppoſer cette Analogie

$$\rho : m - \sigma :: b : n;$$

puiſque cette Analogie ſeroit exactement vraie, ſi les quantités ρ & $m - \sigma$ étoient réellement & infiniment petites : de cette Analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\rho}{b} = m - \frac{mnn\zeta}{b\delta};$$

ſubſtituant ces valeurs expoſées pour les quantités ρ & σ, & faiſant le Sinus total $b = 1$, on obtient cette Equation,

$$M = \zeta + \delta - 2mm\zeta + \frac{2m^2n^2\zeta\zeta}{\delta} - \frac{2m^2n^4\zeta^3}{\delta\delta}.$$

De cette maniere il paroit que les Marées décroiſſent depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elles croiſſent avec la même loi depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Ceux qui voudront eſſayer la juſte Equation du §. III. & cette Equation approchante, ſur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

V I.

Il nous ſera facile à préſent de calculer & de donner une Table pour les hauteurs des Marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des Marées, & pour laquelle nous tâcherons

rons dans le Chapitre ſuivant de trouver les corrections néceſſaites aux différentes circonſtances, tout comme nous avons fait à l'égard de ladite Table du VI. Chap. Nous ſuppoſerons encore le rapport moyen de ☾ à ☉ être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des Obſervations qui puiſſent déterminer ce rapport au juſte. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande Marée.

La *premiere* Colonne marquera dans cette Table de dix en dix dégrés les Arcs compris entre les deux Luminaires, environ le milieu des Juſans (§. III.) c'eſt-à-dire, environ trois heures après le paſſage de la Lune par le Méridien; la *ſeconde* Colonne donnera les hauteurs cherchées des Marées, pour les ſuſdites hypotheſes; & la *troiſiéme* en marquera les différences.

TABLE FONDAMENTALE

pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Deſcentes verticales des eaux pendant les Juſans.

Diſtance entre les Luminaires en Dégrés.	*HAUTEUR DES MARÉES.*	*DIFFERENCE DES HAUTEURS.*
0 Dégrés.	1000 Parties.	
10	987	− 13
20	949	− 38
30	887	− 62
40	806	− 81
50	715	− 91
60	610	− 105
70	518	− 92
80	453	− 65
90	429	− 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000	+ 13

VII.

Si on avoit voulu conſtruire cette Table conformément à l'Equation finale du §. III. qui eſt la vraie Equation, on auroit pu profiter de la Table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la ſeconde Colonne diviſés par 4, donnent les dégrés de l'Arc, dont le Sinus eſt appellé ϱ; après quoi on connoît auſſi l'Arc dont le Sinus eſt appellé σ. Connoiſſant ainſi par les Tables les quantités ϱ & σ, on trouve ſans beaucoup de peine la valeur de M du §. III.

VIII.

On voit auſſi, que ſi la diſtance entre les deux Luminaires eſt entre deux nombres de la premiere Colonne, on peut ſans aucune erreur ſenſible employer le principe général des Interpolations, de ſorte que cette Table peut ſuffire pour tous les cas.

IX.

On remarquera au reſte, qu'il eſt ici de grande importance d'avoir ſubſtitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\epsilon}$, & qu'un aſſez petit changement dans cette valeur, a une grande influence ſur le rapport des Marées. On ne doit donc encore conſidérer cette Table, que comme un exemple de nos Formules générales: le Chapitre ſuivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-deſſus.

X.

Nous voyons tant par les Formules que nous avons données pour les hauteurs des Marées, que par la précedente Table, qu'elle eſt *in abſtracto* la nature des variations des Marées. On peut faire là-deſſus les Remarques qui ſuivent.

1°. Que les changemens des Marées ſont fort petits, tant aux Syzygies qu'aux Quadratures, & ils ſeroient infiniment plus petits que les autres, ſi l'intervalle d'une Marée à l'autre étoit auſſi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne ſe font pas préciſément au milieu, mais plus près des Quadratures que des Syzygies: c'eſt-à-dire, que la plus grande diminution de Marée ſe fait dans nos ſuppoſitions, lorſque la Lune eſt environ à 60 dégrés (80 avec la correction de 20 dégrés expliquée au Chap. VII.) depuis les Syzygies; le plus grand décroiſſement ſe fait donc de la neuviéme à la dixiéme Marée (de

la douziéme à la treiziéme avec la correction) : de même le plus grand accroiſſement ſe fait à environ 30 dégrés depuis les Quadratures (50 dégrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme Marée (de la ſeptiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les Quadratures. Je parle dans cette Remarque de toutes les Marées qui ſe font, tant celles du matin, que celles du ſoir, pour rendre leurs intervalles plus petits : on ſe ſouviendra cependant de ce que j'ai dit expreſſément, que je fais abſtraction par-tout ailleurs des Marées, qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, lorſqu'il s'agit de comparer les Marées entre elles : car ces deux ſortes de Marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore conſidérées.

3°. Que les petits changemens dans les Syzygies, & ceux des Quadratures, comparés entre eux, ſont inégaux ; puiſque ceux-ci ſont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette Remarque il faudra ajoûter, de part & d'autre, trois Marées, ou environ un jour & demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux Marées qui ſe ſuivent, entre celles qui répondent à la Lune de deſſus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la diſtance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite Marée.

X I.

Je ne doute pas que les Obſervations ne confirment en gros les Remarques que je viens de faire, & toutes les Regles précedentes. On ne ſçauroit plus douter de la Théorie que nous avons adoptée & établie ; & la Théorie poſée, les Calculs en ſont ſûrs. Mais comme nous ne ſommes pas encore ſûrs des hypotheſes ſecondes, qu'on ne ſçauroit éviter, telles que ſont le juſte rapport entre la force lunaire & ſolaire, que nous avons ſuppoſé comme 5 à 2 ; le retardement des effets de la Lune ſur ſa poſition, que nous avons ſuppoſé d'un jour & demi, ou de trois Marées, ou de 20 dégrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le reſultat deſdites Remarques & Regles. Cependant comme je n'ai fait aucune ſuppoſition ſans un mur examen fondé ſur les plus juſtes Obſervations choiſies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oſerois me flatter d'un aſſez bon ſuccès, ſi Meſſieurs les ACADEMICIENS vouloient ſe donner la peine de confronter nos Tables, nos Regles & nos Théoremes nouveaux avec les Obſervations, dont ils ont un grand Tréſor : mais ce ſuccès, dont je me flatte par avance, ſe manifeſtera davantage, ſi ils veulent encore faire attention aux correc-

corrections que je vais donner dans le Chapitre ſuivant, à l'égard de diverſes circonſtances variables, & que nous avons ſuppoſées dans ce Chapitre comme conſtamment les mêmes.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, ſuivant différentes circonſtances variables.

I.

NOus ſuivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des Marées. Pour commencer donc par l'effet des Vents & des Courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter & diminuer les Marées, & que ces variations ne ſont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorſque ces cauſes conſervent pendant un tems un peu conſidérable leur force & leur direction, leur effet conſiſtera plûtôt à hauſſer ou baiſſer la Mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les Marées.

II.

Les circonſtances attachées à chaque Port ou autre endroit en particulier, telles que ſont ſa ſituation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'Océan, &c., font extrêmement varier les Marées. Ce ſont ces cauſes qui ſont que les grandes Marées ne ſont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits de 8 ou 10 pieds dans d'autres, & de 50 à 60 pieds, & au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de ſingulier, eſt que dans la Mer libre les grandes Marées ne ſont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elle vont au-delà de 50 pieds dans pluſieurs Ports & autres endroits, dont la communication avec la Mer ouverte, eſt entrecoupée & empêchée de tous côtés; & qui par conſéquent devroient, ſelon les premieres apparences, avoir les Marées moins grandes. Nous donnerons dans un autre Chapitre la raiſon hydroſtatique de ce Phénomene, pour ne point nous écarter de notre ſujet préſent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne ſçauroit rien déterminer ſur les grandeurs abſoluës des Marées, & que tout ce que la Théorie pourroit encore faire, ſeroit d'en marquer le rapport: mais l'expérience nous enſeigne encore, que ce rapport même n'eſt pas conſtant dans les différens endroits, quoi qu'il ſoit renfermé dans des bornes plus étroites.

La

La grande Marée ſera double de la petite Marée dans un endroit; & elle pourra être triple dans un autre: c'eſt que les cauſes qui font varier les hauteurs abſoluës des Marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait conſtante. Mais les Marées moyennes entre la plus grande & la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être cenſées obſerver les regles que nous leur avons preſcrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente ſituation des Luminaires obſerveront à-peu-près les Loix que nous avons démontrées *in abſtracto*. Ces reflexions m'ont déterminé à conſidérer la plus grande & la plus petite Marée, non telles qu'elles devroient être dans la Théorie pure, mais telles qu'on les obſerve, lorſque les Luminaires ſe trouvent à peu près dans l'Equateur, & dans leurs diſtances moyennes à la Terre, ſans qu'aucune cauſe accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande Marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, & la hauteur de la petite Marée par $\delta - \epsilon$: mais ſi l'on ſuppoſe la hauteur moyenne réelle de la grande Marée A & de la petite Marée B, il faudra ſuivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \ \& \ \delta - \epsilon = B:$$

c'eſt-à dire,
$$\delta = \frac{A+B}{2}, \ \& \ \epsilon = \frac{A-B}{2};$$

& ces valeurs doivent être ſubſtituées dans les Equations & Formules du Chapitre précedent. En ſuppoſant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, & ſi cette raiſon étoit confirmée par les Obſervations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit ſe ſervir de la Table, telle qu'elle eſt, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande Marée. Mais ſi $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur conſidérablement différente de celle que nous venons de lui aſſigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit auſſi après ces conſidérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la derniere préciſion les hauteurs des Marées. Nous pourrons donc ſans ſcrupule, pour rendre nos Propoſitions plus nettes & plus ſenſibles, nous ſervir de l'équation du §. IV. Chap VIII. qui auſſi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous ſuppoſerons donc la hauteur des Marées toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2\,m\,m\,\epsilon$, & employant la correction indiquée, nous aurons à préſent

$$M = A - m\,m\,A + m\,m\,B, \text{ ou plus ſimplement,}$$
$$M = n\,n\,A + m\,m\,B:$$

C'eſt

C'eſt donc de cette derniere équation, que nous nous ſervirons dans la ſuite de cette Diſſertation.

III.

Cette correction pourra en même tems remédier à un autre inconvenient, qui provient de l'inertie & de la Maſſe des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les Marées ſont une eſpéce d'oſcillations qui tâchent naturellement à ſe conſerver telles qu'elles ſont: on ſent bien que cette raiſon doit empêcher les grandes Marées d'atteindre toute leur hauteur, & les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement: qu'elle ne doit pas changer ſenſiblement la Marée moyenne entre la plus grande & la plus petite, & qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles ſont plus éloignées de cette Marée moyenne. Et on voit que notre correction ſatisfait à toutes ces trois conditions.

IV.

Après ladite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des Marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les Phaſes de la Lune, ou par les diſtances, qui ſont entre les Luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. & V. du Chap. VII. que les Phaſes de la Lune qui répondent aux Marées en queſtion, ne doivent pas être priſes telles qu'elles ſont, mais telles qu'elles ſeroient environ un jour & demi après, c'eſt-à-dire, que les diſtances entre les Luminaires doivent être augmentées d'environ 20 dégrés, & moyennant cette correction, la Théorie ne ſçauroit manquer de ſatisfaire au juſte aux Obſervations.

V.

Nous n'avons conſidéré juſqu'ici les Luminaires, que dans leurs diſtances moyennes à la Terre, & c'eſt pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande Marée *A*, & celle de la plus petite Marée *B*. Pour déterminer donc ce que les différentes diſtances peuvent faire ſur les hauteurs des Marées, il faudra ſe rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être ſuppoſée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, & la Force ſolaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon$. Or comme la ſomme de ces Forces exprime toujours la hauteur de la grande Marée, & que la différence des mêmes Forces exprime la hauteur de la petite Marée, il faudra faire ces deux Analogies:

$$\delta + \varepsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta + \frac{s^3}{S^3} \times \varepsilon :: A : \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \varepsilon}{L^3 S^3 (\delta + \varepsilon)} \times A$$

$$\delta - \varepsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta - \frac{s^3}{S^3} \times \varepsilon :: B : \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \varepsilon}{L^3 S^3 (\delta - \varepsilon)} \times B.$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande Marée, & la ſeconde, la hauteur corrigée de la petite Marée. Par conſéquent l'équation finale du II. §. ſera celle-ci après ſa correction:

$$M = \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \varepsilon}{L^3 S^3 (\delta + \varepsilon)} \times nnA + \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \varepsilon}{L^3 S^3 (\delta - \varepsilon)} \times mmB.$$

Je m'aſſure que cette équation donnera toujours les hauteurs des Marées avec toute la juſteſſe qu'on peut attendre ſur cette matiere, pour les ſuppoſitions auſquelles notre Théorie eſt encore aſſujettie. Mais comme il eſt preſque impoſſible qu'il n'y ait abſolument aucune cauſe étrangére, qui trouble les Marées, nous ne devons pas être trop ſcrupuleux ſur ces corrections, qui ſont elles-mêmes médiocres. Ainſi pour rendre nos regles plus ſenſibles & plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les diſtances du Soleil à la Terre; ces changemens ſont beaucoup plus petits que dans la Lune, & ils ſont en même tems de beaucoup moindre conſéquence: Nous ſuppoſons donc S conſtamment $= s$. Quant à la Lune, nous la conſidérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans ſon Perigée, dans ſa diſtance moyenne & dans ſon Apogée, & nous retiendrons les ſuppoſitions que nous avons faites audit Article, pour les diſtances de la Lune, & pour les conſéquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta = 3\varepsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 0{,}8439$: pour le ſecond cas $\delta = \frac{5}{2}\varepsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}000$, & enfin pour le troiſiéme $\delta = 2\varepsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui ſuivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le Périgée de la Lune,

$$M = 1{,}138\, nnA + 1{,}277\, mmB.$$

2°. Pour les diſtances moyennes de la Lune;

$$M = nnA + mmB.$$

3°. Pour l'Apogée de la Lune

$$M = 0{,}901\, nnA + 0{,}703\, mmB.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande Marée, & B la hauteur de la petite Marée dans les diſtances moyennes des Luminaires à la Terre, ces Luminaires étant ſuppoſés l'un

l'un & l'autre ſe trouver dans l'Equateur : que *m* marque le Sinus de l'Arc compris entre les Luminaires diminué de 20 dégrés, & *n* le Coſinus de cet Arc.

On remarquera après cela, que les grandes Marées ſont compriſes en vertu de la premiere & de la troiſiéme équation dans les termes de 1138 à 901, & les Marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes Marées n'eſt pas à beaucoup près ſi grande, qu'elle l'eſt entre les Marées bâtardes, ſi on compare cette différence à la hauteur de la Marée qui lui répond. Cela ſe confirme par l'expérience, & c'eſt une nouvelle ſource des irrégularités des petites Marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, & que M. Caſſini n'a pas manqué d'obſerver.

V I.

J'ajoûterai ci-deſſous une Table fondée & calculée ſur les trois dites équations, mais qui ſe rapporte aux Quantités *A* & *B*, qu'il faut donc connoître par expérience pour le Port ou autre endroit, dont il eſt queſtion. On pourra déterminer ces Quantités *A* & *B*, ſur un grand nombre d'Obſervations, tant des hautes que des petites Marées, en prenant des unes & des autres le milieu Arithmétique.

V I I.

On remarquera, quant à la conſtruction de la Table que nous allons donner, que les Arcs compris entre les Luminaires, ont été augmentés de 20 dégrés à l'égard de la Table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux cauſes ſecondes & aux corrections à faire. Ces 20 dégrés ſont déterminés par le retard d'un jour & demi des Marées, par rapport aux Phaſes de la Lune, expliqué ci-deſſus : il eſt vrai que cet intervalle d'un jour & demi ne demande pas tout-à-fait 20 dégrés de correction : mais comme il faudroit eſtimer les diſtances entre les Luminaires, telles qu'elles ſont, non au moment de la haute-Mer (qui doit être ſuppoſée ſe faire au moment du paſſage de la Lune par le Méridien) mais au milieu du Juſan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. & que l'intervalle depuis la haute Mer juſqu'au milieu du Juſan, demande encore une correction d'environ un dégré & demi, la ſomme de ces corrections peut être ſuppoſée de 20 dégrés, en eſtimant les diſtances des Luminaires au moment du paſſage de la Lune par le Méridien, que les Ephémérides indiquent.

VIII.

Voici donc à préſent la Table. La *premiere* Colonne y marque les diſtances entre la Lune & le Soleil dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: les *trois* autres Colonnes marquent les hauteurs des Marées pour le Périgée de la Lune, pour les diſtances moyennes de la Lune à la Terre, & pour l'Apogée de la Lune.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E
pour trouver les Hauteurs des Marées.

Diſtances entre les Luminaires.	*HAUTEURS des Marées au Périgée de la Lune.*	*Hauteurs des Marées aux Diſtanees moyennes de la Lune à la Terre.*	*HAUTEURS des Marées à l'Apogée de la Lune.*
0 Deg.	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
10	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
20	1,138A+0,000B	1,000A+0,000B	0,901A+0,000B
30	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
40	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
50	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
60	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
70	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
80	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
90	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
100	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
110	0,000A+1,277B	0,000A+1,000B	0,000A+0,703B
120	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
130	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
140	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
150	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
160	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
170	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
180	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B

I X.

Il nous reſte à conſidérer les déclinaiſons des Luminaires & les latitudes des lieux ſur la Terre, pour leſquels on cherche la nature des Marées. Nous avons ſuppoſé les unes & les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere eſt ſi riche & ſi remarquable par pluſieurs propriétés très ſingulieres, & elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce ſera donc le ſujet du Chapitre ſuivant.

CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaiſons des Luminaires & des différentes latitudes des Lieux.

I.

LEs déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur, & les diſtances des lieux ſur la Terre du même Equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne ſçauroit bien traiter cette matiere, qui eſt une des plus importantes de notre ſujet, ſans les conſidérer les unes & les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la queſtion trop embarraſſante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme ſi les Marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous conſidérerons auſſi la choſe d'abord ſuivant la pure Théorie, & nous verrons enſuite quelles corrections on y pourra employer.

I I.

Reſſouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, & ſur-tout dans le cinquiéme, ſur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des Luminaires. Nous avons conſidéré la Terre d'abord comme parfaitement ſphérique : nous avons démontré enſuite que cette figure eſt changée par l'action de l'un des Luminaires en ellipſoïde, dont l'Axe prolongé paſſe par le centre du Luminaire agiſſant ; & enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque Point dans la ſurface de la Terre, doit tantôt ſe baiſſer, tantôt s'élever, afin que ſa figure ellipſoïde ſoit conſervée ; mais nous n'avons calculé ces baiſſemens & hauſſemens, que pour les

Points pris dans l'Equateur même, dans le plan duquel nous avons ſuppoſé en même tems ſe trouver l'Axe de l'Ellipſoïde. C'eſt pour ces cas, que nous avons démontré (§. *V. Chap. V.*) *que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute Mer*; & l'on remarquera que ces Angles horaires ſont proportionnels alors aux Arcs compris entre le Pole de l'Ellipſoïde & le Point en queſtion.

III.

Voici à préſent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baiſſemens & hauſſemens, qui ſe font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, & la Lune ayant auſſi une déclinaiſon quelconque. On voit qu'on aura toujours le même Ellipſoïde, quelle que ſoit la déclinaiſon de la Lune; mais qu'il ſera obliquement poſé à l'égard de l'Equateur: on voit auſſi qu'il faut s'imaginer dans ce Sphéroïde allongé une Section parellele à l'Equateur, qui paſſe par le point en queſtion: cette Section ne ſera pas un cercle parfait, & ſa circonférence n'aura pas tous ſes points également éloignés du centre de l'Ellipſoïde: c'eſt les différences de ſes diſtances, qui forment la nature des Marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

IV.

Pour cet effet il faudra commencer par chercher les diſtances de chaque point du Parallele au *Pole de l'Ellipſoïde* (j'appelle ainſi l'extrémité de l'Ellipſoïde, qui prolongé, paſſe par le centre de la Lune) & ces diſtances étant connues, il eſt facile de trouver la diſtance du même point au centre de l'Ellipſoïde, & les différences de ces diſtances. Car ſi le Coſinus de la diſtance d'un point pris dans le Parallele au Pole de l'Ellipſoïde étoit ϱ, le Sinus total $= 1$, & ſi le demi Axe de l'Ellipſoïde eſt nommé $b + \delta$, & le plus petit demi-diametre b, la diſtance du point pris par le Parallele juſqu'au centre de l'Ellipſoïde ſera généralement $= b + \varrho\varrho\delta$; nous avons démontré cette Propoſition au §. V. Chap. V.

V.

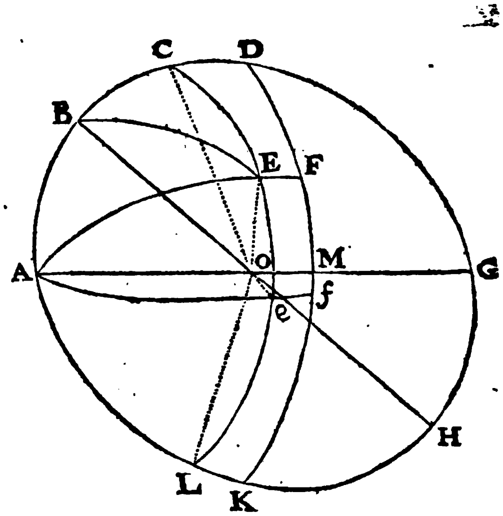
Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la diſtance d'un Point quelconque, pris dans un Parallele donné au Pole de l'Ellipſoïde. La voye de la Trigonometrie ſphérique ordinaire nous ſeroit aſſez inutile ici, puiſqu'il nous faut des expreſſions analytiques, applicables à tous les cas, & traitables aux Calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expreſſions des regles de ladite Trigonometrie, les formules qui en

en proviendroient ſeroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-deſſus un beau Mémoire inſéré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. 2. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois choſes données dans un Triangle ſphérique, trouver le reſte par des expreſſions analytiques extrêmement ſimples. Voici le cas que notre ſujet demande.

Soit dans un Triangle ſpherique, le Sinus total = 1; le Sinus d'un des côtés = S; le Coſinus du même côté = C; le Sinus d'un autre côté = s; le Coſinus de cet autre côté = c; le Coſinus de l'Angle compris entre les deux côtés donnés = y; le Coſinus du troiſiéme côté oppoſé à l'Angle donné, que j'appellerai q, ſera exprimé par cette équation

$$q = Ssy + Cc.$$

VI.



Soit à preſent $ADGK$ le Méridien de la Terre, qui paſſe par le centre de la Lune, & que la Lune réponde au point B, qui deviendra ainſi le Pole de l'Ellipſoïde, & la droite BH, qui paſſe par le centre O, ſon Axe. Soit l'Axe de rotation de la Terre AG, les Poles A & G; DFK l'Equateur; CEL un Parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque E, & qu'on tire enfin par ce point E, & par le Pole A l'Arc AEF.

De cette maniere, l'Arc AB ſera le complément de la déclinaiſon de la Lune; l'Arc AE ſera le complément de la latitude du point E, & l'Arc DF ſera l'Arc horaire depuis le paſſage du point E par le Méridien, qui paſſe par la Lune; de ſorte qu'on connoît dans le Triangle BAE, les Côtés BA & EA; avec l'Angle compris BAE, & de là on tirera par le moyen du Théoreme expoſé au précedent Article, l'Arc BE, qui eſt la diſtance du Point E au Pole de l'Ellipſoïde.

Nous nommerons donc encore le Sinus total 1, le Sinus du côté $AB = S$; ſon Coſinus = C; le Sinus du côté $AE = s$, ſon Coſinus = c; le

le Coſinus de l'Arc DF, qui eſt la meſure de l'Angle BAE, $=y$; le Coſinus de l'Arc $BE=q$: nous aurons

$$q=Ssy+Cc.$$

VII.

Ayant ainſi trouvé l'Arc BE, il eſt facile d'exprimer la droite EO, qui eſt la diſtance du point E juſqu'au centre de l'Ellipſoïde, par le moyen du 4ᵉ. Art. qui nous marque que cette diſtance eſt toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du Quarré du Coſinus de cet Arc trouvé, & de l'excès du demi-Axe BO ſur le plus petit demi-diametre: c'eſt-à-dire, ſi nous retenons les dénominations, dont nous nous ſommes ſervis depuis le IV. §. juſqu'ici, que nous aurons $EO=b+(Ssy+Cc)^2\delta$.
C'eſt cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des Marées, que la déclinaiſon de la Lune & la latitude du lieu peuvent produire.

VIII.

Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité EO eſt toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus grande. Pour avoir donc la plus grande EO, il faut faire $y=1$. La haute Mer répond donc encore au paſſage de la Lune par le Méridien; & on aura alors la droite $CO=b+(Ss+Cc)^2\delta$.

IX.

Mais pour trouver la plus petite EO ou eO, il ne faut pas faire $y=0$; mais $y=-\frac{Cc}{Ss}$ & alors la hauteur eO eſt ſimplement $=b$. Nous ferons là-deſſus les remarques ſuivantes:

I. La différence entre la plus grande CO & la plus petite eO, faiſant la hauteur de la Marée, entant quelle eſt produite par la ſeule action de la Lune, il s'enſuit que cette hauteur eſt $=(Ss+Cc)^2\delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés ſur les Marées, & nous ſert en même tems à décider pluſieurs queſtions, ſur leſquelles les Auteurs ne ſont pas encore convenus.

(α) Nous voyons d'abord, que la plus grande Marée ſe fait, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt égale à la latitude du lieu. Cette regle ſuppoſe toute la Terre inondée; & c'eſt à quoi il faut avoir égard, lorſqu'il eſt queſtion de la hauteur d'un lieu. Ce n'eſt pas par exemple immédiatement aux Ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux ſont

 élévées

élévées par la Lune: la cauſe principale des Marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation & deſcente des eaux, qui ſe font dans la Mer du Nord, à environ 35 degrés de Latitude Septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inſpection des Cartes Marines. J'avouë pourtant que ce n'eſt ici qu'une eſtime fort incertaine; il eſt impoſſible de rien dire de poſitif là-deſſus.

On remarquera auſſi que je parle ici de la hauteur de la Marée, qui répond au paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien: j'appellerai cette Claſſe de Marées, *Matées de deſſus*, & la Claſſe de celles qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, *Marées de deſſous.*

(6) Si la déclinaiſon de la Lune eſt nulle, nous aurons $S=1$ & $C=0$, & la hauteur de la Marée de deſſus ſera $=ss\delta$. Nous voyons de-là, que ſi la Terre étoit toute inondée, & que les Luminaires reſtaſſent dans le plan de l'Equateur, les hauteurs des Marées pour les endroits de différentes latitudes ſeroient en raiſon quarrée des Sinus des diſtances au Pole.

(7) Si pour nos Païs Septentrionaux, la déclinaiſon de la Lune devient Méridionale, les Marées de deſſus deviennent encore plus petites à cet égard, & cette diminution ſeroit très-conſidérable, s'il n'y avoit pas une cauſe hydroſtatique que je marquerai ci-deſſous, qui lui eſt un obſtacle; ſans la conſidération de cette cauſe, on pourroit croire facilement que notre Théorie ne répond pas aſſez aux Obſervations.

(8) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en ſuppoſant la Latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des Marées de deſſus, tout le reſte étant égal, devoit être,

Dans la plus grande Déclinaiſon Septentrionale de la Lune, ...	$=0{,}963\,\delta$.
Lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt nulle .	$=0{,}671\,\delta$.
Dans la plus grande Déclinaiſon Méridionale de la Lune	$=0{,}265\,\delta$.

La différence de ces Marées eſt énorme, & ſurpaſſe de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut ſoupçonner avoir quelque rapport à la Déclinaiſon de la Lune. Nous en dirons bientôt la raiſon.

(9) Si on ſuppoſoit la Latitude telle que Ss fût $=Cc$, ou $Ss=\sqrt{1-SS}\times\sqrt{1-ss}$, ou enfin $s=\sqrt{1-SS}=C$, le point E qui répondroit à la plus petite EO, ſeroit préciſément au point L. En ce cas, il n'y auroit qu'une Marée de deſſus dans l'eſpace d'un jour lunaire, & la Marée de deſſous s'évanouiroit entiérement. Céla arriveroit donc, par exemple, ſi la Lune ayant 20 degrés de Déclinaiſon Septentrionale, l'élevation du Pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la Marée ſe-

roit

roit bien petite, puiſqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle feroit ſous l'Equateur.

(f) Si s eſt plus petit que C, la quantité du §. VII. $(Ss+Cc)^2\delta$, ne ſçauroit plus devenir égale o; c'eſt pourquoi la Mer décroitra alors continuellement depuis le paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien, juſqu'à ſon paſſage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une Marée par jour depuis le parallele, qui fait $s=C$, juſqu'au Pole; & pour ſçavoir la hauteur de ces Marées, il faut dans cette Formule, premierement ſuppoſer $y=1$; & enſuite $y=-1$, & prendre la différence des Formules: la hauteur des Marées ſera donc dans ces cas $=(Ss+Cc)^2\delta-(-Ss+Cc)^2\delta$, ou bien $=4\,Ss\,Cc\,\delta$. Elle ne ſçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore ſur cette matiere, s'il ne falloit pas ſe contenir dans de certaines bornes; & quoique tous ces Théoremes ne ſoient vrais que dans la Théorie, où l'on ſuppoſe les eaux être conſtamment dans leur état d'équilibre, & toute la Terre inondée (car avec ces ſuppoſitions, ces Théorêmes ſeroient exactement vrais) & que diverſes circonſtances peuvent leur donner quelquefois une toute autre face, ils ne laiſſent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de Phénomenes obſervés ſur les Marées, & pour pénétrer à fond cette matiere.

II. Nous avons démontré qu'il n'y a des Marées de deſſous, que que tant que s eſt plus grand que C, lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale (ſi cette Déclinaiſon eſt Méridionale, il n'y aura point alors de Marées de deſſus dans les Païs Septentrionaux.) Nous diſpoſerons donc s plus grand que C, & nous chercherons là-deſſus la hauteur de la Marée de deſſous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de deſſus.

Nous avons vû que la hauteur EO eſt la plus petite poſſible, lorſqu'on prend $y=-\frac{Cc}{Ss}$, & qu'alors elle devient $=b$; après cela les hauteurs EO croîtront juſqu'au point L, qui fait $y=-1$. La différence de ces hauteurs ſera donc la hauteur de la Marée de deſſous, qui ſera par conſéquent $=(-Ss+Cc)^2\delta$, pendant que celle de la Marée de deſſus étoit $=(Ss+Cc)^2\delta$. On pourra faire là-deſſus les remarques ſuivantes.

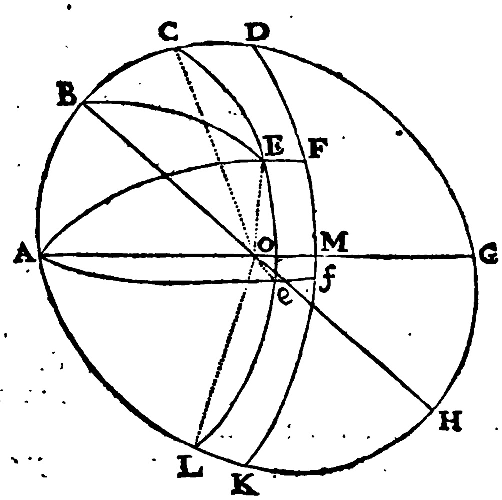
(a) Les Marées de deſſus ſont égales à celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt nulle.

(b) Dans les Païs Septentrionaux, les Marées de deſſus ſont plus grandes que celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale, & plus petites lorſque cette déclinaiſon eſt Méridionale, & généra-

généralement les déclinaiſons de la Lune étant égales, mais de différens côtés les Marées de deſſus deviennent les mêmes qu'étoient celles de deſſous, & reciproquement.

(c) La différence des deux Marées d'un même jour lunaire eſt $= 4\, Cc\, Ss\, \delta$; ſi l'on applique ces Formules à des cas particuliers, on verra que les Marées de deſſus devroient différer conſidérablement de celles de deſſous, s'il n'y avoit pas une autre raiſon qui doit les rendre à peu près égales. Nous expoſerons cette raiſon ci-deſſous, après que nous aurons examiné tout ce que la Théorie dit ſur cette matiere *in abſtracto*.

III°. Nous voyons auſſi que les durées des deux Marées d'un même jour doivent être ſelon la pure Théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le Parallele CL on ſuppoſe e être le point, la diſtance duquel au centre de l'Ellipſoïde ſoit la plus petite & égale à b, & qu'on tire enſuite par ce point un Arc de Méridien Aef, l'Arc Df ſera la meſure du tems depuis la haute Mer de deſſus jusqu'à la baſſe Mer ſuivante, & l'Arc fK la meſure du tems, depuis cette baſſe Mer jusqu'à la haute Mer de deſſous. Or nous avons vû au IX. §. que le Coſinus de l'Arc Df (y) eſt $= -\frac{Cc}{Ss}$, ou bien ſi DM eſt de 90 degrés, le Sinus de l'Arc Mf vers le point $K = \frac{Cc}{Ss}$. Là-deſſus nous pourrons faire ces remarques.



(1) Dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Juſans des Marées de deſſus plus longs, & les Flots des Marées de deſſous plus courts; & la déclinaiſon Méridionale fait le contraire avec les mêmes meſures; & lorſque la déclinaiſon eſt nulle, la durée du Juſan eſt égale à celle du Flot ſuivant.

(2) Si la déclinaiſon de la Lune eſt égale au Coſinus de la latitude du lieu, le Juſan durera 12 heures lunaires, & il n'y a point de Flot pour l'autre Marée, parce qu'il n'y a point du tout de Marée de deſſous.

(3) En général, la différence du tems, entre le Juſan de la Marée de deſſus, & le Flot de la Marée de deſſous, ſe détermine par le double

ble de l'Arc horaire Mf, & la différence des durées des deux Marées entieres, eſt exprimée par le quadruple de l'Arc Mf, dont le Sinus eſt $= \frac{Cc}{Ss}$. D'où l'on voit que plus la déclinaiſon de la Lune eſt grande, plus cette différence eſt grande auſſi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35. degrés, la déclinaiſon de la Lune de 25 degrés, l'Arc Mf ſera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le Juſan durera donc 7 heures lunaires, & le Flot ſuivant 5 heures lunaires, & la différence ſera de deux heures, & toute la Marée de deſſus durera 4 heures plus que celle de deſſous.

X.

Voilà donc comme la choſe ſeroit, ſi la Terre étoit toute inondée, & ſi les eaux étoient conſtamment dans une ſituation d'équilibre parfait. Nous avons expoſé toutes les variations des Marées qui ſont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaiſons & latitudes, & par le moyen de nos Remarques on connoit les différences entre les Marées d'un même jour, entre celles qui ſe font dans différentes Saiſons, &c. tant à l'égard des hauteurs des Marées, que de leurs durées. Il eſt vrai que les deux hypotheſes indiquées ſont bien éloignées de la vérité, & que cela change extrêmement les meſures des variations; mais je ſuis pourtant ſûr qu'il doit y avoir des variations, & qu'elles ſeront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la ſurface de la Terre, il n'eſt pas poſſible d'en deviner les effets, que fort ſuperficiellement, & comme chaque endroit demanderoit à cet égard des refléxions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne conſidérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, & les mouvemens reciproques ou oſcillatoires qui en réſultent.

XI.

La Lune change la ſurface de la Terre de Sphérique en Ellipſoïdique, & l'Axe de l'Ellipſoïde paſſe par la Lune. Cet Axe étant différent de l'Axe de Rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'Axe de l'Ellipſoïde; & s'il n'y avoit pas quelques cauſes ſecondes, leſdits changemens conſiſteroient ſimplement en ce que chaque goute montât & deſcendît alternativement & directement vers le centre.

Il eſt remarquable encore, que ſi les eaux ſe mouvoient librement, ſans ſouffrir aucune reſiſtance, ces oſcillations augmenteroient continuellement à

à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être cenſées avoir reçû quelque nouvelle impulſion : c'eſt une propriété qu'on peut démontrer par pluſieurs exemples ſemblables, tirés de la Méchanique & de l'Hydrodynamique. Mais le grand nombre de reſiſtences qui s'oppoſent aux mouvemens des eaux, ſont que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oſcillations. Ces derniers degrés d'oſcillations peuvent cependant être cenſés proportionnels aux forces que la Lune exerce ſous différentes circonſtances, pourvû que les changemens qui ſe font dans la Lune, ſe faſſent aſſez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui ſe font dans la Lune, par rapport à ſes declinaiſons doivent produire dans les Marées à peu-près les Phénomenes que nous avons indiqués, & à beaucoup plus forte raiſon les changemens de déclinaiſons dans l'autre Luminaire. Mais les changemens qui ſont dûs à la rotation de la Terre ſont trop vîtes, pour que les Marées puiſſent s'y accommoder, car elles tâchent de conſerver leur mouvement reciproque comme un Pendule ſimple. Cette ſeule raiſon fait que ſi les deux Marées d'un même jour doivent être ſuivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, & celle-ci diminue l'autre, de ſorte qu'elles ſont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être ſans cette raiſon. Tout ce qu'on peut donc dire à cet égard, eſt que nos Théorêmes ſont vrais, quant à leur nature, mais non pas ſuivant les meſures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre refléxion, réparer en quelque façon cet inconvenient: c'eſt en ſuppoſant que la plus grande Marée donne à la plus petite, qui eſt ſa compagne, autant qu'elle en perd, & les ſuppoſer l'une & l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, & de là on tirera la hauteur abſoluë de chacune, en prenant le milieu Arithmétique des deux Marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propoſitions, nous aurons les Théorêmes ſuivans, qui ne ſçauroient plus manquer d'être aſſez conformes aux Obſervations.

X I I.

La hauteur de la Marée de deſſus eſt $= (Ss + Cc)^2 \delta$ (§. *Remarque I.*) & la hauteur de la Marée de deſſous $= (-Ss + Cc)^2) \delta$ (§. *IX. Remarque II.*) en prenant donc la moitié de la ſomme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la Marée, qui convient aux déclinaiſons de la Lune, & latitudes du lieu données, $(SSss + CCce)\delta$. De cette Formule, que je crois fort juſte pour la ſuppoſition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(I.) Les

(I.) Les déclinaiſons Septentrionales & Méridionales de la Lune ſont le même effet ſur les Marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété eſt confirmée par les Obſervations. Mais il ſera toujours vrai, que dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune augmente un peu les Marées de deſſus, & diminue celles de deſſous; & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire: & c'eſt ce que l'expérience confirme auſſi. On ſe ſouviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux Marées d'un même jour lunaire.

(II.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la Marée eſt $= (\frac{1}{2} SS + \frac{1}{2} CC) \delta = \frac{1}{2} \delta$, & par conſéquent conſtamment la même.

C'eſt ici une proprieté bien ſinguliere, que quelles que ſoient les déclinaiſons des Luminaires, les hauteurs moyennes des Marées n'en ſoient point changées, & cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos Païs on s'apperçoive de ſi peu de changement dans les Marées, à l'égard deſdites déclinaiſons.

(III.) Si la latitude du lieu eſt moins de 45°. la plus grande Marée moyenne ſe fait lorſque les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & les Marées diminuent, ſi les déclinaiſons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, & tout le monde convient que dans nos Païs (dont les Marées dépendent de la Mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude) les plus grandes Marées, tout le reſte étant égal, ſe font environ les Equinoxes.

Si la latitude du lieu eſt plus grande de 45 degrés, c'eſt le contraire.

(IV.) Sous l'Equateur, la hauteur de la Marée eſt $= SS\delta$, & les variations qui dépendent des différentes déclinaiſons de la Lune, y ſeront le plus ſenſibles: ſi la déclinaiſon eſt nulle, la hauteur de la Marée y eſt exprimée par δ; & ſi la déclinaiſon eſt ſuppoſée de 15 dégrés (elle peut aller juſqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la Marée moyenne ſera de $0{,}82\,\delta$. La différence des hauteurs eſt de $\frac{18}{100}\delta$.

(V.) Les variations ſont moins grandes à cet égard ſur les Côtes de la France, baignées par l'Océan, ſi les Marées y ſont cauſées par la Mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la Marée, la déclinaiſon de la Lune étant nulle, y ſera exprimée par $0{,}671\,\delta$, & ſi la Lune avoit 25 degrés de déclinaiſon, la hauteur moyenne y ſera exprimée alors par $0{,}610\,\delta$. La plus grande Marée eſt donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, & la différence ſera comme 61; qui fait l'onziéme partie de la grande Marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaiſon de la Lune, ſont toujours beaucoup plus petites, que celles

les qui dépendent des différentes diſtances de la Lune, & qui peuvent aller juſqu'au tiers de la grande Marée. C'eſt pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaiſons.

(VI.) Enfin nous remarquerons que cette Formule $(SSss+CCcc)\delta$ pour les hauteurs moyennes des Marées ne doit pas être pouſſée au-delà du terme des doubles Marées, qui eſt lorſque la latitude du lieu eſt égale à la déclinaiſon de la Lune: car, paſſé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une Marée par jour, dont la hauteur eſt exprimée par $4SsCc\delta$, en vertu de la Remarque (ζ) de l'Art. IX. Il faudra auſſi donner à ce terme une certaine latitude; car il y apparence que ce n'eſt qu'à une certaine diſtance depuis ce terme vers l'Equateur, que les Marées commencent à être doubles, & à une autre diſtance vers le Pole, qu'elles commenceroient à être ſimples, ſi la Mer libre s'étendoit juſques-là; & que dans la Zone, qui eſt entre deux, les Marées ſeront mêlées de l'une & l'autre eſpéce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.

Nous venons d'expoſer au long, & avec toute la préciſion poſſible, le rapport réel des hauteurs des Marées: nous n'avons qu'un mot à dire ſur l'heure des hautes Marées. Comme c'eſt toujours au moment du paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien, que la Mer devroit être la plus haute, quelle que ſoit la déclinaiſon de la Lune, & la latitude du lieu: nous voyons que ſi les Marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux ſortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute Mer; & ſi l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais ſi la déclinaiſon de la Lune & la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement ſur l'heure de la haute Mer, & ſi elles n'en ont que très-peu, lorſque l'action de la Lune eſt combinée avec celle du Soleil, il eſt remarquable, que tant la déclinaiſon de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des baſſes Mers, ſans cette cauſe ſeconde, que j'ai expoſée au long dans le XI. Art. & qui fait que les deux Marées d'un même jour lunaire ſont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raiſon ne ſçauroit rendre les deux Marées tout-à-fait égales, & il ſera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1) de la III. Partie du §. IX. que c'eſt tantôt le Juſan d'une Marée, qui ſurpaſſe en durée le flot de la Marée ſuivante, tantôt celui-ci qui ſurpaſſe l'autre. C'eſt une propriété qui n'eſt point échappée aux Obſervateurs des Marées; mais on n'avoit pas remar-

remarqué les circonſtances de ces inégalités, ſçavoir que dans les Païs Septentrionaux, la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Marées de deſſus plus longues, & les Marées de deſſous plus courtes, & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le Juſan peut être différent du flot ſuivant, mais non pas du flot antécédent; & ſi l'on remarque quelque différence entre le flot & le Juſan d'une même Marée, ou cette différence ſera conſtante pendant tout le cours de l'année, & alors il faut l'attribuer à la configuration des Côtes; ou elle n'aura point de loix, & ne ſera que tout-à-fait accidentelle, & cauſée par des Vents ou Courants accidentels.

X I V.

Les différences que nous avons expoſées dans ce Chapitre entre les deux Marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoitre ces deux Claſſes de Marées, & de diſtinguer l'une d'avec l'autre, ce qui ſeroit impoſſible ſans cela ſur les Côtes irrégulieres de l'Europe, où nous ſçavons que les diverſes heures du Port comprennent toute l'étendue d'une Marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La Claſſe des Marées de deſſus comprendra celles qui ſont plus grandes & plus longues, la déclinaiſon de la Lune étant Septentrionale, ou qui ſont petites & plus courtes, cette déclinaiſon étant Méridionale, & l'autre Claſſe ſera reciproque.

X V.

Nous avons examiné avec toute l'attention requiſe les effets des différentes déclinaiſons de la Lune, qui ſont la ſource de tant de propriétés très-remarquables des Marées. Il ne nous reſte donc plus qu'à conſidérer encore les déclinaiſons du Soleil. Cet examen nous ſera très-facile, après celui que nous venons de faire ſur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, ſa déclinaiſon étant nulle, $\mathcal{S}$, comme nous avons fait toujours dans le Corps de ce Traité, & nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raiſonnement que nous avons fait ſur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à ſubſtituer dans toutes les Formules de ce Chapitre $\mathcal{S}$ à la place de δ, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaiſons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, & de cette maniere tout ce que nous avons dit ſur la Lune, ſera auſſi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la Marée, entant qu'elle eſt produite ſous l'Equateur par la ſeule action du Soleil au tems des Equinoxes, eſt appellée $\mathcal{S}$, la hauteur de la Marée ſera pour telle déclinaiſon du Soleil,

 &

& telle latitude du lieu entre les deux Cercles Polaires qu'on voudra $= (TTss + EEcc)\beta$, entendant par T le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole, & par E ſon Coſinus.

XVI.

Pour tirer tout l'avantage, qui eſt poſſible, de nos Méthodes, & leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une Formule générale pour tous les cas poſſibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX. Chapitre A la hauteur des Marées qui ſe font ſous la Ligne dans les Syzygies (ou plutôt un jour & demi après) les diſtances des Luminaires étant moyennes, & leurs déclinaiſons nulles; & que pour les mêmes circonſtances nous avons nommé B la hauteur des Marées bâtardes: voyons à préſent, comment il faut changer ces Quantités A & B, lorſque les déclinaiſons des Luminaires, & les latitudes des lieux ſont d'une grandeur quelconque.

(I.) Quant à la quantité A, comme elle a été exprimée par la ſomme des forces entieres des deux Luminaires, c'eſt-à-dire, par $\delta + \beta$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de δ ſa quantité corrigée $(SSss + CCcc)\delta$, & à la place de β ſa quantité corrigée $(TTss + EEcc)\beta$, & enſuite faire cette Analogie

$$\delta + \beta : A :: (SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta : \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta}{\delta + \beta} A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des Marées dans les Syzygies, lorſque les déclinaiſons des Luminaires, & la latitude du lieu ſont quelconques, & ſi la déclinaiſon de l'un & l'autre Luminaire eſt nulle, cette quantité devient ſimplement $= ssA$. Si l'on nomme donc F la hauteur de la Marée dans les Syzygies, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut ſuppoſer $ssA = F$, & de cette maniere ladite quatriéme proportionelle devient

$$= \frac{(SSss + CCCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta}{ss(\delta + \beta)} F.$$

C'eſt cette quantité qu'il faut ſubſtituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour A.

(II.) La quantité qu'il faudra ſubſtituer pour B dans ces equations, que nous venons de citer, ſe trouve à peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendte au lieu de la ſomme $\delta + \beta$ leur différence $\delta - \beta$, qui exprimoit la hauteur des Marées bâtardes. Si l'on appelle donc G la hauteur de la Marée dans les Quadratures, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à ſubſtituer pour

$$B = \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\beta}{ss(\delta - \beta)} \times G,$$

Nous ſubſtituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des Lettres *S* & *s* (qui y marquent le rapport des diſtances du Soleil à la Terre ſous diverſes circonſtances, & qui ſe trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre ſens) ces autres Lettres *D* & *d*.

Après ces réflexions préliminaires nous conſidérerons le Problême général des hauteurs des Marées ſous telles circonſtances, qui pourront concourir, & qui ſervira à déterminer ces hauteurs avec toute la préciſion poſſible. Je m'aſſure que tous ceux qui jetteront les yeux ſur cette Solution, verront ſans peine, combien j'ai été attentif à examiner & éplucher toutes les circonſtances qui peuvent faire varier les Marées.

PROBLEME GENERAL.

XVII.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en ſuppoſant toutes les circonſtances qui peuvent les faire varier, connuës.

SOLUTION.

Il faut connoître d'abord par Obſervations les quantités *F* & *G*, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes Marées, & des Marées bâtardes, qui ſe font un jour & demi après les Syzygies & les Quadratures, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles, & leurs diſtances à la Terre étant moyennes. Dans la Théorie, deux Obſervations ſuffiſent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos Méthodes obſerver un grand nombre de fois, comme on a déja fait preſque dans tous les Ports de la France, la hauteur des grandes Marées, & celles des petites Marées, les Luminaires ſe trouvant à peu-près dans l'Equateur, & prendre des unes & des autres le milieu Arithmétique, que j'appelle *F* pour les grandes Marées, & *G* pour les petites Marées.

Il faut enſuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune & du Soleil. Nous avons donné pluſieurs moyens pour cela dans le corps de cette Diſſertation, & nous nous croyons bien fondés de le ſuppoſer comme 5 à 2. Quoi qu'il en ſoit, nous nommons ce rapport $\delta : \epsilon$.

Il faut après cela faire attention aux Phaſes de la Lune, ou à l'Arc compris entre les deux Luminaires dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: cet Arc doit être diminué de 20 dégrés (§. *VII. Chap. IX.*) Nous nommons le Sinus de l'Arc réſultant *m*, & le Coſinus *n*, & le Sinus total 1.

Il faut auſſi connoître les diſtances des Luminaires à la Terre : j'appelle *d* la diſtance moyenne du Soleil ; *D* ſa diſtance au tems de la Marée cherchée ; *l* la diſtance moyenne de la Lune ; *L* ſa diſtance au tems de la Marée cherchée.

Il faut ſçavoir encore les déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur : j'appelle *S* le Sinus de la diſtance de la Lune au Pole ; *C* ſon Coſinus ; *T* le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole ; *E* ſon Coſinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, & à la Remarque (*α*) du IX. Art. que nous avons faite pour l'eſtimation des latitudes. Nous appellons le Sinus de la diſtance au Pole *s* & le Coſinus *c*. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la Marée ſera

$$\frac{l^3D^3\delta + L^3d^3\beta}{L^3D^3(\delta+\beta)} \times \frac{nn}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta}{\delta+\beta} \times F.$$

$$+ \frac{l^3D^3\delta - L^3d^3\beta}{L^3D^3(\delta-\beta)} \times \frac{mm}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\beta}{\delta-\beta} \times G.$$

XVIII.

Je n'ai mis ici cette grande Formule, que pour faire voir toute l'étendue & toute l'exactitude de notre Théorie & de nos Calculs, car les meſures & la Table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont aſſez de préciſion dans une Queſtion auſſi ſujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des Marées & de leurs changemens extraordinaires, qui ſe font dans la *Zone glaciale*, pour ne point groſſir trop ce Traité, & pour ne point l'embarraſſer de choſes fort abſtraites & aſſez difficiciles. J'ai d'ailleurs déja expoſé en gros & même aſſez au long ce qui en eſt.

Quant enfin à l'heure des hautes Mers, j'ai fait voir qu'elle n'eſt point changée par les déclinaiſons des Luminaires, ni par la latitude du lieu ; nous avons donc déja donné toute la perfection poſſible dans les Chapitres précédens à cette autre grande Queſtion. Pour l'heure des baſſes Mers, qui dépendent beaucoup des déclinaiſons des Luminaires, & de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations & propriétés dans ce Chapitre.

CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication & Solution de quelques Phénomenes & Queſtions, dont on n'a pas eu occaſion de parler dans le corps de ce Traité, ſur-tout à l'égard des Mers détachées, ſoit en partie, ſoit pour le tout, de l'Océan.

I.

SUivant quelle progreſſion les eaux montent & deſcendent dans une même Marée, par rapport au tems donnés.

Cette Queſtion dépend de toutes les circonſtances que nous avons conſidérées dans ce Traité ; mais les variations à l'égard du changement de ces circonſtances, ne font pas varier beaucoup la loi, ſuivant laquelle les eaux montent & deſcendent ; je ne parlerai donc que du cas le plus ſimple, qui eſt lorſque la latitude du lieu, & les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & lorſqu'en même tems les Luminaires ſont dans leurs Syzygies, ou dans leurs Quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer par un quart de Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité : je dis *que les deſcentes verticales des eaux depuis la haute Mer doivent être exprimées par les Quarrés des Sinus des Arcs, qui repréſentent les tems donnés.* Si l'on conſidére les Marées depuis le commencement du Flot, il faudra dire *que les élévations verticales des eaux, ſont en raiſon quarrée des Sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Propoſition plus générale, pourront conſulter le §. VIII. Chap. V. & ſi on y ajoute enfin les §. §. VI. & VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas poſſibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'expoſer ; & cela d'autant moins que les deux Marées d'un même jour, qui devroient être ſouvent fort inégales, ne laiſſent pas de ſe compoſer à une égalité mutuelle par la raiſon expoſée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc ſe tenir ſans peine à la Regle que nous venons d'établir.

Il s'enſuit de cette Regle, que les baiſſemens ou élevations des eaux, qui ſe font dans de petits tems égaux, ſont proportionnels aux produits des Sinus par les Coſinus répondans des Arcs horaires ; de ſorte que ſi on partage tout le tems du Flux ou du Reflux également, les variations également éloignées en deçà & en delà de ce terme, ſont égales : ces variations ſont les plus ſenſibles au milieu du Flux ou du Reflux, & la

variation totale depuis le commencement du Flux ou du Reflux juſqu'au milieu, fait préciſément la moitié de toute la variation d'une Marée. On voit enfin que les variations doivent être inſenſibles au commencement & à la fin de chaque Flux & Reflux.

Toutes ces Propoſitions ſont confirmées entierement par les Obſervations qu'on a faites ſur cette matiere, rapportées par M. Caſſini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il ſemble ſeulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la baſſe Mer, erreur preſque inévitable dans cette ſorte d'Obſervations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre Regle avec les Obſervations, que tout le tems du Flux & Reflux eſt de ſix heures lunaires, pendant que les Obſervations ont été priſes ſur des heures ſolaires.

I I.

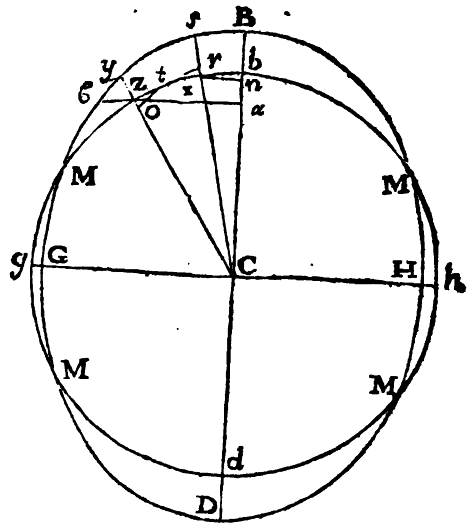
Pourquoi il n'y a point de Marées ſenſibles dans la Mer Caſpienne, ni ſelon quelques-uns dans la Mer Noire, & pourquoi elles ſont très-petites dans la Mer Méditerranée, & de quelle nature ſont ces Marées.

On ne ſçauroit bien répondre à ces queſtions, ſans conſidérer auparavant le Problême principal, qui eſt de ſçavoir les Marées, lorſque la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, & c'eſt un Problême pénible pour le Calcul, & aſſez délicat pour la Méthode. Pour le rendre d'abord plus ſimple, nous ſuppoſerons les Luminaires en conjonction & dans le plan de l'Equateur, & que c'eſt auſſi ſous l'Equateur, que l'on cherche les Marées.

Reſſouvenons-nous que ſans l'action des Luminaires, l'Equateur ſeroit parfaitement circulaire, comme $bgdh$, & que les Luminaires ſe trouvant dans l'Axe DB, cette Figure eſt changée en l'Ellipſe $BGDH$, lorſque toute la Terre eſt inondée, & que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré auſſi au III. §. Chap. V. que dans cette ſuppoſition, la petite hauteur yz (dont les variations par rapport à ſes différentes ſituations expriment les variations des Marées au point z) eſt $= \frac{3ss-bb}{3bb} \times \beta$, dans laquelle Formule on ſuppoſe $Cz = s$; $Cb = b$, & la différence entre la plus grande CB & la plus petite $CG = \beta$.

Suppoſons à préſent que la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, ſçavoir celle de zx, & qu'on tire par le centre C & l'extrémité x la droite Cs. Cela poſé on voit bien que la ſurface de la Mer ne peut pas être en ys, comme elle ſeroit, ſi toute la terre étoit inondée; car l'eſpace yCs eſt plus grand que l'eſpace zCx, & il faut que cet

cet eſpace ſoit conſtamment le même; puiſque la quantité d'eau dans une Mer doit être ſuppoſée la même pendant les revolutions de la Terre: mais la ſurface de l'eau prendra la courbure *o r*, & voici quelle ſera la nature de cette courbure *o r*; il faut premierement, que l'eſpace *o C r* ſoit conſtamment le même que l'eſpace *z C x*, & en ſecond lieu, que la courbe *o r* ſoit ſemblable à la courbe *y s*, ou plûtôt la même, puiſque toutes les petites lignes, telles que *s x*, ſont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; & ainſi la petite perpendiculaire *s r* ſera égale à la petite perpendiculaire *y o*, de même que toutes les perpendiculaires compriſes entre les termes *s* & *y*.



On voit donc déja que ce ne ſont plus les *s x* & *y z*, dont les variations marquent les variations des Marées pour les points *x* & *z*, &c. que ces variations ſont exprimées ici par celles des petites lignes *r x* & *o z*. De là on peut conclure par la ſeule inſpection de la Figure, que les Marées doivent être d'autant plus petites, que la Mer eſt moins étendue en longitude; que ces Marées ne peuvent être que tout-à-fait inſenſibles dans la Mer Caſpienne & dans la Mer Noire, & fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'Océan eſt preſque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très-ſingulieres de cette ſorte de Marées. 1°. Que la plus haute Mer ne ſe fait pas ici au moment du paſſage des deux Luminaires par le Méridien, comme dans l'Océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, ſi la Mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les Marées ſont les plus grandes aux extrémités Orientales & Occidentales *z* & *x*, & qu'elles ſont incomparablement plus petites au milieu *t*. 3°. Que la haute Mer dans l'une des extrémités ſe fait au même moment que la baſſe Mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des Marées dans ces Mers: le Calcul en fera connoître le détail.

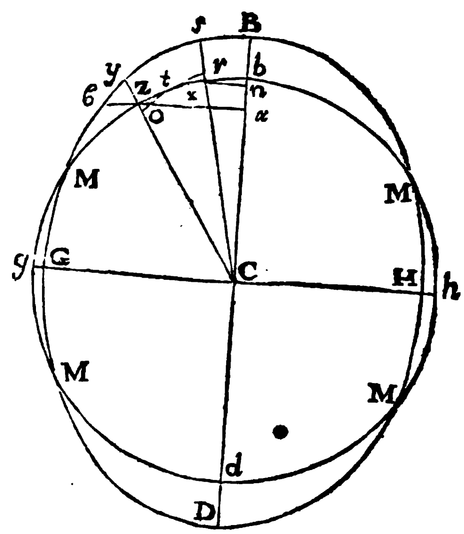
Pour ne point ennuyer le Lecteur par une trop longue ſuite de raiſonnemens purement Géometriques, & dans pluſieurs circonſtances aſſez compliquées & chargées de Calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $Bb + Gg = 6$, qui marque la variation pour la Mer libre de tous

côtés;

côtés : ſoit l'Arc $z x$, qui marque l'étendue de la Mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le Sinus total $= 1$; qu'on tire $x n$ perpendiculaire à CB, & ſoit l'eſpace $z \alpha n x z = S$. Cela poſé, on trouvera d'abord $y z x s = \frac{2}{3} A \beta$. Cet eſpace devant être égal à l'eſpace $y o r s$, qui eſt égal à la petite $s r$ multiplié par A, on en tire $s r = \frac{2}{3} \beta - \frac{S}{A} \beta$.

Si on ſuppoſe après cela $Cn = n$ & $C\alpha = s$, on en aura $s x = n n \beta - \frac{1}{3} \beta$, & par conſéquent $r x = n n \beta - \beta + \frac{S}{A} \beta$, & ce ſont les différentes valeurs de $r x$, en conſidérant n & S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la Mer au point x, qui eſt à l'extrémité occidentale de la Mer.



De cette valeur $r x$ on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des Marées, quelque étendue qu'on ſuppoſe à la Mer, & tout ce que nous avons trouvé pour le point x, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'Arc $z x$ qu'on voudra ; mais on remarquera ſurtout une propriété générale, qui eſt que l'Arc horaire compris entre la haute & la baſſe Mer, c'eſt-à-dire l'Arc compris entre la plus grande & la plus petite $r x$, eſt toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut ſuppoſer la différentielle $r x = 0$, & faire $- dS = \frac{nn - ss}{\sqrt{1 - nn}} dn$, à cauſe de la valeur conſtante de A, d'où l'on tirera cette équation $2 A n \sqrt{1 - nn} + ss = 0$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne enſuite la hauteur de la Marée, exprimée par la différence de la plus grande & de la plus petite valeur de $r x = \left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1 - nn} - s\sqrt{1 - ss}}{A} \right) \beta$, & on remarquera que dans toutes ces Formules, s eſt donnée en n & en conſtantes, à cauſe de l'Arc A donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux ſortes de cas particuliers ;

ticuliers; premierement, lorſque A eſt de 90 degrés; & en ſecond lieu, lorſque cet Arc eſt fort petit.

I. Si A eſt de 90 degrés, on aura $s=\sqrt{1-nn}$, & le lieu de la haute ou de la baſſe Mer, à l'égard du point fixe B ſera déterminé par cette Equation

$$-2An\sqrt{1-nn}+2nn-1=0\text{, qui donne}$$

$$Cn\text{, ou } n=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)}=0{,}9602,$$

qui marque que l'Arc xb eſt d'environ 16 degrés 13. minut. & que la hauteur de la Marée ſera de $0{,}844\,c$. Nous voyons donc que ſi la Mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute Mer ſe feroit dans les Syzygies 1 heure 5. minutes plus tard que ſi toute la Terre étoit inondée, & que la hauteur de la Marée ſeroit de 156 milliémes parties plus petite.

II. Suppoſons à préſent que l'étendue de la Mer en longitude ſoit très-petite, c'eſt-à-dire, que A exprime un Arc circulaire fort petit, & ſoit la corde de cet Arc $=B$: la Géométrie commune donne

$$s=n-\tfrac{1}{2}nBB+\tfrac{1}{2}\sqrt{4BB-4nnBB+nnB^4-B^4}.$$ Et B étant ſuppoſée fort petite, on changera la quantité radicale en ſuite, & l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le Calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de BB) & de cette maniere on trouvera

$$s=n-B\sqrt{1-nn}-\tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'Arc A & ſa corde B, convertie en ſuite commence par le terme $\frac{1}{24}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre deſſein, on mettra A à la place de B, & on aura

$$s=n-A\sqrt{1-nn}-\tfrac{1}{2}nAA.$$

En ſubſtituant dans l'équation expoſée ci-deſſus

$$2An\sqrt{1-nn}-nn+ss=0$$

la valeur trouvée pour s, & négligeant toujours les termes affectés de A^3 & de A^4, nous aurons ſimplement $n=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

L'Arc xb eſt donc pour ce dernier cas de 45 degrés, & la haute Mer, ſi elle étoit ſenſible, ne ſe feroit par conſéquent que trois heures lunaires après le paſſage de la Lune par le Méridien. La hauteur de la Marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-deſſus, par $\left(2nn-1+\frac{n\sqrt{1-nn}-s\sqrt{1-ss}}{A}\right)\times c$, il faudra ſubſtituer dans cette expreſſion les valeurs trouvées pour n & s; ce que faiſant avec les mêmes

mes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de *s*, on trouvera à la fin ſimplement la hauteur de la Marée $= A\,\mathfrak{s}$.

Cette expreſſion fait voir que dans les petites Mers, les hauteurs des Marées ſont proportionelles aux étendues que ces Mers ont en longitude, & les Marées ſe trouveront par cette Analogie. Comme le Sinus total eſt à l'Arc longitudinal, que la Mer renferme, ainſi la hauteur de Marée dans la Mer qui eſt ſuppoſée inonder toute la Terre, exprimée par $\mathfrak{s}$, ſera à la hauteur de la Marée en queſtion.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des Marées dans la Mer Caſpienne. Suppoſons pour cet effet, que dans les conjonctions & oppoſitions des Luminaires, la hauteur des Marées grandiſſimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les Marées ne ſçauroient manquer d'atteindre preſque toute la hauteur, qu'elles auroient, ſi toute la Terre étoit inondée) eſt ſous l'Equateur de 8 pieds: c'eſt la hauteur que les Relations de voyages m'ont fait adopter pour la Mer libre, & que je crois qu'on remarquera ſur les Côtes eſcarpées des petites Iſles ſituées près de l'Equateur dans ladite Mer du Sud: Cela étant, j'ai démontré dans la Propoſition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes Marées ne ſeront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je ſuppoſe le milieu de la Mer Caſpienne. Si nous donnons après cela à cette Mer dix dégrés d'étendue en longitude, cet Arc fait environ la ſixiéme partie du Rayon, & la hauteur des grandiſſimes Marées devroit être par conſéquent aux extrémités Orientale & Occidentale de la Mer Caſpienne d'environ huit pouces: mais elles ſeront nulles au milieu de la Mer. Je ſuppoſe cette agitation de la Mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été ſur les lieux, & qui ſans doute n'ont pas fait un examen fort ſcrupuleux là-deſſus, & qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des cauſes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation & baiſſement des eaux. J'eſpére que des Obſervations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer ſur les Marées de la Mer Caſpienne.

On doit faire le même raiſonnement ſur la Mer Noire, qui peut être conſidérée comme détachée de la Mer Méditerranée, à cauſe du peu de largeur du Détroit qui eſt entre deux. Il eſt à remarquer qu'on a obſervé dans cette Mer des Marées, quoique très-petites.

On voit auſſi que les Marées dans la Mer Méditerrannée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'Océan, ſur-tout ſi l'on fait attention que cette Mer n'eſt tout-à-fait ouverte que depuis l'Iſle de Chypre juſqu'à celle de Sicile.

VII.

III.

Comment les Marées peuvent être beaucoup plus grandes ſur les Côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer libre de tous côtés.

Pour répondre à cette queſtion, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que ſi les Luminaires reſtoient à un même lieu, & que le mouvement journalier de la Terre ſe fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, & les Marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a preſcrites dans cet Ouvrage, ſans que la configuration des Côtes ou autres cauſes ſemblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en queſtion communiquât avec l'Océan: d'ailleurs les eaux ne feroient que monter & deſcendre verticalement; excepté aux Côtes, qui alternativement ſont baignées, & reſtent à ſec, & auſquelles les eaux auroient quelque mouvement horiſontal, quoi qu'infiniment lent, & la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, auſſi bien que dans les autres, de la direction de la pente des Côtes. Mais la vîteſſe du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'Océan doit faire quatre mouvemens & agitations reciproques, rend ces mouvemens fort ſenſibles. Comme outre cela la Mer n'inonde pas toute la Terre, & qu'il y a de grands Golfes, Canaux, &c. qui par l'élévation & baiſſement des eaux, ſont tantôt plus tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux & les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres ſe vuideront, & de là doivent provenir des mouvemens horiſontaux, qu'on appelle communément Flux & Reflux. Ce ſont ces mouvemens horiſontaux, qui ſe faiſant vers des endroits plus ſerrés, peuvent produire les grandes Marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'eſt auſſi cette raiſon qui rend les Marées plus grandes dans le Golfe de Veniſe, qu'elles ne ſont dans la Mer Méditerranée. C'eſt ici qu'on peut faire un grand uſage de ce que divers Auteurs ont donné ſur le mouvement des eaux, & je m'aſſure que moyennant les connoiſſances qu'on a déja ſur cette matiére, on pourroit rendre exactement raiſon de tous les différens Phénomenes, qui s'obſervent ſur les Marées aux endroits différemment ſitués. Mais un tel examen demanderoit des volumes, & des années pour les faire.

IV.

Quelle eſt en gros la nature des Marées au Détroit de Gibraltar.

Les Marées doivent ſans doute être beaucoup plus compliquées, & paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux ſortes de Marées, dont l'une vient de l'Océan, & l'autre de la Méditerranée ; & on voit facilement, que ſi les Marées conſiſtoient ſimplement à élever & baiſſer les eaux, ſans cauſer des Courans, il y auroit ſur ces Côtes quatre Marées par jour, c'eſt-à-dire, que les eaux monteroient & deſcendroient quatre fois, parce que les Marées des deux Mers ne ſe font pas en même tems : mais comme il ſe forme des Courans reciproques, chaque Courant tâche à ſe conſerver, & de là il ſe forme des liſieres, qui ont chacune des mouvemens différens : celles qui ſont ſur les Côtes de chaque côté, paroiſſent devoir être attribuées aux Marées de la Méditerranée, & deux autres qui les touchent, aux Marées de l'Océan : on remarque même au milieu une cinquiéme liſiere, dont le mouvement n'eſt pas ſi irrégulier que celui des quatre autres, & qui ne fait voir preſque aucun rapport avec la Lune : il ſemble que ce Courant ne doit ſa ſource, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux Mers.

Je dirai à cette occaſion, qu'il peut arriver de même, que les Marées ſont formées dans un certain Port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés & à divers tems : il ſemble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le Flot dure conſtamment plus long-tems que le Juſan, & qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cauſe peut encore produire pluſieurs ſortes de Phénomenes particuliers à de certains endroits.

V.

Pourquoi les petites Marées ſont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes Marées.

Nous avons déja vû que les petites Marées qui ſuivent les Quadratures, doivent être fort ſuſceptibles de pluſieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute & baſſe Mer, que par rapport à la hauteur de la Marée.

Il me ſemble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites Marées, quoique tout-à-fait régulieres, pouvant ſous diverſes circonſtances croître juſqu'au double, pendant que les grandes Marées ne croiſſent que d'environ un quart. Pour rendre raiſon de cette Obſervation qu'on a faite, il faut ſe reſſouvenir des circonſtances eſſentielles & fondées dans la nature des Marées, qui peuvent les rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce ſont les diverſes diſtances des Luminaires à la Terre,

Terre, & leurs différentes déclinaiſons, qui peuvent encore changer les hauteurs des Marées, lorſque l'âge de la Lune, & la latitude du lieu ſont les mêmes. Le calcul nous a enſeigné auſſi, que l'effet de la diverſité des déclinaiſons des Luminaires eſt beaucoup plus petit que celui de la diverſité des diſtances : comme donc la diverſité des diſtances eſt beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, & que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour eſtimer en gros les variations des petites Marées, & les variations des grandes Marées, ſimplement faire attention aux diſtances de la Lune : nous avons trouvé que la diverſité des diſtances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous conſidérons comme conſtante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, & les hauteurs des petites Marées étant auſſi proportionnelles aux différences des actions des deux Luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites Marées doivent être contenues dans les termes de 2 − 1, & 3 − 1, ou 1 & 2, pendant que les hauteurs des grandes Marées, qui ſont proportionnelles aux ſommes des actions des Luminaires, ſeront renfermées dans les termes de 2 + 1 & 3 + 1, c'eſt-à-dire, de 3 & 4.

Leſdits termes ſont confirmés par les Obſervations, comme par exemple, par celles qui ſont expoſées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. & 288. Nous voyons de cette raiſon, que les variations abſoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites Marées & dans les grandes Marées, & c'eſt ce que les Obſervations citées confirment auſſi; & comme ces variations ſont par conſéquent plus ſenſibles dans les petites Marées que dans les grandes Marées, il faudra peut-être ſe ſervir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des Obſervations ce que les diverſes circonſtances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des Marées.

VI.

Pourquoi les Marées étant montées plus haut, & ayant inondé plus de terrain pendant le Flot, deſcendent en même tems davantage, & laiſſent plus de terrain à ſec pendant le Juſan, & quelle proportion il y a entre les montées & deſcentes.

Nous voyons la premiere Queſtion indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raiſon en eſt que les Marées ſont une eſpece de mouvement oſcillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre, qui doit paſſer pour fixe, & au-deſſus duquel l'eau doit être cenſée s'élever dans la haute Mer, & ſe baiſſer dans la baſſe Mer. On pourroit croire d'abord que les élévations & deſcentes de l'eau à l'é-

 gard

gard du point fixe, ſont conſtamment proportionnelles, & en ce cas notre Problême ſeroit réſolu dans toute ſon étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable & bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'eſt pas proprement la hauteur des Marées dans le ſens que nous lui avons donné juſqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la Navigation pour l'entrée & ſortie des Vaiſſeaux dans les Ports ou les Rades: il s'y agit plutôt de connoitre la hauteur abſolue des eaux, lorſqu'elles ſont arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; & pour cet effet, il faut ſçavoir dans chaque Marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baiſſement: juſqu'ici nous n'avons déterminé que la ſomme de ces variations ſous le nom de hauteur de la Marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il eſt vrai qu'il eſt en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la ſurface de la Mer, ſi les Marées étoient nulles. Un tel point doit être conſidéré comme demeurant conſtamment à la même hauteur; car les cauſes qui peuvent le hauſſer ou le baiſſer, telles que ſont les Vents, les Courans inégaux, &c. ne ſont que paſſageres & purement accidentelles. Il s'agit donc à préſent de ſçavoir, combien les eaux montent au-deſſus de ce point fixe dans la haute Mer, & combien elles deſcendent au-deſſous du même point dans la baſſe Mer. Cette Queſtion dépend de toutes les circonſtances qui concourent pour former la hauteur abſolue des Marées, & que nous avons examinées au long avec tout le ſoin poſſible. Ce ſeroit donc ſe jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, ſi nous voulions traiter la préſente Queſtion avec la même rigueur, & auſſi ſcrupuleuſement, que nous avons fait l'autre; c'eſt pourquoi nous ne conſidérerons que les circonſtances fondamentales & principales, qui ſont que la Terre eſt toute inondée, que les Luminaires ſont dans le plan de l'Equateur, & que la latitude du lieu eſt nulle, faiſant abſtraction de toutes les cauſes ſecondes: ceux qui voudront enſuite une Solution plus exacte, n'auront qu'à conſulter les Chapitres VIII. & IX. pour y arriver.

Soit donc encore (comme nous avons ſuppoſé au Chap. V., $b\zeta s\delta b$ l'Equateur, & que b marque le lieu du Soleil, ζ celui de la Lune, & z le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par yz; ſi l'on prend un Arc de 90 degrés zs, le point s marquera l'endroit du plus grand baiſſement des eaux, exprimé par sx: nous avons démontré là-deſſus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

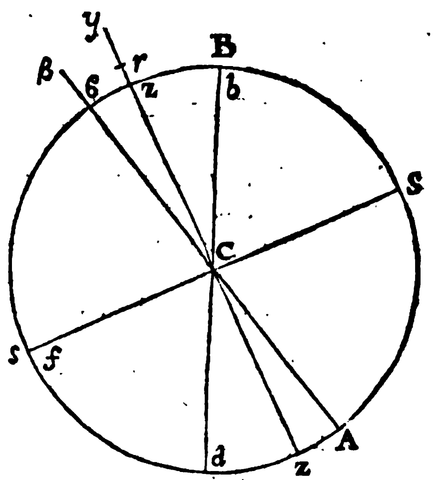
$$yz = \frac{2bb + 3\sigma\sigma}{3bb} \times \zeta + \frac{2bb - 3\varsigma\varsigma}{3bb} \times \delta.$$

dans laquelle équation b marque le Sinus total, σ le Sinus de l'Angle

bCz,

bCz, déterminé au §. XI. Chap. V. ρ le Sinus de l'Angle ϵCz, exprimé au §. XIII. Chap. V. ϵ la hauteur des Marées entant qu'elles ſeroient produites par la ſeule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant sx comme poſitive, de négative qu'elle eſt par rapport à yz, on a généralement

$$sx = \frac{bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \epsilon + \frac{bb - 3\rho\rho}{3bb} \times \delta.$$



Or comme les points z & s, qui ſont de niveau, marquent le point fixe dans le ſens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités yz & sx marquent préciſément l'élévation des eaux au deſſus du point fixe, & leur baiſſement au-deſſous du même point, tels que nous ſommes propoſés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(a) La différence entre chaque élévation au-deſſus du point fixe, & la deſcente au-deſſous du même point, eſt toujours $= \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\delta$: d'où nous voyons déja que l'une croiſſant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer auſſi, qui eſt le Phénomene obſervé par M. Caſſini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de Marée: je dis *environ*, parce que les quantités ϵ & δ ſont variables, quoique leurs variations ſoient beaucoup plus petites que celles qui réſultent des différens âges de la Lune, & à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, eſt preſque conſtante.

(b) Dans les Syzygies (ou plûtôt un jour & demi après) les quantités ρ & σ doivent être ſuppoſées $= 0$, & ainſi on a $yz = \frac{2}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\delta$, & $sx = \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\delta$: la montée eſt donc dans les grandes Marées toujours double de la deſcente. Cette propriété ſervira à déterminer commodément le point fixe dans chaque Port, & elle le donne de 5. pieds 3 pouces plus haut pour Breſt, qu'il n'a été choiſi par les Obſervateurs, ſi on la compare avec l'Obſervation, qui eſt au milieu de la page 94. des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(c) Dans les Quadratures (ou un jour & demi après) il faut faire $\rho = 0$, & $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\epsilon$, & $sx = \frac{1}{3}\delta - \frac{2}{3}\epsilon$; d'où l'on voit que la montée & deſcente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raiſon variable dans les petites Marées, qui dépend du

rap-

rapport qui ſe trouve alors entre la force lunaire δ, & la force ſolaire β. Nous avons ſuppoſé dans cet Ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, & ce rapport poſé, il faut dire que dans les petites Marées, l'élévation des eaux au-deſſus de notre point fixe, eſt 8 fois plus grande que leur baiſſement au-deſſous du même point. Dans les Marées minimes nous avons ſuppoſé $\delta = 2\beta$, & dans les plus grandes des petites Marées $\delta = 3\beta$.

(*d*) Nous avons fait voir, que le point *z* n'eſt jamais éloigné beaucoup du point β, cela étant & faiſant le Sinus de l'Angle $bc\beta$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra ſuppoſer $\rho = 0$ & $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\beta; \quad \& \quad sz = \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\beta.$$

Si l'on applique toutes ces Regles aux Obſervations faites en différens tems & lieux, on y trouvera un grand accord, ſi l'on choiſit bien la juſte proportion entre les quantités δ & β. Mais on remarquera dans cet examen, que les Vents & les Courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce diſcours par quelques refléxions ſur notre Théorie. Elle ſuppoſe avant toutes choſes une peſanteur vers les centres du Soleil & de la Lune, pareille à celle qui ſe fait vers le centre de la Terre, & que cette peſanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'eſt le ſeul principe qui nous ſoit abſolument néceſſaire, & il n'y a perſonne qui le conteſte. La rondeur des Luminaires prouve ſuffiſamment la peſanteur qui ſe fait vers le centre; & quelle raiſon pourroit-on avoir pour donner des limites à cette peſanteur? Auſſi a-t-elle été reconnue depuis les ſiécles les plus reculés; mais on n'en a connu toute l'évidence & toutes les loix, que depuis la Philoſophie immortelle de M. NEWTON. Les premieres conſéquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des Marées, ſont purement Géométriques. Nous pouvons donc être aſſurés de connoître la vraie cauſe des Marées, quoique nous en ignorions encore la cauſe premiere, qui eſt la cauſe générale & phyſique de la peſanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cauſe, il mériteroit d'autant plus la préférence, que ſon Syſtême renfermeroit néceſſairement la vraie cauſe univerſelle de la peſanteur: cette conſéquence ſera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel Syſtême ſur les Marées. Il en eſt de ceci, comme ſi l'on demandoit, par exemple, pourquoi la ſurface de l'eau dans un reſervoir ſe met toujours horiſontalement: on voit qu'on ne ſçauroit en dire

re la premiere cauſe, ſans qu'elle renferme la vraie Théorie ſur la peſanteur & ſur la fluidité, qui ſeules peuvent être la vraie cauſe du Phénomene en queſtion. Cette ſeule refléxion m'a fait quitter quelques conjectures qui ſe préſentoient à mon eſprit ſur la cauſe matérielle des Marées, quoi qu'elles me paruſſent d'ailleurs aſſez plauſibles. Je n'ai fait au reſte en employant ce principe, que ce que Kepler a déja fait. M. Newton eſt allé beaucoup plus loin ſur cette matiere, après avoir démontré auparavant que la peſanteur vers chaque corps dans le Syſtême du monde diminue en raiſon quarrée reciproque des diſtances: d'où il a tiré pluſieurs nouvelles propriétés ſur les Marées, leſquelles s'accordant avec les Obſervations, pourroient confirmer davantage ſon principe ſur la diminution de la peſanteur, s'il avoit beſoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, ſi je me ſouviens bien, ſur les variations des Marées, qui dépendent des Phaſes de la Lune, des declinaiſons des Luminaires & de la latitude des lieux, ſoit à l'égard des hauteurs des Marées, ſoit à l'égard des Marées. Il ne ſert principalement qu'à déterminer au juſte les variations qui dépendent des différentes diſtances des Luminaires à la Terre, & que les Obſervations n'ont pû déterminer avec aſſez de préciſion; il n'y en a cependant aucune qui lui ſoit contraire, & pluſieurs Obſervations bien détaillées, ſont tout-à-fait conformes aux réſultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit ſur la peſanteur terreſtre, que j'ai conſidérée comme formée par l'attraction univerſelle de la matiere, n'a abſolument aucun rapport avec aucune variation des Marées; ces Marées pourront ſubſiſter telles qu'elles ſont, quelle que ſoit la nature de la peſanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a ſervi que par rapport à la queſtion, quelle devroit être la hauteur abſolue de la hauteur des Marées, ſans le concours d'une infinité de cauſes ſecondes, qui peuvent augmenter & diminuer ces hauteurs abſolues, de ſorte que quel qu'eût été le réſultat de ces recherches, notre Théorie n'en eût pû ſouffrir aucune atteinte. J'eſpére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de pluſieurs circonſtances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choiſiſſant les hypotheſes les plus vraiſemblables, des nombres tels que la nature de la choſe paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait ſûrs de n'avoir rien admis d'eſſentiel dans toutes nos recherches, qui ne ſoit au-deſſus de toute conteſtation.

Quant à l'application de nos principes, à l'uſage que j'en ai fait, & au ſuccès de mon travail, ce n'eſt pas à moi à faire cet examen, ſur-tout ne pouvant le faire, ſans entrer dans un certain parallele avec un auſſi grand Homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques ſuccès, je dois avouer à l'honneur de ce ſçavant Philoſophe, que c'eſt

lui qui nous a mis en état de raiſonner ſolidement ſur ces ſortes de matieres; & ſi j'oſe me flatter de quelque mérite, c'eſt celui d'avoir traité notre ſujet avec une attention & une exactitude conforme aux grande vûës de L'ACADEMIE, & au reſpect qu'on doit à cet illuſtre Corps.

DE CAUSA PHYSICA FLUXUS ET REFLUXUS MARIS.

A D. D. MAC-LAURIN *Mathematicarum Profeſſore, è Societate Academiæ Edimburgenſis.*

OPINIONUM COMMENTA DELET DIES, NATURÆ JUDICIA CONFIRMAT.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum Maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menſtruum & annuum; motu diurno Mare bis ſingulis diebus intumeſcit defluitque, menſtruo æſtus in Syzygiis Luminarium augentur, in Quadraturis minuuntur, annuo denique æſtus hyeme quàm æſtate fiunt majores: verùm Phænomena hæc ſunt pauld accuratiùs proponenda.

I. Motus Maris diurnus abſolvitur horis circiter ſolaribus 24. minutiſque primis 48, intervallo ſcilicet temporis quo Luna motu apparente à Meridiano loci cujuſvis digreſſa ad eundem revertitur. Hinc altitudo Maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum ſitum reſpectu Meridiani loci dati; verùm hora ſolaris in quam incidit æſtus ſingulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulſus ad Meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, ſecundùm Obſervationes à celeb. D. Caſſini allatas, ratio ſit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppoſitio Solis, & æquatio à

 motu

* Plin. Lib. 2. Cap. 97.

motu Lunæ deſumpta adhibenda, ut tempus quo Mare ad maximam aſſurget altitudinem die Novilunii vel Plenilunii accuratiùs definiatur. In æſtuariis autem diverſi exiſtunt æſtus tempore, ut loquitur Plinius, non ratione diſcordes. Duo æſtus qui ſingulis diebus producuntur, non ſunt ſemper æquales; matutini enim majores ſunt veſpertinis tempore hyberno, minores tempore æſtivo, præſertim in Syzygiis Luminarium. (*a*).

II. De motu Maris menſtruo tria præcipuè ſunt obſervanda. 1. Æſtus fiunt maximi ſingulis menſibus paulò poſt Syzygias Solis & Lunæ, decreſcunt in tranſitu Lunæ ad Quadraturas, & ſunt paulò poſt minimi. Differentia tanta eſt, ut aſcenſus totius aquæ maximus ſit ad minimum ejuſdem menſis, ſecundùm quaſdam Obſervationes, ut 9 ad 5; & in nonnullis caſibus differentia obſervatur adhuc major. 2. Æſtus ſunt majores, cæteris paribus, quò minor eſt diſtantia Lunæ à Terra, idque in majori ratione quàm inverſa duplicata diſtantiarum, ut ex variis Obſervationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. aſcenſus aquæ in Portu Briſtonico, (*b*) referente eodem Cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. & Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque caſu ferè eadem; in priori diſtantia Lunæ partium 953, in poſteriori partium 1032, quarum diſtantia mediocris eſt 1000. Eſt autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22. pedes 5 digit. ad 19 pedes 1$\frac{2}{5}$ digitos; aſcenſus autem aquæ in poſteriori caſu fuit tantùm 18. ped. cum 2. digitis. 3. Æſtus ſunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna verſatur in Circulo æquinoctiali, & minuuntur creſcente Lunæ declinatione ab hoc Circulo.

III. Æſtus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor eſt diſtantia Solis à Terra; adeòque majores hyeme cæteris paribus, quàm æſtate. Differentia verò longè minor eſt quàm quæ ex diverſis Lunæ diſtantiis oritur. Ex. gr. diſtantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19. 1711. & Decemb. 28. 1712. aſcenſus aquæ priore die pedum 18 digit. 4, poſteriori pedum 19 digit. 2; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa Obſervatione. (*c*).

Porrò in diverſis locis æſtus ſunt diverſi, pro varia locorum latitudine, eorumque ſitu reſpectu Oceani unde propagantur, pro ipſius Oceani amplitudine, & littorum fretorumque indole, aliiſque variis de cauſis.

SECTIO II.

Principia.

Phænomenis æſtus Maris inſignioribus breviter recenſitis, progredimur ad

(*a*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.
(*b*) *Ibid.* (*c*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.

ad Principia, unde horum ratio eſt reddenda. Liceat tamen præfari nobiliſſimam quidem, ſed ſimul difficilimam eſſe hanc Philoſophiæ partem, quæ Phænomenorum cauſas inveſtigat & explicat. Ea eſt Naturæ ſubtilitas, ut non ſit mirum cauſas primarias, ſolertiam Philoſophorum plerumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, integramque cauſarum ſeriem nobis exhibere in ſe ſuſceperunt; illi certè magnis ſuis auſis hucuſque exciderunt. Philoſophiam quidem perfectiſſimam viri clariſſimi ſibi propoſuerunt extruendam, qualem tamen humanæ ſorti competere fas eſt dubitare. Præſtat igitur tantorum virorum ſucceſſu minùs felici edoctos, ipſius naturæ veſtigia cautè & lentè ſequi. Quòd ſi Phænomena ad generalia quædam Principia reducere poſſimus, horumque vires calculo ſubjicere, hiſce gradibus aliquam veræ Philoſophiæ partem aſſequemur; quæ quidem manca ſeu imperfecta erit, ſi ipſorum Principiorum cauſæ lateant: tanta tamen ineſt rerum naturæ venuſtas, ut ea pars longè præſtet Subtiliſſimis virorum acutiſſimorum commentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifeſtum eſt Luminarium, Lunæ præſertim, motibus affines eſſe & analogos. Eadem eſt periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem motûs menſtrui ac Lunæ ad Solem; utriuſque Luminaris vis in motu Maris generando hinc elucet, quòd æſtus ſint majores quò minores utriuſque diſtantiæ à Terra; adeò ut nullus ſit dubitandi locus, motum Maris eſſe aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compoſitum. Quales autem dicemus illas eſſe vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis ſingulis diebus tollunt & deprimunt; quæ in Syzygiis Luminarium conſpirant, Quadraturis pugnant; in minoribus utriuſque diſtantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores ſunt; & nonnunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem deprimuntur, quàm cùm in Meridiano ſuperiori ambo dominantur. Fuerunt Viri celeberrimi qui æſtum Maris preſſione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm cauſam & menſuram hujus preſſionis non oſtenderunt, nec quo pacto motus Maris varii hinc oriri poſſint ſatis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio poſito) ad Calculum revocare docuerunt.

Sagaciſſimus Keplerus Mare verſùs Lunam gravitare, æſtumque Maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, poſtquàm leges gravitatis detexiſſet, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipſius gravitate verſùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lunam & Solem pro diverſis ſuis diſtantiis ab horum centris, primuſque motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fatendum quidem eſt gravitatis cauſam ignotam eſſe vel ſaltem obſcuram;

Corpora tamen non ſunt ideò minùs gravia. Sint qui aſſerant Corpora nullo impulſu aut vi externâ, ſed vi quâdam innatâ ſe mutuò appetere; verùm non æquum eſt horum ſomnia veritati afficere. Alii ſtatim confugiant ad immediatum ſupremi Auctoris imperium, aſt neque horum nimia feſtinatio probanda eſt, neque illorum faſtidium qui tot naturæ teſtimoniis non attendunt quoniam cauſa gravitatis eſt obſcura. Vis gravitatis eſt nobis adeò familiaris, ejuſque menſura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æſtimandas ferè ſemper utamur; quam in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, & ſecundùm certam legem augeri & minui demonſtravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem fruſtra deſideres in ardua & difficili hâc Philoſophiæ parte, quæ de rerum cauſis agit.

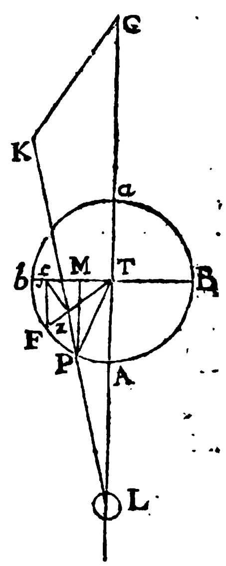
Newtonus argumento ſingulari oſtendit, Lunam urgeri versùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione diſtantiarum) cum gravitate Corporum terreſtrium planè congruit; quali Terram versùs Lunam pariter urgeri æquo jure cenſendum eſt. Cùm Corpus aliquod versùs aliud pellitur, inde quidem haud ſequitur hoc versùs illud ſimul urgeri. Verùm quid de gravitate Corporum cœleſtium ſentiendum ſit, ex iis quæ comperta ſunt de gravitate Corporum terreſtrium (aliiſque viribus ſimilibus) optimè dignoſcitur; cùm per hanc ad illam agnoſcendam ducamur, ſintque Phænomena omninò ſimilia. Mons gravitat in Terram, & ſi Terra non urgeret montem vi æquali & contraria, Terra à monte pulſa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò ſtatus cujuſvis ſyſtematis Corporum (i. e. motus centri gravitatis) neceſſariò turbatur ab omni actione cui non æqualis & contraria eſt aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut conſtans dici poſſit in ſyſtemate ſi hæc lex locum non habeat. Cumque Terræ partes ita ſemper in ſe mutuò agant, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur à mutuis Corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, ſive intra ſive extra ſuperficiem ſitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliiſque, teſte experientiâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, ſed hanc quoque in illam gravitare, & utramque circa commune centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius ſyſtematis centrum gravitatis (a) continuò revolvitur.

Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem eſſe quantitati materiæ ſolidæ Corporis, accuratiſſima docent experimenta, idemque, è calculo gravitatis Corporum cœleſtium comprobatur; quin gravitatem quoque ſequi

(a) Suſpicari licet aliquam obliquitatis Eclipticæ variationem, de qua ſermo eſt apud Aſtronomos, ex motu Solis circa centrum ſyſtematis oriri: indicio erit hanc eſſe Phænomeni cauſam, ſi conſtiterit illam variationem analogiam ſervare cum motu Jovis Planetarum maximi.

ſequi rationem materiæ Corporis verſùs quod dirigitur, ex principio memorato aliiſque argumentis colligitur. Similis eſt ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò denſiora ſunt Corpora quæ ſubintrant. Terræ partes verſùs ſe mutuò gravitant, non verſùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi & analogiæ naturæ ſit maximè conſentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratiſſimis experimentis quæ in Boreali Europæ parte nuper inſtituerunt viri clariſſimi ex Academia Regia Pariſienſi. Cauſa gravitatis (quæcumque demum ſit) latè dominatur; cumque ſit diverſa in diverſis diſtantiis, non eſt mirandum, ejus vim pendere quoque à magnitudine illius Corporis, verſùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc Corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ ſic loqui, id autem ſenſu vulgari non Philoſophico eſt intelligendum.

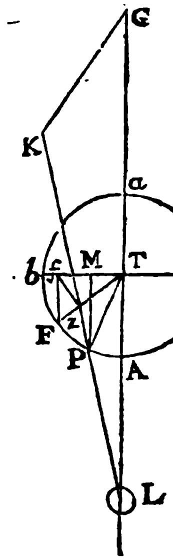
Hæc breviter tantùm hîc attingimus. Newtonus poſtquàm definiviſſet vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri Æquatoris & Axis Terræ (quam approximatione quâdam ſuâ inveſtigaverat) per regulam auream quærit breviter aſcenſum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ quæ ſic prodit parum à verâ differat, cùm tamen Problemata hæc ſint diverſi generis, quorum priùs pendet à Quadraturâ circuli, poſterius autem à Quadraturâ Hyperbolæ ſeu Logarithmis, ut poſteà videbimus; ſitque dubitandi locus an à priori ad poſteriorem elevationem determinandam, tranſitus adeò brevis ſit omni ex parte legitimus, vel etiam an Methodus quâ figuram Terræ definiverat ſit ſatis accurata; cúmque vires ſubtiliſſimæ motum Maris producant, quæ nullos alios ſenſibiles edunt effectus, adeò ut leviſſima quæque in hac diſquiſitione alicujus momenti eſſe poſſint; propterea exiſtimavi me facturum operæ-prætium, ſi aliam aperirem viam quâ calculus in hiſce Problematibus ex genuinis principiis accuratiſſimè inſtitui poterit.



Repetenda imprimis ſunt pauca ex Newtono, poſtea viam diverſam ſequemur. Sit L Luna, T centrum Terræ, Bb planum rectæ LT perpendiculare, P particula quævis Terræ; ſitque PM perpendicularis in planum Bb. Repræſentet LT gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro T poſitæ verſùs Lunam, ſumatur LK ad LT, ut eſt LT^2 ad LP^2, eritque recta LK menſura gravitatis particulæ P in Lunam. Ducatur KG rectæ PT parallela, occurratque LT productæ, ſi opus eſt, in G, & reſolvetur vis LK in vires KG & LG, quarum prior urget par-

ticulam

ticulam *P* verſùs centrum Terræ eſtque ferè æqualis ipſi *PT*; poſterioris pars *TL* omnibus particulis communis, & ſibi ſemper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars *TG* eſt quàm proximè æqualis ipſi 3 *PM*: * Imprimis igitur quærendum eſt quænam debeat eſſe figura Terræ fluidæ cujus particulæ verſùs ſe mutuò gravitant viribus in inverſâ diſtantiarum ratione, duplicatâ decreſcentibus, quæque ſimul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera verſùs centrum *T* dirigitur, eſtque ſemper ut *PT* diſtantia particulæ à centro, altera agit in recta ipſi *TL* parallela eſtque ad priorem ut 3 *PM* ad *PT*. Oſtendemus autem Sectione ſequenti figuram hujus Fluidi eſſe accuratè Sphæroidem quæ gignitur revolutione Ellipſeos circà Axem tranſverſum, ſi Terra ſupponatur uniformiter denſa; atque hinc calculum motûs Maris ex motibus cœleſtibus deducere conabimur.



Obſervandum autem alias cauſas conſpirare ad motus Maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ verſùs Lunam & Solem. Motus Terræ diurnus circa Axem ſuum variis modis æſtum Maris afficere videtur, præter illum à Newtono memoratum, quo æſtus ad horam lunarem ſecundam aut tertiam retardatur. 1. Æſtus fit paulò major ob vim centrifugam & figuram ſphæroïdicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus Maris altioribus quàm in depreſſioribus. 2. Cùm Maris æſtus fertur vel à Meridie verſùs Septentrionem, vel contrà à Septentrione verſùs Meridiem, incidit in aquas, quæ diverſâ velocitate circa Axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri neceſſe eſt, ut poſtea dicemus. Porrò ſecundùm Theoriam gravitatis, vis quâ particulæ Maris urgentur verſùs Terram ſolidam, (quæ aquâ longè denſior eſt) ſuperat vim quâ verſùs aquam urgentur. Vires illæ ſunt quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna & Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum & ſtaticis nullos producant effectus ſenſibiles, tantos autem motus in aquis Oceani generent, ſuſpicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

* Vis hæc paulò major eſt ſi particula *P* ſit in parte Terræ Lunæ obverſa, minor ſi in parte Lunæ averſâ, unde meritò habetur æqualis ipſi 3 P M.

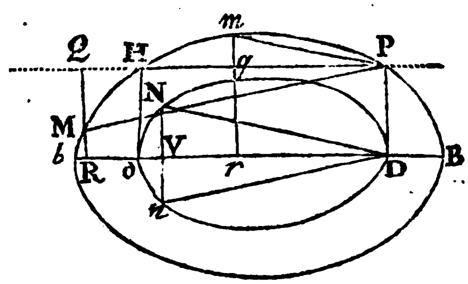
SECTIO III.

De Figurâ quam Terra fluida æqualiter denſa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

Expoſitis Phænomenis æſtus Maris & principiis generalibus unde celeberrimi Phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis ſuprà explicatis, agitata aſſumeret; præmittenda autem ſunt quædam Lemmata quibus hæc diſquiſitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

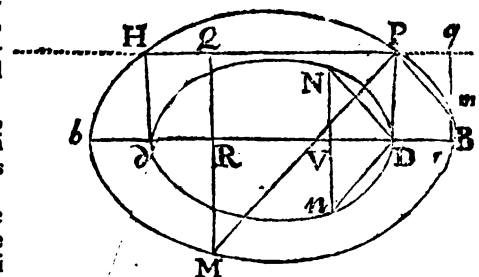
(†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonſtrandum Corol. 4um. proponitur, quod Corollarium ad Propoſitionem ſequentem reducitur quæ facillime Analytice demonſtrari poteſt.



THEOREMA.

A Puncto quovis Ellipſeos, ducantur ad Ellipſim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H ſit axi parallela reliquæ P M, P m faciant cum ipſa æquales quolvis angulos M P H, m P H; à punctis P, H, M & m ducantur perpendiculares ad P H & ad axim P D, H d, Q M R, m q r & ſuper D d deſcribatur Ellipſis ſimilis priori, ducanturque à puncto D ad eam Ellipſim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ ſecet axim in V dico quod 2 D V = P Q + P q = D R + D r, ſi puncta Q & q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod 2 D V = P Q − P q = D R − D r ſi puncta Q & q cadant ad partes diverſas puncti P.



Primo quoniam ex conſtructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facile deducitur lineam N V n eſſe axi perpendicularem ideoque ſi Radius ſit ad Tangentem anguli Q P M, ut 1 ad t, & D V dicatur z, erit N V $= tz$; & pariter ſi P Q aut Pq vel eorum æquales D R aut D r dicantur x, M Q vel m q dicentur, tx.

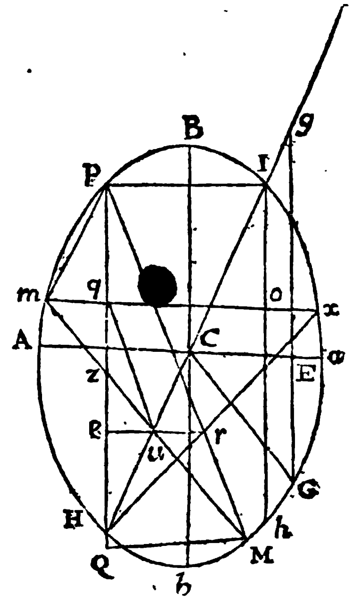
Axis major ſit ad minorem in utraque Ellipſi ut a ad b dicaturque B D f, D b $= g$, D P $= h$, & D d $= g - f = l$ erit per naturam Ellipſeos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, & pariter erit $a^2 : b^2 = z \times \overline{l - z} : t^2 z^2 = l - z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l - z : z$ & Componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} =$

$$a^2 t^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} = DV.$$

In primo autem caſu in quo Q & q ſunt ab eadem parte puncti P erit R M $= h - tx$

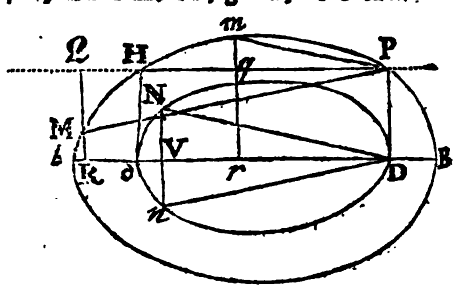
vel

Sit $Abab$ Ellipſis, C centrum, HI diameter quævis, Mm ordinata ad diametrum HI in puncto u, ex H & m ducantur rectæ HP & mx parallelæ, duabus quibuſvis diametris conjugatis; & ſibi mutuò occurentes in q; jungantur qu & PM, atque hæ rectæ erunt ſibi mutuò parallelæ.

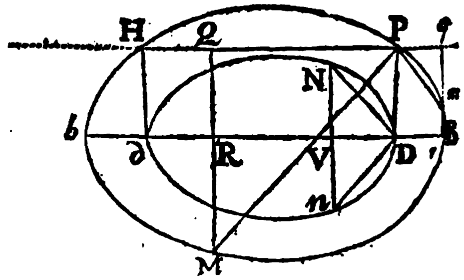


Occurrat recta HP, ordinatæ Mm in z, & rectæ MQ (quæ parallela ſit ipſi mq) in Q. Sint CG, CA & CB ſemidiametri reſpectivè parallelæ rectis Mm, mx & HP, Ducatur GE parallela ipſi CB & producatur donec occurrat ſemidiametro CI in g. Ex natura Ellipſeos Rectangulum $Mz \times zm : Hz \times zP :: CG^2 : CB^2$; & ob parallelas CG & Mm, erit $qz : zm :: GE : CG$. Unde $Mz \times qz : Hz \times zP$::

vel $tx-h$ & $rm = h+tx$, & BR aut Br, $f+x$; & Rb aut rb, $g-x$; hinc ex natura Ellipſeos erit $a^2 : b^2 = \overline{f+x} \times \overline{g-x} : \overline{h \mp tx}^2$ $= fg + gx - fx - xx : h^2 \mp 2htx + t^2x^2$ $= lx - x^2 : \mp 2htx + t^2x^2$ (demptis ex utroque termino reſpectivè terminis $fg : h^2$ qui ſunt in eâdem ratione, & poſito l loco $g-f$) $= l - x : \mp 2ht + t^2x$, atque hinc habetur $a^2t^2x \mp 2a^2ht = b^2l - b^2x$ & tranſpoſitione factâ reductiſque terminis, fit $x = \frac{b^2l \pm 2a^2ht}{a^2t^2+b^2}$. Quare ſi ſumatur ſumma duarum linearum DR, Dr, quæ per ſingulos valores x exprimuntur erit $DR + Dr$ $= PQ + Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2+b^2}$ duplum valoris DV prius inventi.



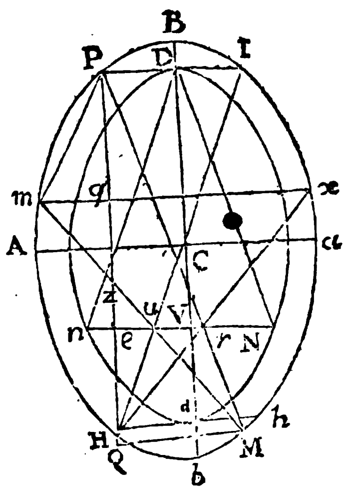
In altero verò caſu in quo Q & q hinc inde à puncto P cadunt, erit $RM = tx - h$, & $rm = h - tx$, erit $BR = f + x$ & $Br = f - x$, $Rb = g - x$ & $rb = g + x$. Unde ex natura Ellipſeos erit $a^2 : b^2 = f \pm x \times g \mp x : h^2 - 2htx + t^2x^2$ $= fg \pm gx \mp fx - x^2 : h^2 - 2htx + t^2x^2$ $= \pm lx - x^2 : 2htx + t^2x^2$ (demptis terminis fg; h^2 & adhibito l loco $g-f$) $= \pm l - x : -2ht + t^2x$, hincque obtinetur $a^2t^2x - 2hta^2 = \pm b^2l - b^2x$ & tranſpoſitione factâ reductiſque terminis fit $x = \frac{\pm b^2l + 2hta^2}{a^2t^2+b^2}$. Quare ſi ſumatur differentia duorum DR, Dr quæ per ſingulos valores x exprimuntur erit $DR - Dr = PQ - Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2+b^2}$ duplum valoris DV prius inventi, ergo $2DV = PQ \mp Pq$ prout Q & q ſunt ab eâdem vel à diverſâ parte puncti P. Q. E. D.



$CG \times GE : CB^2$. Verùm $Hz \times zP : zu \times zP :: Hz : zu :: Gg : CG$. Quare ex æquo $Mz \times zq : zu \times zP :: Gg \times GE : CB^2$. Eſt autem Rectangulum ſub Gg & GE æquale quadrato ex ſemidiametro CB per notam proprietatem ellipſeos, cùm CI ſit conjugata ſemidiametro CG, & CB ipſi CA. Proinde $Mz \times zq = zu \times zP$, & $zq : zu :: zP : zM$, adeóque qu parallela rectæ PM. q. e. d.

COR. 1. Recta PQ dividitur harmonicè in q & z vel $PQ : Pq :: Qz : qz$. Quippe ducatur ue parallela ipſi mx, occurratque rectæ HP in e, tum erit $Pz : qz :: PM : qu$ (ob parallelas PM, qu) $:: PQ : qe$. Unde $Pq : qz :: Pe : qe :: qe : ez :: Pe + qe : qe + ez ::$ (quoniam Qe, eq ſunt æquales) $PQ : Qz$.

COR. 2. Occurrat recta mx Ellipſi in x, jungatur Hx quæ occurrat rectæ PM in r, juncta ur erit parellela mx. Quippe ſit Ih parallela rectæ HP & occurrat ipſi mx in o; tum ox erit æqualis rectæ qm & $Io : ox :: Pq : qm :: PQ : QM$; adeóque Ix erit parallela ipſi PM. Verùm cùm IH ſit diameter Ellipſeos & ad x punctum in Ellipſi ſitum ductæ ſint rectæ Ix, Hx ab extremitatibus diametri IH, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ Ellipſeos. Quare cùm ex punctis H & M eductæ ſint duæ rectæ Hx & PM reſpectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ ſibi mutuò occurrunt in r, juncta ur erit parallela rectæ xm per hoc Lemma.

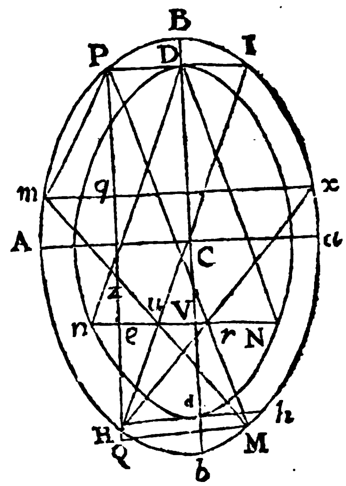


COR. 3. Sit recta HP nunc parallela Axi Ellipſeos, eritque Angulus HPM æqualis Angulo HPm, quoniam $QM : qm :: Qz : qz :: PQ : Pq$ per Cor. 1. Ducantur porrò Hh & PI parallelæ alteri Axi Aa & occurrant Axi Bb in D & d; ſuper Axem Dd deſcribatur Ellipſis ſimilis Ellipſi $ABab$ & ſimiliter poſita cui occurrat recta ur producta in N & n; occurrat ur Axi Dd in V, eritque VN vel Vn æqualis rectæ er, & ſi jungantur Dn, DN erunt hæ rectæ reſpectivè parallelæ rectis PM, Pm. Nam $Pe : er :: Pq : qm$ & $He : er :: Hq : qx$, unde $He \times Pe : er^2 :: Hq \times qP : mq \times qx :: CB^2 : CA^2$. Sed Rectangulum $DV \times Vd : VN^2 :: CB^2 : CA^2$; $dV = He$, $DV = Pe$, adeóque $DV \times Vd = He \times Pe$, unde $VN^2 = er^2$, & $VN = er$, PM parallela rectæ DN & Pm rectæ Dn.

COR. 4. Hinc ſequitur converſè quod ſi Nn ſit ordinata ab interiori Ellipſi ad Axem Dd & DP perpendicularis Axi Dd occurrat Ellipſi exteriori in P; jungantur DN & Dn hiſque parallelæ PM, Pm

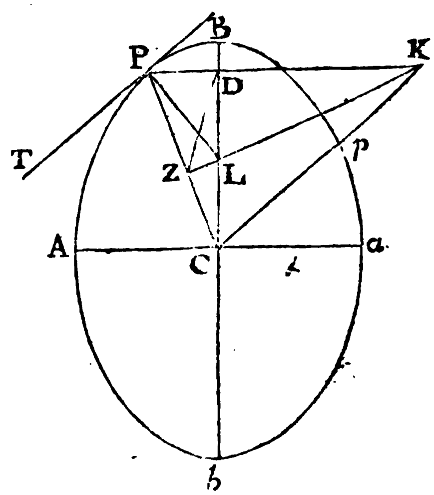
 occur-

occurrant Ellipſi exteriori in M & m; ducatur PH parallela Axi Dd, in quam ſint perpendiculares MQ & mq, tum $PQ + Pq$ (vel $2Pe$) erit æqualis $2DV$, punctis Q & q cadentibus ad eaſdem partes puncti P, & $PQ - Pq = 2DV$ cum Q & q ſunt ad contrarias partes puncti P.



Lemma II.

Recta PL perpendicularis Ellipſi $ABab$ in P, occurrat Axi Bb in L, & ex puncto L ſit LZ perpendicularis in ſemidiametrum CP, eritque Rectangulum CPZ contentum ſub ſemidiametro CP & interceptâ PZ æquale quadrato ex ſemiaxi CA.

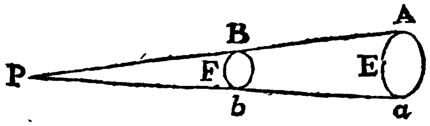


Sit Cp ſemidiameter conjugata ipſi CP, ducatur PD perpendicularis in Axem Bb & producatur donec occurrat ſemidiametro Cp in K, jungatur KZ. ſitque PT tangens Ellipſeos in puncto P. Ob Angulos rectos LDP, LZP, LPT circulus tranſibit per quatuor puncta L, D, P, & Z, & continget rectam PT in P, adeóque Angulus PDZ æqualis erit Angulo CPT vel PCK. Proinde circulus tranſibit per quatuor puncta C, K, D & Z; Angulus CZK æqualis erit recto CDK, KZ tranſibit per punctum L & ex naturâ circuli $CP \times PZ = DP \times PK = CA^2$. q. e. d. (a)

Lem-

(a) Proprietates his in hoc & præcedenti Lemmate demonſtratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

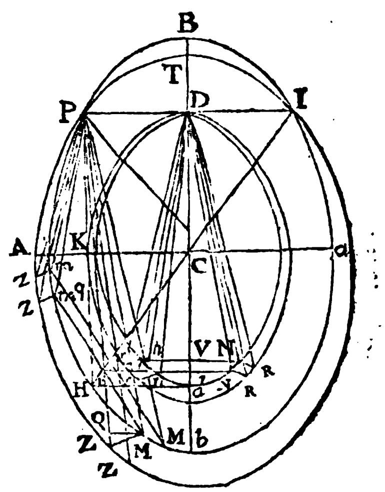
LEMMA III.



Ponamus particulas corporum verſùs ſe mutuò gravitare viribus decreſcentibus in inverſâ duplicatâ ratione diſtantiarum à ſe invicem, ſintque *PAEa*, *PBFb* ſimiles pyramides vel coni ex materiâ hujuſmodi homogeneâ compoſiti, eritque gravitas particulæ *P* in ſolidum *PAEa* ad gravitatem ejuſdem particulæ in ſolidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*, vel ut homologa quævis latera horum ſolidorum.

Gravitas enim particulæ *P* in ſuperficiem quamvis *AEaA* puncto *P* concentricam eſt ut ſuperficies hæc directè & quadratum radii *PA* inversè, adeóque eſt ſemper eadem in quâvis diſtantiâ *PA*. Quare gravitas particulæ *P* versùs totum ſolidum *PAEa* erit ad gravitatem ejuſdem particulæ versùs totum ſolidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*.

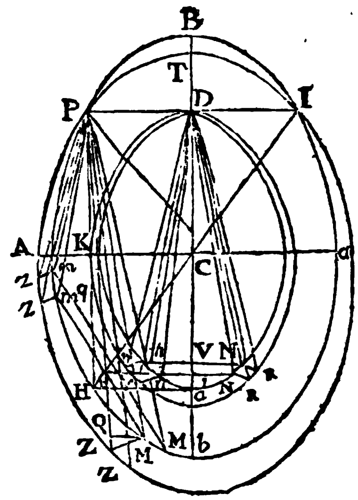
COR. 1. Hinc gravitates quibus particulæ ſimiliter ſitæ reſpectu ſolidorum ſimilium & homogeneorum versùs hæc ſolida urgentur, ſunt ut diſtantiæ particularum à punctis ſimiliter ſitis in ipſis ſolidis, vel ut latera quævis ſolidorum homologa. Quippe hæc ſolida reſolvi poſſunt in ſimiles conos vel pyramides, vel ſimilia horum fruſta, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.



COR. 2. Hinc etiam facilè ſequitur (*) quòd ſi annulus ellipticus, figuris ſimilibus *ABab*, *DndN* terminatus, circà Axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra ſolidum ſic genitum ſitæ, vel in interiori ejus ſuperficie poſitæ, versùs hoc ſolidum evaneſcere; quoniam ſi recta quævis Ellipſibus hiſce ſimilibus & ſimiliter poſitis occurrat, æquales ſemper erunt rectæ ſegmenta extrema quæ ab Ellipſibus intercipiuntur (ut facilè oſtenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales & oppoſitæ in hoc caſu ſe mutuò deſtruent. Hinc verò ſequitur quòd ſi *ABab* ſit Sphærois genita motu Ellipſeos circà alterutrum Axem, ſintque *B* & *D* particulæ quævis in eodem ſemidiametro ſitæ, gravitatem particulæ *B* versùs Sphæroidem fore ad gravitatem particulæ *D* ut diſtantia *CB* ad diſtantiam *CD*, per Corollarium præcedens.

(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

Lemma IV.



Sit *ABab* Sphærois genita motu ſemiellipſeos *ABa* circà Axem *Aa*, *P* particula quævis in ſuperficie ſolidi, ſit *PK* Axi normalis in *K*; & *PD* Axi parallela occurrat plano *Bb* (quod Axi ſupponitur normale) in *D*. Reſolvatur vis quâ particula *P* gravitat versùs Sphæroidem in duas vires, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula *K* in Axi ſita tendit ad centrum ſolidi, poſterior autem æqualis vi quâ particula *D* urgetur versùs idem centrum.

Producatur *PK* donec rursùs occurrat Ellipſi generatrici in *H*, ducatur *Hd* parallela Axi *Aa* quæ occurrat Axi *Bb* in *d*, concipiamus ſolidum *DndN* ſimile ipſi *BAba* & ſimiliter poſitum deſcribi ſuper Axem *Dd*. Horum ſolidorum Sectiones ab eodem plano reſectæ erunt ſemper Ellipſes ſimiles & ſimiliter poſitæ, uti notum eſt & facilè oſtenditur. Sint igitur *BAba*, *DndN* hujuſmodi figuræ à plano *PAbIBP*, quod ſemper tranſire ponatur per datam rectam *PDI* reſectæ ex ſimilibus hiſce ſolidis. Contineat planum *PzZIT* cum plano priori Angulum quàmminimum & faciat Sectiones ſimiles *PzZIT*, *DrRD* & ſimiliter poſitas in prædictorum ſolidorum ſuperficiebus. Hiſce poſitis, imprimis oſtendemus vim quâ particula *P* urgetur versùs duo fruſta quæ planis *PbI*, *PZI* & planis *PBI*, *PTI* continentur, ſi reducatur ad directionem *PK*, æqualem fore vi quâ particula *D* urgetur versùs fruſtum planis *DnND*, *DrRD* terminatum.

Sint enim *Nn*, *N'n'* duæ ordinatæ ex interiori Ellipſi ad Axem *Dd*; ſint (*a*) *PM*, *Pm*, *PM'* & *Pm'* reſpectivè parallelæ rectis *DN*, *Dn*, *DN'* & *Dn'*; ſint porrò plana *DNR*, *DN'R'*, *Dnr*, *Dn'r'*, *PMZ*, *PM'Z'*, *Pmz*, *Pm'z'* plano *PbIB* perpendicularia quæ alteri plano, *PzZIT* occurrant in rectis *DR*, *DR'*, *Dr*, *Dr'*, *PZ*, *PZ'*, *Pz*, *Pz'*, reſpectivè. His poſitis, quoniam Anguli *NDN'* & *MPM'*, *nDn'* & *mPm'*,

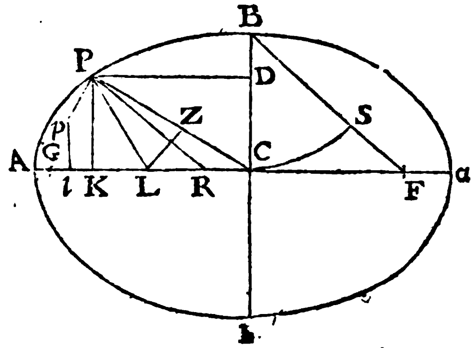
(*a*) In hac Figura deſcribenda rectas *NR*, *N'R'*, &c. non duximus ſecundùm regulas perſpectivæ, ſed eâ ratione quâ facillimè dignoſci poſſint.

mPm', ponuntur ſemper æquales; & rectæ PM & DN, Pm & Dn, æqualiter ſemper inclinantur ad PI communem planorum Sectionem; ſi Angulus NDN' & inclinatio planorum $PbTB$, $PZIT$ ad ſe invicem continuò minui ſupponantur donec evaneſcant, erunt gravitates particulæ D, in Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$ & particulæ P in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ ultimo in ratione rectarum DN, Dn; PM & Pm reſpectivè per Lemma 3. Eædemque vires ſecundùm rectas Axi Aa, perpendiculares æſtimatæ erunt ut rectæ DV, DV, PQ, Pq reſpectivè. Unde cùm $PQ \mp Pq = 2DV$ per Corol. 4. Lem. 1. ſequitur vim quâ particula P urgetur versùs Axem Aa, gravitate ſuâ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ æqualem eſſe vi, quâ particula D urgetur gravitate ſuâ versùs Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$. Quare ſi plana DNR, PMZ ſibi mutuò ſemper parallela & plano $PbIB$ perpendicularia moveantur ſemper circà puncta D & P (rectis ſcilicet DN, PM procedentibus ſemper in plano $PbIB$, & rectis DR, Pz in plano $PZIT$) erunt vires quibus particula P urgetur versùs Axem ex gravitate ſuâ in fruſta motu planorum PMZ, Pmz ſic deſcripta, æquales ſemper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem Axem gravitate ſuâ in fruſta motu planorum DNR, Dnr deſcripta; unde ſequitur particulam P urgeri eâdem vi ſecundùm rectam PK, gravitate ſuâ in fruſta planis PbI, PzI, & planis PBI, PTI contenta, quâ particula D tendit versùs fruſtra planis $DnND$, $DrRD$ terminata. Proinde cùm hæ vires ſecundùm rectas Axi totius ſolidi perpendiculares æſtimatæ ſint etiam æquales, & par ſit ratio virium quibus particulæ P & D urgentur versùs fruſta quævis alia ſimiliter ex ſolidis reſecta, ſequitur particulam P æqualiter urgeri versùs Axem gravitate ſuâ in ſolidum exterius, & particulam D gravitate ſuâ in ſolidum ſimile interius, vel etiam in ſolidum exterius, cùm hæ vires ſint eædem per Corol. 2. Lem. 3.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur ſecundùm rectam Axi Parallelam æqualem eſſe vi, quâ particula K in Axe ſita urgetur versùs centrum ſolidi.

COR. 1. Particulæ igitur quævis Sphæroidis æqualiter ab Axe vel Æquatore ſolidi diſtantes æqualiter versùs Axem vel Æquatorem urgentur. Vireſque quibus particulæ quævis urgentur versùs Axem ſunt ut illarum diſtantiæ ab Axe, & vires quibus urgentur versùs planum Æquatoris, ſunt ad ſe invicem, ut illarum diſtantiæ ab hoc plano.

Cor. 2. Repræſentet *A* vim quâ Sphærois urget particulam in Axis termino *A* ſitam, *B* vim quâ idem ſolidum urget particulam *B* in circumferentia circuli medii inter *A* & *a* poſitam; ſumatur *KR* ad *KC*, ut $\frac{A}{CA}$ eſt ad $\frac{B}{CB}$, jungatur *PR*, & particula *P* tendet versùs Sphæroidem in recta *PR*, vi quæ huic rectæ ſemper eſt proportionalis. Vis enim quâ particula *D* urgetur versùs centrum ſolidi, eſt ad *B*, ut *CD* ad *CB*, per Cor. 2. Lem. 3. Similiter vis quâ particula *K* urgetur versùs ſolidi centrum eſt ad *A*, ut *CK* ad *CA*. Quare per Lemma 4. vis quâ



particula *P* urgetur ſecundùm rectam *PK* Axi normalem eſt ad vim, quâ urgetur ſecundùm rectam *PD* Axi parallelam, ut $\frac{PK\times B}{CB}$ ad $\frac{CK\times A}{CA}$; adeóque ut $PK\times KC$ ad $CK\times KR$. i. e. ut *PL* ad *KR* ex conſtructione. Quare particula *P* urgetur ſecundùm rectam *PR*, his viribus conjunctis, & vis compoſita eſt ad *B*, ut *PR* ad *BC*. Quo verò pacto vires *A* & *B* computari poſſint poſtea oſtendemus.

PROPOSITIO I.

Theorema Fundamentale.

Conſtet Sphærois *ABab* materia fluida, cujus particulæ versùs ſe mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione diſtantiarum decreſcentibus; agantque ſimul duæ vires extraneæ in ſingulas Fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum Sphæroidis, ſitque ſemper proportionalis diſtantiis particularum ab hoc centro; altera agat ſecundùm rectas Axis ſolidi Parallelas, ſitque ſemper proportionalis diſtantiis particularum à plano *Bb* Axi normali; & ſi ſemiaxes *CA*, *CB* Ellipſeos generatricis ſint inverſæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis Axium punctis *A* & *B* ſitas, erit totum Fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propoſitio noſtra primaria clariſſimè demonſtretur, oſtendemus imprimis vim compoſitam ex gravitate particulæ cujuſvis *P* & duabus viribus extraneis, ſemper agere in rectâ *PL*, quæ eſt ad ſuperficiem Sphæroidis ſemper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis *PC* à ſuperficie ad centrum ductâ, ejuſdem ubique eſſe ponderis. 3. Fluidum in canalibus

canalibus quibuſvis à ſuperficie ad datam quamvis particulam intra ſolidum ductis, eâdem ſemper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A & B dicantur M & N, quæ ex hypotheſi ſunt in ratione Axium CB & CA. Reſolvatur vis prior extranea quæ agit ſecundùm rectam PC in vires duas, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires ſemper ut rectæ PK & KC. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ P urget eam ſecundùm rectam PK ſit etiam ut PK, per Lemma ſuperius, ſequitur vim totam quâ particula P urgetur ſecundùm rectam PK, eſſe ad N, ut PK ad CB. Vires tres agunt in particulam P ſecundùm rectam PD Axi parallelam, particulæ ſcilicet gravitas & duæ vires extraneæ, quæ ſingulæ variantur in ratione rectæ PD vel KC; adeóque vis ex his tribus reſultans erit ad M ut CK ad CA. Vis igitur quâ particula P urgetur ſecundùm rectam PK eſt ad vim quâ urgetur ſecundùm rectam PD ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ ſive (cùm $M:N::CB:CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam ſi PL Ellipſi generatrici perpendicularis occurrat Axi Aa in L, erit KC ad KL, ut CA^2 ad CB^2, ex notâ Ellipſis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut PK ad KL. Unde vis compoſita particulam urget in recta PL, quæ ad ſuperficiem Fluidi ponitur perpendicularis; eſtque ſemper ut recta hæc PL, cùm vires ſecundùm rectas PK ſint ſemper ut PK.

2. Sit LZ normalis in ſemidiametrum CP, & vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta PZ per vulgaria Mechanicæ Principia, & pondus Fluidi in rectâ PC ut rectangulum $CP \times PZ$, quod ſemper eſt æquale quadrato ex ſemiaxi CB per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, eſtque Fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in ſolido ubicunque ſita, Pp recta quævis à ſuperficie ad particulam p ducta; ſint PK, pl normales in Axem Aa, & vis quâ particula p urgetur pondere Fluidi in rectâ quâvis Pp ſecundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PK^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2} =$ (cùm $M:N::CB:CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA} - \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA}$ $=$ (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$, & ſi CG ſit ſemiaxis Ellipſeos per p ductæ ſimilis Ellipſi $ABab$, & ſimiliter ſitæ, $pl^2 : CG^2 - Cl^2 :: CB^2 : CA^2$) $\frac{M \times CA - M \times CG}{2}$ adeóque cùm hæc quantitas à ſitu puncti P non pendeat, vis hæc eſt ſemper eadem, ſi detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, Fluidum erit ubique in æquilibrio.

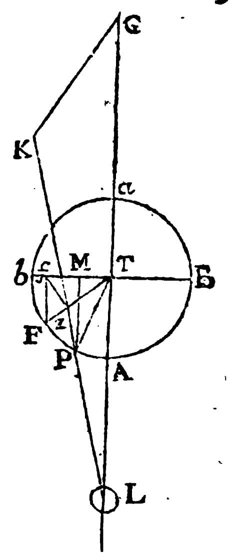
Cor. I. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in Sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eandem in loco B, V vis KG in mediocri ſuâ quantitate in ſuperiore Sectione expoſitâ, quâ Luna vel Sol aquam Sphæroidis deprimit in diſtantia d, quæ ponitur mediocris inter CA & CB. Sit $CA=a$, $CB=b$, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B+\frac{bV}{d}$, & $M=A+\frac{aV}{d}-\frac{3aV}{d}=A-\frac{2aV}{d}$. Unde per hanc Propoſitionem ſi $a:b::B+\frac{bV}{d}:A-\frac{2aV}{d}$, erit Fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B & V in terminis a & b ſpecies figuræ innoteſcet. Eſt $Aa-Bb=\frac{2a^2V}{d}+\frac{b^2V}{d}$.

Cor. 2. Cùm vis V (ſive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) ſit exigua admodum reſpectu virium A & B, & differentia inter a & b admodum parva, ducatur $a=d+x$ & $b=d-x$, eritque $Bd-Bx+V\times\frac{\overline{d-x}^2}{d}=Ad+Ax-2V\times\frac{\overline{d+x}^2}{d}$, & neglectis terminis ubi xx reperitur $Bd-Bx+Vd-2Vx=Ad+Ax-2Vd-4Vx$, unde $Bd-Ad+3Vd=Ax+Bx-2Vx$; adeóque $x:d::B-A+3V:B+A-2V$; & differentia altitudinis aquæ in A & B (ſeu $2x$) ad ſemidiametrum mediocrem d ut $2B-2A+6V$ ad $B+A-2V$, vel quàm proximè ut $B-A+3V$ ad gravitatem versùs Sphæroidem mediocrem.

Cor. 3. In præcedentibus Corollariis ſuppoſuimus $d=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$; verùm ſi d denotet aliam quamvis diſtantiam ubi vis KG ponatur æqualis ipſi V, ſitque $e=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$, erit $x:e::B-A+\frac{3eV}{d}:B+A-\frac{2eV}{d}$.

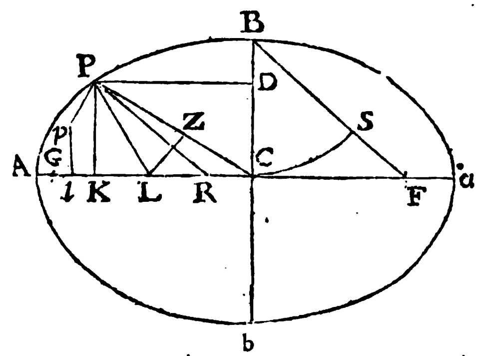
Cor. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, & figuram conſideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret ſi hæ vires ſeorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta vel oppoſita, & ſimul agant in Terram. In hoc caſu vires Luminarium conſpirant ad aquam tollendam in A & a, eamque deprimendam in B & b, & eaſdem ubique ſervant leges. Unde erit etiam in hoc caſu fluidum in æquilibrio, ſi vis tota quæ agit in loco A, ſit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA; adeóque ſi V nunc deſignet ſummam virium, quibus Sol & Luna aquam deprimit in rectis Tb, TB ad mediocrem diſtantiam fluidum erit in æquilibrio, ſi $b:a::A-\frac{2aV}{d}:B+\frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B-A+3V$ ad $B+A-2V$ quàm proximè, ut priùs.

Cor. 5. Sit nunc Luna in recta Aa, Sol in recta Bb, & quoniam

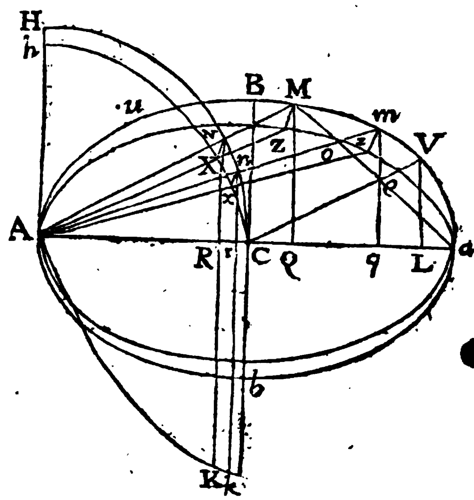


niam Lunæ vis potior eſt, Axis tranſverſus figuræ generatricis tranſeat per Lunam, conjugatus per Solem; & ſi vis tota quæ agit in loco *A* ſit ad vim totam quæ agit in loco *B* ut *CB* ad *CA* erit Sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc caſu. Sit *s* vis quâ Sol deprimit aquam in rectis *TA*, *Ta* ad mediocrem à centro *C* diſtantiam, *l* vis quâ Luna aquam deprimit in rectis *TB*, *Tb* ad æqualem diſtantiam; eritque vis tota quæ agit in loco *A* æqualis $A - \frac{2al}{d} - \frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco *B* æqualis $B + \frac{bl}{d} - \frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x : d :: B - A + 3l - 3s : B + A - 2l - 2s ::$ (ſi $l - s$ nunc dicatur V) $B - A + 3V.\ B + A - 2V$, ut priùs.

SCHOL. Eâdem planè ratione oſtenditur quòd ſi *BabA* ſit Sphærois fluida oblata genita motu ſemiellipſis *BAb* circa Axem minorem *Bb*; & vertatur hæc Sphærois circa eundem Axem tali motu ut gravitas versùs Sphæroidem hanc in Polo *A* ſit ad exceſſum quo gravitas in loco *B* ſuperat vim centrifugam in *B* ex motu Sphæroidis circa Axem oriundam ut *CB* ad *CA*, Fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde ſequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ à motu diurno oriunda immutatur, eſſe Sphæroidem oblatam qualis gignitur motu ſemiellipſis *Bab* circa Axem minorem (ſi materia Terræ pro æqualiter denſa habeatur) ſemidiametrum Æquatoris eſſe ad ſemiaxem ut gravitas ſub Polis in Terram eſt ad exceſſum gravitatis ſupra vim centrifugam ſub Æquatore, corpus in loco quovis *P* tendere versùs Terram vi quæ eſt ſemper ut recta *PL* perpendicularis Ellipſi generatrici & Axi majori occurrens in *L*, & menſuram denique gradus in Meridiano eſſe ſemper ut cubus ejuſdem rectæ *PL*. Hæc omnia accuratè demonſtrantur ex hac Propoſitione; quæ quamvis in diſquiſitione de figurâ Terræ eximii uſus ſint, hic obiter tantum monere convenit.



Lemma V.



Sit figura quævis ABa: deſcribatur circulus CNH centro A, radio quovis dato AC; ex A educatur recta quævis AM occurrens figuræ ABa in M, & circulo in N; ſint MQ & NR perpendiculares in Axem datum Aa, ſit KR ſemper æqualis abciſſæ AQ, & vis quâ particula A urgetur versùs ſolidum motu figuræ ABa circa Axem Aa genitum erit ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè.

Occurrat alia recta ex A educta figuræ in m & circulo in n, ſintque mq & nr normales in Axem Aa. Sit $AZza$ alia Sectio ſolidi per Axem, cui occurrant plana AMz, Amz ipſi AMa normalia in rectis AZ, Az, quæ circulum radio AC in plano $AZza$ deſcriptum ſecent in X & x; denique arcus Mo circularis centro A deſcriptus occurrat Am in o. His poſitis, minuatur angulus contentus planis AMa, AZa, & ſimul angulus MAm donec evaneſcant, & ultima ratio vis quâ particula A tendit ad Piramidem $AMZzm$ ad vim quâ urgetur versùs Piramidem $ANXxn$ erit rectæ AM ad AN, vel AQ ad AR, per Lem. II. vis hujus Piramidis eſt ut vis ſuperficiei $NXxn$ in rectam AN, adeóque ut $\frac{NX \times Nn}{AN^2} \times AN = \frac{NX \times Nn}{AN}$, vel ut $\frac{NR \times Nn}{AN}$ (quoniam NX eſt ut NR) i. e. ut Rr; ejuſdemque vis ad directionem Axis reducta ut $Rr \times \frac{AR}{AN}$; quare vis Piramidis $AMZzm$ ad eandem directionem reducta $Rr \times \frac{AQ}{AC} = \frac{Rr \times KR}{AC}$. Vis igitur quâ particula A urgetur versùs fruſtum ſolidi planis AMa, Aza contenti, eſt ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè; cúmque ſolidum ſit rotundum, motu ſcilicet figuræ circa Axem Aa genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum ſolidum.

Cor. Vis quâ particula A urgetur in ſolidum eſt ad vim quâ urgetur versùs Sphæram ſuper diametrum Aa deſcriptam ut area quam gene-

generat ordinata KR ad $\frac{2}{3}$ CA^2. Quippe ſi AMa ſit circulus; erit AQ ad Aa ut AQ^2 ad AM^2, vel AR^2 ad AN^2. Unde in hoc caſu erit $KR = \frac{2AR^2}{AC}$, & area ARK (quam generat ordinata KR) $= \frac{2AR^3}{3AC}$, adeóque area tota motu ordinatæ RK genita erit $\frac{2}{3}$ CA^2.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

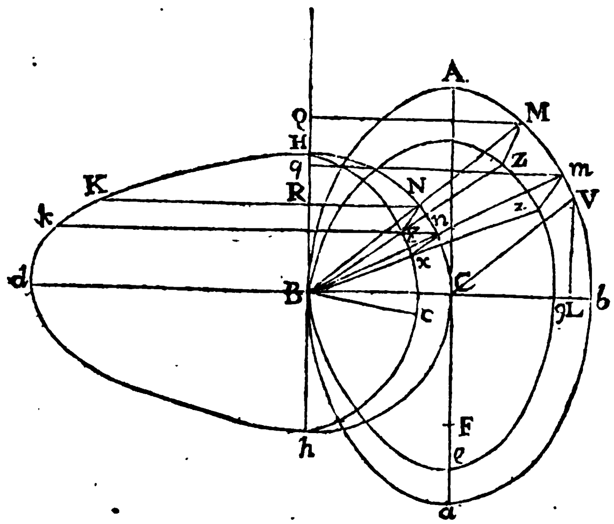
Invenire gravitatem particulæ A in extremitate Axis tranſverſi ſitæ verſùs Sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti ſit AMa Ellipſis; Aa Axis tranſverſus, C centrum, Bb Axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis AM ex A Ellipſi occurrens in M, cui parellela CV occurrat Ellipſi in V; unde ducatur ordinata ad Axem VL, juncta aM rectæ CV occurrat in e, eritque $AM = 2Ce$: cúmque $AQ : CL :: AM (2Ce) : CV :: 2CL : Ca$, erunt $\frac{1}{2}AQ$, CL & CA continuè proportionales. Sit $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $AR = x$, $CL = l$, cúmque $AR^2 : NR^2 :: CL^2 : VL^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : \overline{a^2 - l^2} \times \frac{b^2}{a^2}$; adeóque $l^2 = \frac{a^2b^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$ & AQ vel $KR = \frac{2ab^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$, area $ARK = \int \frac{2ab^2xdx}{a^4 - c^2x^2} =$ (ſi $z : x :: c : a$) $\int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{z^2dz}{a^2 - z^2}$. Quare ſit a quantitas cujus Logarithmus evaneſcit, ſive ſyſtematis Logarithmici modulus, l Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, eritque $ARK = \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$. Unde vis quâ particula A gravitat verſùs ſolidum genitum motu ſegmenti elliptici $AUMA$ circa Axem Aa, erit ad vim quâ eadem particula gravitat verſùs ſolidum genitum motu ſegmenti circularis ex circulo ſupra diametrum Aa deſcripti eadem recta AM abſciſſi circa eundem Axem ut $\frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$ ad $\frac{2x^3}{3a}$; & ſi L ſit Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times \overline{a+c}$) erit vis quâ particula A tendit verſùs totam Sphæroidem ad vim quâ tendit verſùs totam Sphæram ut $3b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3.

SCHOL. Eâdem ratione invenitur gravitas particulæ in Polo ſitæ verſùs Sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata eſt $\frac{2b^2a^2}{c^3} \times \frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit $BAba$ Sphærois oblata motu Ellipſis BAb circa Axem minorem genita, centro B, radio BC deſcribatur Arcus circu-

ſi CS, rectæ BF occurrens in S, eritque gravitas in hanc Sphæroidem in Polo B ad gravitatem in eodem loco verſùs Sphæram ſuper diametrum Bb deſcriptam ut $3\,CA^2 \times \overline{CF - CS}$ ad CF^3. Methodus verò quâ gravitas particulæ in Æquatore ſitæ verſùs Sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, eſt minùs obvia, facilis tamen evadit ope ſequentis Lemmatis.

Lemma VI.



Duo plana $BMbaB$, $BZgeB$ ſe mutuò ſecent in recta HBb. communi figurarum tangente, auferantque ex ſolido fruſtum $BMbaBzgeB$; ſint ſemicirculi HCb, Hcb ſectiones horum planorum & ſuperficiei Sphæræ centro B, radio BC deſcriptæ. Ex puncto B educatur recta quævis BM in priori plano figuræ $BMba$ occurrens in M, & ſemicirculo HCb in N; ſintque MQ & NR normales in Hb, & ordinata KR ſemper æqualis rectæ MQ. His poſitis, ſi angulus CBc planis hiſce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ B verſùs fruſtum $BMbaBZgeB$ ultimò ad gravitatem ejuſdem particulæ verſùs fruſtum Sphæræ ſemicirculis HBb, Hcb contentum, ut area $HKdb$ genita motu ordinatæ KR ad ſemicirculum HCb.

Sit m punctum in figurâ BMB, ipſi M quàm proximum jungatur Bm quæ circulo HCb occurrat in n; ſitque nr normalis in Hb. Ad hæc ſint plana BMZ, Bmz perpendicularia plano $BMba$, ſecentque planum alterum $BZge$ in rectis BZ, Bz circumferentiæ Hcb occurrentibus in X & x. His poſitis, vis quâ particula B gravitat in Pyramidem

dem $BMZzm$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in Pyramidem $BNXxn$ ultimò ut recta BM ad BN, vel Ma ad NR per Lem. III. Gravitas autem in hanc Pyramidem eſt ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam NX eſt ut NR) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$ i. e. ut Rr; atque hæc gravitas agit ſecundùm rectam Bb vi quæ eſt $\frac{Br \times RN}{BC}$; unde gravitas in Pyramidem $BMZzm$ agit ſecundùm rectam Bb vi quæ eſt ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgetur versùs integra fruſta ſolidi & Sphæræ BC, eſt ratio areæ $HKdb$ (quam generat ordinata KR) ad ſemicirculum HCb.

Cor. Gravitas in fruſtum planis $BMba$, $BZge$ terminatum, eſt ad gravitatem in fruſtum Sphæricum contentum circulis ſuper diametros Bb, Bg deſcriptis, ut area $HKdb$ ad $\frac{8}{3}CB^2$. Sit enim $BMBb$ circulus, eritque MQ ad Bb, ut RN^2 ad BC^2, & $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC^2 - \frac{2BR^2}{CB}$, & area $HKdB = \frac{4}{3}CB^2$ adeóque area tota $HKdb = \frac{8}{3}CB^2$.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

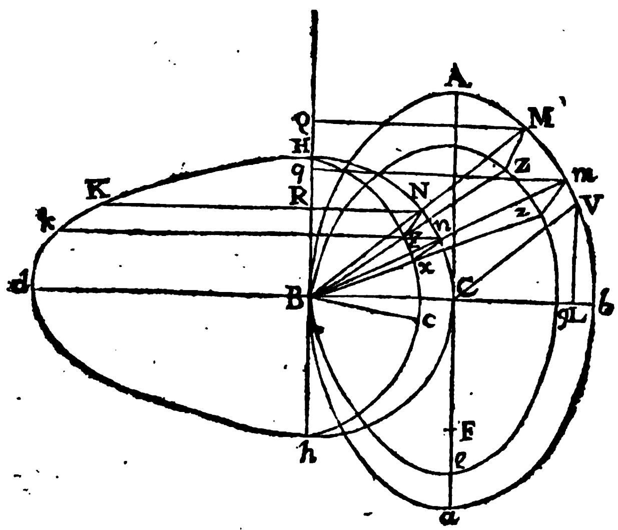
Invenire gravitatem particulæ in Æquatore ſitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Per Æquatorem intelligimus circulum ab Axe conjugato genitum dum figura circa alterum Axem revolvitur. Repræſentet $BMba$ in figura præcedentis Lemmatis, Sectionem quamvis Sphæroidis Æquatoris plano normalem, eritque hæc figura ſemper ſimilis Sectioni per Polos ſolidi, ſeu figuræ cujus revolutione ſolidum genitum eſſe ſupponimus. Hujus demonſtrationem ut facilem & ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur CA Sectionis hujus ſemiaxis tranſverſus, CB ſemiaxis conjugatus, F focus; ſit $CB = b$, $CA = a$, $CF = c$, $BR = x$; CV ſemidiameter parallela rectæ BM, VL ordinata ad Axem Bb, $CL = l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2}MQ$ ut in Propoſit. præcedenti, & $MQ = \frac{2l^2}{b}$. Verùm $NR^2 : BR^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, & $l^2 = \frac{a^2b^2 \times \overline{b^2 - x^2}}{a^2b^2 - c^2x^2} =$ (ſi $z : x :: c : b$) $\frac{b^2a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2b}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & area $BdKR$

æqua-

æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2-z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propoſitione) Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, & area $BdKR$ erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2 - b^2 l}$.

Supponantur nunc $x=b$, adeóque $z=c$; ſitque L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota $HKdb$, motu ordinatæ KR genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2 - b^2 L}$. Quare gravitas particulæ B



versùs fruſtum planis ellipticis $BMba$, $BZge$ terminatum erit ultimò ad gravitatem in fruſtum iiſdem planis contentum à Sphæra centro C radio CB deſcripta reſectum, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus $BPpb$ Æquator Sphæroidis, BP & Bp duæ quævis chordæ hujus circuli; Sectiones Sphæroidis circulo BPb perpendiculares erunt Ellipſes ſimiles Sectioni quæ per Polos ſolidi tranſit, quarum BP & Bp erunt Axes transverſi; Sectiones autem Sphæræ ſuper diametrum Bb deſcriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ BP, Bp. Proinde eadem ſemper erit ratio gravitatis particulæ B in fruſtra elliptica & ſphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram Sphæroidem ad gravitatem versùs Sphæram, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$, a denotante ſemiaxem tranſverſum figuræ cujus

jus motu gignitur ſolidum, b ſemiaxem conjugatum, c diſtantiam foci à centro, & L, Logarithmum ipſius $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a \times \frac{a+c}{b}$. q. e. f.

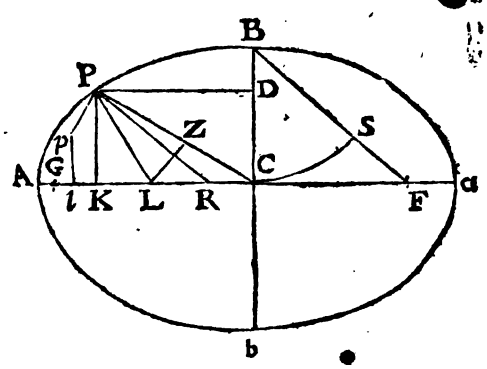
Cor. Eadem ſemper eſt ratio gravitatis versùs fruſtum quodvis Sphæroidis & fruſtum Sphæræ eodem plano ad Æquatorem normali abſciſſum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem à Sphæroide hoc plano abſciſſam eſt ad gravitatem in integram Sphæroidem, ut gravitas in fruſtum Sphæræ eodem Plano ex eâdem parte abſciſſum ad gravitatem in integram Sphæram.

Schol. Eâdem ratione ſi $BAba$ ſit Sphærois oblata motu figuræ BAb circa Axem minorem Bb genita, erit gravitas in Sphæroidem hanc in loco A ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA deſcriptam, ut $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$ ad $\frac{2}{3}\,CF^3$.

PROPOSITIO IV.

Problema.

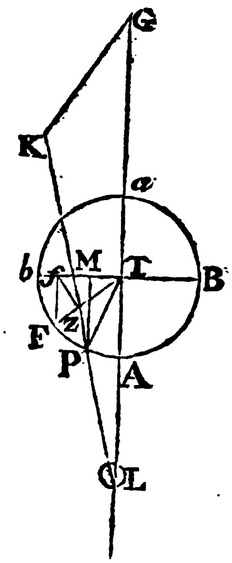
Ex datis viribus quibus Terræ particulæ gravitant versùs Solem & Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in Syzygiis vel Quadraturis Solis & Lunæ in hypotheſi quòd Terra conſtet ex Fluido homogeneo, & circa Axem ſuum non moveatur.



Gravitas in loco A versùs Sphæroidem oblongam motu figuræ ABa circa Axem tranſverſam Aa genitam, eſt ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA deſcriptam, ut $3b^2 \times \overline{L-c}$ ad c^3 per Prop. II. Hæc autem gravitas eſt ad gravitatem in B versùs Sphæram centro C radio CB deſcriptam, ut CA ad CB (per Cor. 1. Lem. III.) quæ eſt ad gravitatem in loco B versùs Sphæroidem ut $\frac{2}{3}\,C^3$ ad $a^2c - b^2L$ per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs Sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2ab \times \overline{L-c}$ ad $a^2c - b^2L$. Deſignet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V ſummam virium quibus Luminaria conjuncta vel oppoſita aquam deprimunt in rectis

 IB,

TB; Tb perpendicularibus rectæ Aa quæ per Terræ & Luminarium centra tranſire ſupponitur; ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ Quadraturis, ut in Cor. 5. ejuſdem Prop. & per ea quæ demonſtrantur Cor. 1. Prop. I. erit $Aa - Bb = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$. Adeóque $Aa - bA \times \frac{a^2c - b^2L}{2ab \times \overline{L - c}} = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$, & $V : A :: 2a^2L + b^2L - 3a^2c : \frac{2a}{d} \times \overline{2a^2 + b^2} \times \overline{L - c}$. Atque ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ $ABab$ haberi poteſt) habebimus æquationem unde ſpecies figuræ & differentia ſemiaxium ſeu aſcenſus aquæ computari poſſunt.



Eſt autem L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, adeóque æqualis $c + \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. per Methodos notiſſimas, adeóque $L - c = \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. Unde eſt V ad A, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L-c} \times ad}{c^3 \times \overline{2a^2 + b^2}}$, & V ad $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ vel G, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{2a^2 + b^2}{2bdc^3} \times \overline{2abL - b^2L + a^2c - 2abc}$.

Verùm ſi V ſit admodum exigua reſpectu gravitatis G (ut in præſenti caſu) erit differentia ſemidiametrorum CA, CB ad ſemidiametrum mediocrem quàm proximè ut $15V$ ad $8G$, vel paulò accuratiùs ut $15V$ ad $8G - 57\frac{5}{14} \times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a = d + x$, $b = d - x$, adeóque $c^2 = a^2 - b^2 = 4dx$, eritque $A : B :: 2ab \times \overline{L - c} : a^2c^2 - b^2L :: \frac{b}{3} + \frac{bc^2}{5a^2} + \frac{bc^4}{7a^4}$ &c $: \frac{a}{3} + \frac{ac^2}{15a^2} + \frac{ac^4}{35a^4}$, &c. i. e. ut $\frac{d-x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d-x}}{5 \times \overline{d+x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d-x}}{7 \times \overline{d+x}^4}$, &c. ad $\frac{d+x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d+x}}{15 \times \overline{d+x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d+x}}{35 \times \overline{d+x}^4}$, &c. adeóque (neglectis terminis, quos plures dimenſiones ipſius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}d + \frac{17}{15}x : \frac{1}{3}d + \frac{19}{15}x$. Proinde erit $B - A$ ad $B + A$ ($= 2G :: x : 5d + 18x$, & $B - A : G :: 2x : 5d + 18x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. eſt x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$, adeóque ſubſtituendo valores quantitatum $B - A$ & $B + A$, erit $x : d :: \frac{2Gx}{5d + 18x} + 3V : 2G - 2V$. Unde $2Gx - 2Va = \frac{2Gdx + 15Vd + 54Vx}{5d + 18x}$, & $10Gdx - 10dVx + 36Gxx - 36Vxx = 2Gdx + 15Vd + 54Vx$, & terminis omiſſis ubi reperi-

reperitur xx; erit $8Gdx - 64Vx = 15Vd$ atque $x:d::15V:8G - 64V$, & $2x$ ad d ut $15V$ ad $4G - 32V$. Aſcenſus igitur totius aquæ i. e. differentia ſemidiametrorum CA, CB (vel $2x$) eſt ad ſemidiametrum mediocrem, ut $15V$ ad $8G$ quàm proximè; facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties uſus id poſtulabit, aſſumendo plures terminos valoris Logarithmi L, & calculum proſequendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut $15V$ ad $8G - 57\frac{5}{14}\times V$.

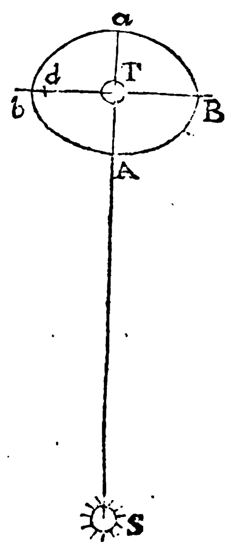
Cor. $B-A$ eſt æqualis $\frac{3V}{4}$; & $B-G=\frac{3V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B-A:G::2x:5d::30V:40G$, adeóque $B-A:V::3:4$.

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs Sphæroidem oblatam in Polo B fore ad gravitatem in Æquatore in loco quovis A, ut $2CB\times CA\times\overline{CF-CS}$ ad $CA^2\times CS - CB^2\times CF$.

PROPOSITIO V.

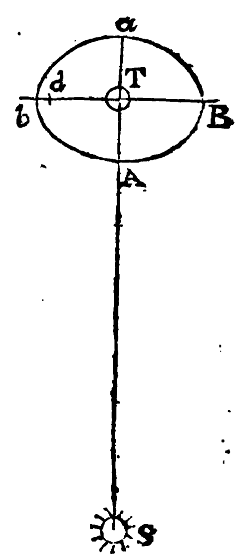
Problema.

Invenire vim V quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, & definire aſcenſum aquæ hinc oriundum.



Sit S Sol, T Terra, $ABab$ orbita lunaris neglectâ excentricitate, B & b Quadraturæ. Deſignet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad diſtantiam mediocrem Td $(=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB)$ ſi motus Lunæ gravitate ſuâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, & ſolâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Deſignet porrò K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri ſuâ diſtantiâ, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in Quadraturis ad eandem diſtantiam. His poſitis, erit $v:K::dT:ST$; atque $K:g::\frac{ST}{SS}:\frac{dT}{ll}$ ex vulgari doctrina virium centripetarum; unde $V:g::ll:SS$: cúmque ll ſit paulò minùs quàm LL, quoniam Luna nonnihil diſtrahitur à Terrâ gravitate ſuâ in Solem, patet vim v eſſe ad g in paulò minori ratione quàm LL ad SS. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm novi)

novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur eſſe rationi LL ad $SS + 2LL$ vel ſaltem rationi LL ad $SS + \frac{1}{2} LL$ quàm rationi LL ad SS. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda cenſeo, moniti Academiæ illuſtriſſimæ memor, cùm in hâc diſquiſitione parvi ſit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono $v : g :: LL : SS ::$ (per computos Aſtronomicos periodorum Solis ac Lunæ) $1 : 178,725$. Vis V quæ in Terræ ſuperficie vi v reſpondet, eſt ad v, ut Terræ ſemidiameter mediocris ad diſtantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem g agit ſecundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in deſcenſu ad ſuperficiem Terræ patebit vim V eſſe ad G (quâ gravitas mediocris in ſuperficie Terræ deſignatur ut ſuprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. ſit $x : d :: 15V : 8G - 57\frac{5}{14}V$ erit in hoc caſu $x : d :: 1 : 20589116$. Cúmque ſemidiameter Terræ mediocris ſit pedum 19615800; hinc ſequitur totum aquæ aſcenſum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Pariſienſis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, & $\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem ſuo more breviter deprehendit Newtonus eſſe pedis unius digitorum undecim cum $\frac{1}{30}$ parte digiti, quæ altitudo à noſtrâ differt tantùm ſexta parte unius digiti.



Verùm in hoc calculo Terra ſupponitur eſſe Sphærica, niſi quatenus à vi Solis Mare elevatur. Sed ſi aſcenſum aquæ maximum quæramus, ponendum eſt Solem in circulo æquinoctiali verſari, figuramque $ABab$ in hoc plano conſtitui, & augenda eſt vis V in ratione ſemidiametri mediocris ad ſemidiametrum Terræ maximum, & minuenda eſt vis G donec evadat æqualis gravitati ſub Æquatore: i. e. Si figuram Terræ eam eſſe ſupponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, & minuenda eſt G in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in ſuperficie Terræ ſunt inverſè ut diſtantiæ locorum à centro; cúmque diſtantia d ſit augenda in eâdem ratione, erit aſcenſus aquæ in Æquatore augendus in ratione triplicata ſemidiametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius digitorum undecim cum 60ma circiter parte digiti. Terra autem altior eſt ſub Æquatore quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypotheſi quòd Terra ſit uniformiter denſa à ſuperficie uſque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum Obſervationibus, & præſertim ex menſurâ gradus meridia-

meridiani quam viri clariſſimi nuper definiverunt accuratiſſimè ſub Circulo Polari.

Schol. I. Si gravitatem poſuiſſemus æqualem in A & B, & ejuſdem vis in totâ circumferentiâ $ABab$, prodiiſſet x æqualis tantùm $\frac{3Vd}{2G}$, & aſcenſus aquæ (ſeu $2x$) pedis unius digitorum ſex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypotheſi prodiiſſet CA ad CB, ut $G+V$ ad $G-2V$, adeóque x ad d, ut $\frac{3V}{2}$ ad G quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propoſitionum; cùm aſcenſus aquæ ſecundùm hanc minùs accuratam hypotheſim minor ſit aſcenſu quem in hâc Propoſitione definivimus, differentiâ $\frac{3Vd}{4G}$, quartâ ſcilicet parte aſcenſus illius.

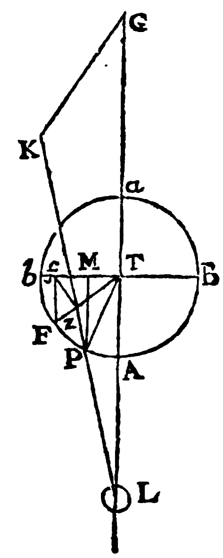
Schol. 2. Ex hac doctrina patet Satellites Jovis Soli & ſibi mutuò conjunctos vel oppoſitos in Oceano Joviali (ſi ullus ſit) ingentes motus excitare debere, modò non ſint Lunâ noſtrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad diſtantiam cujuſque Satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad diſtantiam Lunæ. Veriſimile eſt mutationes macularum Jovis ab Aſtronomis obſervatas hinc aliquâ ſaltem ex parte ortum ducere; quòd ſi hæ mutationes eam analogiam ſervare deprehendantur cum aſpectibus Satellitum, quam hæc doctrina poſtulat, indicio erit veram earum cauſam hinc eſſe petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non abſque utilitate, motus Satellitum circa Axes ſuos & circa primarios ita compoſitos eſſe ut idem Hemiſpherium ſuis primariis ſemper oſtendant, ſecundùm ſententiam celeb. Aſtronomorum. Veriſimile enim eſt motus Maris nimios in Satellitibus cieri deberi, ſi cum aliâ quâvis velocitate circa Axes ſuos revolverentur; aquis autem in his agitandis (ſi quæ ſint) ſufficere poſſunt æſtus ex variis Satellitum diſtantiis à ſuis primariis oriundis.

SECTIO IV.

De motu Maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliiſve de cauſis immutatur.

Oſtendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem Sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus Axis tranſverſus per centrum Luminaris tranſiret, ſi Terra non revolveretur circa Axem ſuum motu diurno; & aſcenſum aquæ in hypotheſi Terræ quieſcentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm ob

ob motum Terræ diverſa eſt ratio æſtus Maris. Hinc enim aqua nunquam ſit in æquilibrio, ſed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem & Lunam conjunctos vel oppoſitos verſari in plano Æquatoris $ABab$; ſit Aa diameter quæ per illorum centra tranſit, Bb huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus aſcenſus ejus promovetur in tranſitu aquæ à locis b & b ad A & a, & in his locis evadunt maximæ; aſcenſus tamen aquæ prorogari videtur, poſtquàm hæ vires minui cœperunt uſque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, ſi nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ conſiderari poſſit tanquam libratorius, & tantundem ferè aſcendat viribus quibus elevatur decreſcentibus, quàm iiſdem creſcentibus. Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta ſit multò minor gravitate, ſitus loci F ubi prædictæ vires æquipollent ſub Æquatore, dum aqua tranſit à loco b ad locum A, ſic ferè definiri poſſe videtur. Ex puncto F ſit Ff normalis in Bb, & fz in TF. Deſignet V ſummam virium quibus Sol & Luna aquam deprimunt



in rectis TB, Tb ut ſuprà, & vis quâ aqua tollitur in F erit $\frac{3V \times Fz}{d} = \frac{3V \times Ff^2}{d \times TF}$. Supponamus F eſſe locum aquæ ubi altitudo aquæ ſit minima, ut TF haberi poſſit pro ſemiaxe conjugato figuræ $ABab$, dicatur graviras in extremitate hujus Axis B, & gravitas mediocris in hac figura G, ut ſuprà; & vis quâ aqua deprimitur infra ſitum naturalem in loco F erit $B - A + \frac{V \times TF}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cúmque TF ſit quàm proximè æqualis diſtantiæ d, ſitque $B - G = \frac{3V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3V}{8} + V = \frac{3V \times Ff^2}{d^2}$, ſeu $TF^2 : Ff^2 :: 3 : 1 + \frac{3}{8} :: 24 : 11$. unde angulus FTb erit graduum 42 minutorum 37, incidetque ferè in punctum medium inter b & A. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Motum Maris ex vi Solis oriundum, & motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter ſe comparare, & hinc aſcenſum aquæ æſtimare.

Aſtronomis notiſſimum eſt Lunæ diſtantiam mediocrem in Syzygiis minorem eſſe diſtantiâ mediocri in Quadraturis. Clariſ. Halleyus ex Obſervationibus colligit diſtantiam priorem eſſe ad poſteriorem ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$. Newtonus Methodo quâdam ſuâ harum rationem invenit eſſe eam 69 ad 70: Princip. Prop. 28. Lib. 3. Clariſſimus Auctor Tractatûs de Motibus Lunæ ſecundùm Theoriam gravitatis, in hac doctrina optimè verſatus, colligit eam eſſe numeri 69 ad 70, ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna tranſit à Syzygiis ad Quadraturas. Ut motus Maris ex vi Solis oriundus (qualis ſuprà definitur Prop. V.) cum motu Lunæ conferatur, ſupponamus orbem Lunarem aquâ compleri & quæramus aſcenſum hujus aquæ per Prop. IV. & V. In Prop. V. erat vis v ad g, ut 1 ad 178,725; quare in hoc caſu foret $x:d::15v:8g-57\frac{5}{14}\times v::1:91{,}496$: adeóque ſemiaxis figuræ ad ſemiaxem conjugatum (vel $d+x$ ad $d-x$) ut 46.248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione diſtantiarum Lunæ in Quadraturis & Syzygiis quam Halleyus ex Obſervationibus deducit; adeò ut figura orbitæ Lunaris ſpecie vix diverſa ſit ab ea quam Globus aqueus quieſcens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen poſitione diverſæ, ſiquidem illius Axis minor Solem reſpiciat, hujus Axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum ſemidifferentia eſt ad ſemiſummam ut $3v$ ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione ſemiaxium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, ſi vis gravitatis eadem eſſet per totam circumferentiam $ABab$, ut oſtendimus in Schol. 1. Prop. V. Aſcenſus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex Obſervationibus colligit Halleyus; unde ſuſpicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum tranſit à Syzygiis ad Quadraturas, ſimili ferè ratione quâ aſcenſus aquæ prodiit in hâc propoſitione major propter exceſſum gravitatis aquæ in Terram in loco B ſupra ipſius gravitatem in loco A aliiſque à centro diſtantiis. Verùm quicquid ſit judicandum de ratione diametrorum orbitæ Lunaris, ex his colligere licet aſcenſum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa Axem ſuum. Suppónamus enim hunc mo-

tum

tum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, & particulæ Maris revolvantur ad morem Satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum Axes minores productæ tranſibunt per Solem. Et ſi ſemiaxium differentia ſit ad ſemidiametrum mediocrem ut 3 *V* ad *G* (ſecundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutiſſimus) erit minor aſcenſu aquæ ſuprà definito Prop. V. in qua invenimus 2 *x* eſſe ad *d* ut 15 *V* ad 4 *G*. Quòd ſi quæramus horum ſemiaxium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex Obſervationibus innoteſcit ſecundùm clariſ. Halleyum, parum admodum ſuperabit aſcenſum aquæ ſuprà definitum. Nec mirum ſi non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram ſequatur rationem inverſam duplicatam diſtantiarum, gravitas aquæ major quoque ſit in majori diſtantiâ, ſed non in eâdem ratione. Cùm hæc Phænomena ſint analoga, & ſibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter ſe collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in eodem circulo Æquatori parallelo perſeverare, vel latitudinem eandem in ſingulis revolutionibus ſervare, & variationem aſcenſus aquæ quæ ex figurâ Sphæroidicâ Terræ provenit non conſideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa Axem Terræ motu diurno deferuntur.

Quippe ſi aquæ moles feratur æſtu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab Æquatore diſtantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa Axem Terræ latam; unde illius motum turbari neceſſe eſt. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50gr. ab Æquatore diſſito, & in loco 36 tantùm milliaria magis versùs Septentrionem vergente, major eſt quàm quâ 7 milliaria ſingulis horis deſcriberetur, ut facili calculo patebit. Cúmque motus Maris tantus nonnunquam ſit ut æſtus 6 milliaria, vel etiam plura ſingulis horis deſcribat, effectus qui hinc oriri poſſunt non ſunt contemnendi.

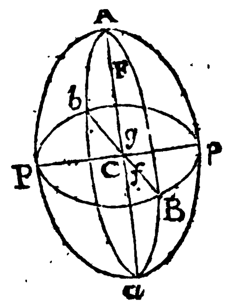
Si aqua deferatur à Meridie versùs Septentrionem motu generali æſtus, vel aliâ quâvis de causâ, curſus aquæ hinc paulatim deflectet versùs Orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm eſt ea quæ convenit loco magis versùs Boream ſito. Contrà ſi aqua à Septentrione versùs Meridiem deferatur, curſus aquæ ob ſimilem cauſam versùs Occidentem deflectet. Atque hinc varia motus Maris Phænomena oriri ſuſpicamur. Hinc forſitan, exempli gratiâ, Montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequen-

frequentiùs conſpiciuntur in Occidentali quàm Orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin & majores æſtus hinc cieri poſſe in pluribus locis quàm qui ex calculo virium Solis & Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, veriſimile eſt. Eandem cauſam ad ventos præſertim vehementiores propagandos, & nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum Aëris tum Maris Phænomena producenda conducere ſuſpicamur. Sed hæc nunc ſigillatim proſequi non licet.

PROPOSITIO VIII.

Problema.

Invenire variationem aſcenſus aquæ in Prop. V. definiti, quæ ex figurâ Terræ Sphæroidicâ provenit.



Sint $PApa$, $PBpb$ Sectiones Terræ per Polos P & p, quarum prior tranſeat per loca A & a, ubi altitudo aquæ in Æquatore viribus Solis & Lunæ ſit maxima, poſterior per loca B & b ubi ſit minima; ſint hæ Sectiones ellipticæ, F focus figuræ $PApa$, f focus Sectionis $PBpb$, & g focus Sectionis $ABab$. Et ſi omnes Sectiones ſolidi per rectam Aa tranſeuntes ſupponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versùs ſolidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C ſuper diametrum Aa deſcriptam ut $1 + \frac{3CF^2 + 3Cg^2}{10CA^2} + \frac{9CF^4 + 6CF^2 \times Cg^2 + 9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times Cb}$; & ſi gravitas in loco B, definiatur ſimili calculo, ope ejuſdem Lemmatis & Schol. Prop. II. conſtabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B, & per Cor. 2. Prop. I. innoteſcet ſemidiametrorum CA & CB differentia ſive aſcenſus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm ſit exigui uſus. Hâc Propoſitione oſtendere tantùm volui Geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratiſſimè tractando. Verùm reſtat præcipuus in hac diſquiſitione nodus, de quo pauca ſunt addenda.

PROPOSITIO IX.

Problema.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Hæc ex motibus cœleſtibus colligi nequit, ſi verò conferetur aſcenſus aquæ in Syzygiis Luminarium, qui ex ſummâ virium Solis & Lunæ generatur, cum ejuſdem aſcenſu in Quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex Obſervationibus à Sam. Sturmio ante oſtium Fluvii Avonæ inſtitutis, ex quibus colligit aſcenſum aquæ in Syzygiis æquinoctialibus eſſe ad aſcenſum aquæ in Quadraturis iiſdem, ut 9. ad 5. Dein poſt varios calculos concludit vim Lunæ eſſe ad vim Solis, ut 4.4815 ad 1, & aſcenſum aquæ ex utrâque vi oriundum in diſtantiis Luminarium mediocribus fore pedum 50 cum ſemiſſe. Harum virium rationem ex Obſervationibus à celeb. Caſſini in loco ſuprà citato allatis quæſivimus. Verùm cùm præter generales cauſas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari poſſunt, aliæ variæ ex locorum ſitu, vadorum indole, ventorum vi & plagâ pendentes æſtus Maris nunc majores, nunc minores reddant, non eſt mirum ſi vires Lunæ quæ prodeunt ex Obſervationibus in locis diverſis, vel in eodem loco diverſis tempeſtatibus inſtitutis non planè conſentiant. Computis igitur quos de motu Maris ex vi Lunæ oriundo inſtituimus, recenſendis impræſentiarum non immorabimur. Poſtquam verò Obſervationes aliquæ circa æſtus Maris ad littora Americæ & Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hiſce forſan certiùs judicemus. Obſervamus tantùm æſtus in minori ratione decreſcere videri quàm duplicatâ Sinus complementi declinationis; quin & reliquæ æſtus leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, ſi repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita ſunt. Æſtus anomali à locorum & Marium ſitu plerumque pendere videntur. Obſervandum tamen ex Theoriâ gravitatis ſequi, unicum tantùm æſtum ſpatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, ſi reciprocatio motus aquæ id permitteret. *

Quòd ſi analyſis diverſarum cauſarum quæ ad æſtus Phænomena producenda conferunt accurata inſtitui poſſet, id certè ad uberiorem ſcientiam

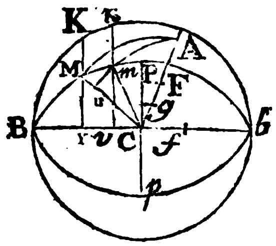
* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. & loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam, & manifeſtum eſt Lunam ſemel tantùm 24 horarum ſpatio loci hujus horizontem attingere.

tiam virium & motuum ſyſtematis Mundi non parum conferret. Hinc enim ſitus centri gravitatis Lunæ & Terræ, & quæ ad æquinoctiorum præceſſionem aliaque Phænomena naturæ inſignia ſpectant, certiùs innoteſcerent. Quas ob cauſas aſcenſus aquæ quantitatem, quouſque ex motibus cœleſtibus eam aſſequi licet, accuratè definiendam & demonſtrandam, poſitis legibus gravitatis quæ ex Obſervationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non eſt diſſerendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio Illuſtriſſimæ ACADEMIÆ REGIÆ, quam omni honore & reverentiâ ſemper proſequimur, lubenter ſubmittimus.

ANNOTANDA IN DISSERTATIONEM de Cauſa Phyſica Fluxus & Refluxus Maris, cui præfigitur Sententia, Opinionum commenta delet dies, Naturæ judicia confirmat.

I. IN Prop. IV. invenitur $x = \frac{15 Vd}{8 G}$ quàm proximè, qui valor ipſius x eſt ſatis accuratus; nec ullâ correctione indiget præſertim in calculo Prop. V. Eſt autem magis accuratè x ad d ut $15\,V$ ad $8\,G - \frac{88}{7}\,V$, non ut $15\,V$ ad $8\,G - \frac{803}{14}\,V$ ſive $8\,G - 57\frac{5}{14}\,V$ ut lapſu quodam calami aut calculi ſcripſeram ad finem Prop. IV. qui quidem eſt exigui momenti, & argumenta Propoſitionum ſequentium non immutat. Calculi autem ſummam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. eſſe B ad A, ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15 a^2} + \frac{c^4}{35 a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \overline{\frac{1}{3} + \frac{c^2}{3 a^2} + \frac{c^4}{7 a^4}}$, &c. adeóque (ſubſtituendo loco $\frac{b}{a}$ ipſius valorem $\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a}}$, ſive $1 - \frac{c^2}{2 a^2} - \frac{c^4}{8 a^4}$; &c. ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15 a^2} + \frac{c^4}{35 a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3} + \frac{c^3}{30 a^2} + \frac{c^4}{840 a^4}$; &c. unde $B - A$ eſt ad G (ſeu $\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A$) ut $\frac{c^2}{10 a^2} + \frac{23 c^4}{24 \times 35 a^4}$, &c. ad $1 + \frac{9 c^2}{20 a^2} + \frac{25 c^4}{8 \times 70 a^4}$, &c. Eſt autem $c^2 = 4 d x$, & $a^2 = d^2 + 2 d x + x^2$ ex iis quæ in Propoſitione ſupponuntur; unde $\frac{c^2}{4 a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2 x^2}{d^2} + \frac{3 x^3}{d^3}$, &c. & ſubſtituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4 x}{d} - \frac{8 x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B - A$ ad G, ut $14 dx + 18 x^2$ ad $35\, d^2 + 21\, d x + 17\, x^2$ quàm proximè. Cúmque ſit $\overline{B - A} \times d + 3\,Vd = 2\,G x - 2\,V x - \frac{3 V x^2}{d}$ per Corol. Prop. I. ſubſtituatur valor ipſius $\overline{B - A}$, & negligantur termini quos ingreditur $V x^2$ (quoniam V eſt admodum parva reſpectu G) eritque $3 \times 35\, V d^2 = 56\, G d x - 133\, V d x + 24\, G x^2$ & $x = \frac{3 \times 35 V d^2}{56 d G - 133 V d + 24 G x}$, quòd ſi in denominatore pro x ſcribatur valor vero propinquus $\frac{15 V d}{8 G}$ prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35 V d}{56 G - 88 V}$, eritque $x : d :: 15\, V : 8G - \frac{88}{7}\, V$ quàm proximè. Diverſâ paulò ratione prodit $x = \frac{15 Vd}{8 G} + \frac{165 V V d}{56 G G}$, &c. quam ſeriem producere non eſt difficile, ſi operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæſivimus figuram aquæ

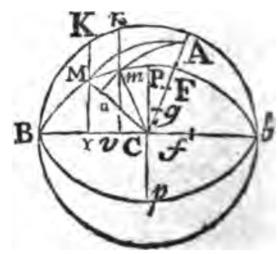
aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, & cæteris retentis ut priùs, Axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt à ratione quàm in eâ Propoſitione exhibuimus.



II. Series quam exhibuimus in Prop. VIII. deducitur per Lem. V. & Prop. II. Sit $CA=a$. $CB=b$. $CP=e$. $CF=c$. $Cf=f$. $Cg=g$. Sint ACM, ACm Sectiones quævis ſolidi per rectam AC (quæ normalis eſt plano $BPbp$) tranſeuntes. Arcus mu centro C radio Cm deſcriptus, occurrat rectæ CM in u, & occurrant ordinatæ MV, mv Axi Bb in V & v, & circulo BKb in K & k. Sit $CA^2-CM^2=x^2$, ſeu x diſtantia foci à centro in figura ACM, ſit L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & ultima ratio gravitatis particulæ A in fruſtum planis ACM, ACm terminatum ad gravitatem in fruſtum Sphæræ centro C radio CA deſcriptæ iiſdem planis contentum, erit ea $3CM^2\times\overline{L-x}$ ad x^3 per Prop. II. Gravitas igitur particulæ A in ſolidum erit ut $\int\frac{3CM^2\times\overline{L-x}}{x^3}\times\frac{mu}{CM}=\int\frac{3CM\times mu}{x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{3CK\times Kk\times CP}{CK\times x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{3e\times Kk}{x^3}\times\overline{L-x}$. Sit $CV=u$. Eritque $u^2+\overline{b^2-u^2}\times\frac{c^2}{b^2}=CM^2=a^2-x^2$. Unde $c^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}u^2=a^2-x^2$. $u^2=\overline{a^2-c^2-x^2}\times\frac{b^2}{b^2-c^2}=\overline{c^2-x^2}\times\frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2=b^2-u^2=b^2-\frac{b^2}{f^2}\times\overline{c^2-x^2}=b^2\times\frac{f^2+x^2-c^2}{f^2}=\frac{b^2}{f^2}\times\overline{x^2-g^2}$. Eſt autem $Kk:Vv::CK:KV$. Adeóque $Kk=\frac{b\,dv}{KV}=\frac{b^2}{f}\times\frac{-x\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\frac{b}{f}\sqrt{x^2-g^2}}=\frac{-bx\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$. Quare gravitas particulæ A verſus ſolidum erit ut $\int\frac{-3ebx\,dx}{x^3\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}\times\overline{L-x}$. Verùm $L-x=\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int\frac{-3ebx\,dx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}+\int\frac{-3ebx^3\,dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$, &c. Sit $z^2=x^2-g^2$, & prior ſumma erit $\int\frac{-eb\,dz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$, ſecunda erit $\int\frac{-ebx^2\,dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}=\int\frac{-eb\,dz\times\overline{z^2+g^2}}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$. Quæ cum ſubſequentibus ſummis ad circulares

Arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ A versùs hoc ſolidum ad gravitatem versùs Sphæram ſuper ſemidiametrum CA conſtructam, erit qualis in Propoſitione aſſignatur, terminis ſeriei citiſſimè decreſcentibus, ſi CF, Cf & Cg ſint admodum parvæ. Si evaneſcat g, hæc ſeries dabit gravitatem versùs Sphæroidem in Æquatore; quæ tamen elegantiùs inveſtigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. obſervavimus poſt Newtonum vim Lunæ ad Mare movendum cum vi Solis poſſe conferri, æſtus in Syzygiis & Quadraturis comparando; eadem ratio obtineri poſſet conferendo æſtus qui contingunt in Syzygiis Luminarium in diverſis diſtantiis Lunæ à Terra, ſi æſtus eſſent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Deſignet L vim Lunæ mediocrem, S vim Solis mediocrem, X & x duas diverſas diſtantias Lunæ à Terra in Syzygiis æquinoctialibus, Z & z diſtantias Solis à Terra in iiſdem Syzygiis, d & D mediocres utriuſque diſtantias; & ſi Lunæ declinatio nulla ſit, atque eſſent ut vires Luminarium, ſeu ut $\frac{Ld^3}{X^3}+\frac{SD^3}{Z^3}$ & $\frac{Ld^3}{x^3}+\frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando æſtus ratio L ad S detegeretur. Sit enim aſcenſus aquæ in priori caſu ad aſcenſum in poſteriori ut m ad n, eritque L ad S ut $\frac{mD^3}{z^3}-\frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3}-\frac{md^3}{x^3}$,



INQUI

INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A. D. D. EULER, *Mathematicarum Profeſſore; è Societate Academiæ Imperialis Sancti-Petersburgenſis.*

Cur nunc declivi nudentur littora Ponto,
Adverſis tumeat nunc Maris unda fretis;
Dum veſtro monitu naturam conſulo rerum:
Quàm procul à Terris abdita cauſa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auſo;
Sidera ſublimi vertice ſumma petam.

CAPUT PRIMUM.

De Cauſâ Fluxus ac Refluxus Maris in genere.

§. I. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipſa motûs conſervatione proficiſci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ cauſæque imaginariæ penitùs ſunt exploſæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem diſcrimen quovis oblato Phænomeno diligentiſſimè conſiderari oportet, ne tam motûs conſervationi ejuſmodi effectus tribuatur, qui ſine viribus oriri nequit, quàm vires inveſtigentur, quæ motum ſuâ naturâ conſervandum producant. Quo quidem in negotio, ſi debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ ſatis ſuperque conſtet, cujuſmodi motus vel per ſe conſerventur, vel viribus externis debeantur. Corpus ſcilicet in motu poſi-

tum

tum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis tranſeuntem motum rotatorium ſemel eſt conſecutum, eodem motu rotari perpetuò ſuâ ſponte perget: neque hujuſmodi motuum cauſam in ullâ re aliâ, niſi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca ſi hujus generis Phænomenon fuerit propoſitum, alia cauſa inveſtigari non poteſt, niſi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæſtio, ſi quæreretur cauſa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim ſufficeret eam cauſam aſſignaſſe, quæ initio hos motus produxiſſet, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum ſemel conſecuti eundem propriâ vi perpetuò conſervare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter ſe res habet, ſi motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujuſmodi eſt motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim caſu minimè ſufficit ea vis, quæ initio Planetas ad iſtiuſmodi motus impulerit, ſed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm ceſſarent, ſubitò Planetæ orbitas ſuas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd ſi igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia ſollicitè eſt inquirendum, ad quodnam genus id pertineat, atque utrum cauſa in viribus externis ſit quærenda, an in ipſo ſubjecto corpore? Quinetiam ſæpenumerò uſu venire poteſt, ut effectus utriuſque generis in eodem Phænomeno multùm ſint inter ſe permixti; quo caſu ſummo ſtudio ii à ſe invicem diſcerni antè debebunt, quàm cauſarum inveſtigatio ſuſcipiatur,

§. 3. His ritè perpenſis explicatio Galilei, quam in ſuis Dialogis de æſtu Maris aſſignare eſt conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, niſi quæ hos motus cùm producant, tùm conſervent. Namque ſi ponamus Terram ſolo motu diurno eſſe præditam, iſte motus Mare aliter non afficiet, niſi id ſub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ ſphæroidica compreſſa naſcitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd ſi autem Terræ inſuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, ſed prorſùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clariſſimè perſpici licet, quibus conſtat motum uniformem in directum omnibus partibus Syſtematis cujuſcunque corporum æqualiter impreſſum nullam omninò mutationem in motu & ſitu partium relativo inferre. Abeat nunc motus iſte æquabilis Terræ in directum impreſſus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne hoc

hoc quidem caſu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per ſe eſt perſpicuum, tùm etiam ab ipſo Galileo non ſtatuitur: ipſe enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æſtum Maris proficiſci eſt arbitratus, quàm ex motu quocunque progreſſivo ſive rectilineo ſive curvilineo, ſi is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet, tamen Mare, quod ſi motus eſſet æquabilis in directum in quiete perſiſteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd ſi autem ad vim quâ Terra in orbitâ ſuâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori ſollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus abſolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab Oriente versùs Occidentem ſecundùm eccliрticam inducetur hancque veram eſſe cauſam exiſtimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer ſub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occaſum. Poſſem etiam ex eodem principio clarè oſtendere tàm Maris, ſi omninò liberum eſſet, quàm aeris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum ſpatium circiter viginti graduum abſolvatur; ſed cùm hæc inquiſitio ad præſentem quæſtionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortaſsè aliâ occaſione quæſtiones hùc ſpectantes ſit propoſitura, uberiorem explicationem hujus inſignis Phænomeni eò uſquè differendam eſſe cenſemus; hoc quidem tempore tantùm indicaſſe contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari motum aliquem imprimere poſſe, ſed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus eſt arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæſtionibus phyſicis multò facilius eſt, quæ non ſit cauſa Phænomeni cujuſpiam oblati, quàm quæ ſit, oſtendere; ita etiam præſens quæſtio de Fluxu ac Refluxu Maris eſt comparata, ut non difficulter cauſas falsò aſſignatas poſſimus refellere. Ac primò quidem poſt everſam Galilei ſententiam, explicatio æſtûs Maris Carteſiana preſſioni Lunæ innixa tot tantiſque laborat difficultatibus, ut omninò ſubſiſtere nequeat. Præterquàm enim quòd iſtiuſmodi preſſio aliundè probari nequeat, atque ad hoc ſolum Phænomenon explicandum gratuitò aſſumatur, obſervationibus etiam minimè ſatisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox poſt tranſitum Lunæ per Meridianum elevari obſervamus, cùm ſecundùm Carteſii ſententiam eodem tempore deprimi deberet; neque prætereà hoc modo ſatis diſtinctè explicatur, cur Luna ſub Terra latens eundem ferè effectum exerat, ac ſi ſuper Horizonte verſetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori ſucceſſu aggreſſus eſt Wallisius cauſam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ

quærens, cujus explicatio mox ſatis dilucidè eſt ſubverſa. Supereſt denique Newtoni theoria, quæ nemine contradicente Phænomenis multò magis eſt conſentanea: at in ea id ipſum quod hoc loco quæritur, cauſa ſcilicet phyſica, non aſſignatur, ſed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria ſatis eſt evoluta, ut de ejus ſive conſenſu ſive diſſenſu cum obſervationibus judicium ſatis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium ſit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris cauſa in viribus externis & realibus ſit poſita, quæ ſi ceſſarent, ſimul æſtus Maris mox evaneſceret, ubi lateant hæ vires & quomodo ſint comparatæ potiſſimùm nobis erit explicandum, hoc enim eſt id ipſum, quod celéberrima Academia Scientiarum Regia in quæſtione propoſita requirit. Neque verò vires tantummodò indicaſſe ſufficiet, verùm prætereà id maximè erit monſtrandum, quomodò iſtæ vires agant, atque hos ipſos effectus, quos obſervamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæſtionis cardo, explicationis ſcilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari poteſt, ſtudium adhibendum eſt ſummum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque ſunt neque locum habere poſſunt. Parum enim ſcientiæ naturali conſulunt, qui quovis Phænomeno oblato ſibi pro arbitrio mundi ſtructuram peculiarem effingunt, neque ſunt ſolliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis conſiſtere queat, an verò ſecùs. Quòd ſi enim jam aliundè conſtet exiſtere in mundo ejuſmodi vires, quæ oblato effectui producendo ſint pares, fruſtrà omne ſtudium in conquiſitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad cauſam cujuſque Phænomeni detegendam, ad ſingulas circumſtantias ſedulò attendere neceſſe eſt, ante omnia mirificum conſenſum æſtûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non ſolùm enim inſignis harmonia inter æſtum Maris ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, ſed etiam revolutio ſynodica reſpectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique obſervationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à ſitu cùm Lunæ tùm etiam Solis conjunctim pendere: ex quo ſtatim prono ratiocinio conſequitur, vires illas æſtum Maris producentes, quæcunque etiam ſint, cùm Lunam potiſſimùm, tùm verò etiam Solem reſpicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejuſmodi vires Solem & Lunam reſpicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis eſt æſtus Maris, producere queant, jure ac ratione ſtatui poſſint, an ſecùs. Ac ſi pluribus modis iſtiuſmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit diſpiciendum, quænam cum aliis Phænomenis conſiſtere poſſint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conſpiret, niſi virium,

quæ

quæ aſſumuntur, exiſtentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd ſi autem contrà, effectus ejuſmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà exiſtere alia Phænomena clarè docuerunt, atque ſummus explicationis cum experientiâ conſenſus deprehendatur, dubium erit nullum quin iſta explicatio ſit genuina & ſola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æſtûs Maris commodè explicari poſſet, tamen ob hanc ſolam cauſam iſtiuſmodi vires ſtatuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit diſpiciendum, num aliæ rationes ejuſmodi vires non ſolùm admittant, ſed etiam actu exiſtere manifeſtò indicent. Perluſtremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, ſciſcitemurque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum ſint idoneæ: tales enim vires ſi in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impenſus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem ſi Solem ſpectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quaſi attrahi, idque fortiùs in minori diſtantia, debiliùs verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam diſtantiarum: ex quo ſpontè ſequitur non ſolùm univerſam Terram, ſed etiam ſingulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem ſollicitatur, ac ſi omnis materia in ejus centro eſſet congeſta; interim tamen partes circa ſuperficiem ſitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis ſint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in fluidis neceſſariò oriri debet. Quocircà iſta Solis vis in præſenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, ſi fortè ſola cauſam æſtûs Maris non conſtituit, certè effectum aliarum virium neceſſariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus ſuis partibus versùs Solem ſollicitatur, ita eorum ſententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ ſimilem vim collocant. Obſervationes quidem hujuſmodi vim in Lunâ non demonſtrant ſicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ ſuâ à Luna omninò non affici deprehendatur: ſed ſi docuerimus eandem vim ad Lunam reſpicientem, quæ æſtui Maris producendo ſit par, in motu Terræ nullam ſenſibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admiſſione conſiſtere videbatur, multùm mitigabitur. Hujuſmodi autem vis exiſtentia aliis rationibus, nullo ad æſtum Maris habito reſpectu, ſatis clarè evinci poteſt; quia enim nullum eſt dubium, quin Luna ad Terram conſtanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli neceſſe eſt. Namque ſi ponamus Sole penitùs ſublato, Terræ ac Lu-

Lunæ omnem motum ſubitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpenſis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs eſſe quieturam, ſed Lunæ obviam ituram, concurſumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, niſi Terra actu ad Lunam ſollicitetur. Deindè in ipsâ Lunâ gravitatem dari ſimilem huic, quam in Terrâ ſentimus, negari non poteſt; niſi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etſi ſit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolaſſent, parteſque ſolidæ conſiſtentiam ſuam amiſiſſent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari poſſet tale corpus mundanum, cujuſmodi eſt Luna, ſubſiſtere non poſſe, niſi vortice ſit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd ſi autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos usquè admittamus, nulla omninò ratio ſuadet: quin potiùs ejuſmodi vim ſimilem ſtatui conveniet, reliquis in mundo deprehenſis, quæ quaſi in infinitum porriguntur, atque inverſam duplicatam tenent diſtantiarum rationem.

§. 10. His expoſitis manifeſtum eſt, & quaſi experientiâ convictum, Terram cum ſingulis ſuis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solèm perpetuò ſollicitari, atque utramque vim proportionalem eſſe reciprocè quadratis diſtantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu exiſtant, conſtanterque effectum ſuum exerant, in præſenti negotio, quo in cauſam æſtûs Maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; niſi dilucidè antè ſit probatum, [illegible] non ſolùm Fluxum ac Refluxum non generare, ſed ne quidem quicquam efficere. Si enim iſtæ vires ullum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam ſit exiguus, atque adeò æſtui Maris fortaſsè contrarius, earum tamen ratio neceſſariò erit habenda, cùm ſine illis vera cauſa, quæcumque ſit, neque inveſtigari neque cognoſci poſſit. Neque præterea ſanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iiſque cauſam æſtûs Maris collocare, antequam evidenter ſit demonſtratum, binas iſtas vires Solem Lunamque ſpectantes, quas non gratuitò aſſumſimus, ſed ex certiſſimis Phænomenis in mundo exiſtere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non eſſe ſufficientes. In ſequentibus autem capitibus clariſſimè ſumus oſtenſuri, ab his duabus viribus non ſolùm in Oceano motum reciprocum generari debere, ſed etiam eum ipſum, qui æſtus marini nomine inſigniri ſolet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Refluxûs cauſam in ſolis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem eſt directa, altera ad Lunam, eſſe poſitam; hocque ſimul omnium eorum ſententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adſcribere, vel cum his ipſis alias vires conjungere conantur.

§. 11.

§. 11. Quæſtio igitur de cauſa Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ eſt propoſita, ad hanc deducitur quæſtionem, ut binarum illarum virium, quibus ſingulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in diſtantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, cauſa aſſignetur Phyſica. Ex quo tractationem noſtram bipartitam eſſe oportebit. Primò ſcilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit oſtendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque reſpicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo ſingula Phænomena diſtinctè explicari poſſe: hac enim parte abſolutâ nullum ſupererit dubium, quin origo æſtûs Maris his ipſis viribus, quas actu jam in mundo exiſtere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium cauſa Phyſica indicari debet, cùm id ſit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæſitamus; & clariſſimis certiſſimiſque demonſtrationibus evincere pollicemur, per iſtas vires omnia omninò æſtûs Maris Phænomena abſolutiſſimè explicari poſſe; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam ſublimiorem pertineat, calculoque analytico ſit ſubjecta. Altera verò pars, in ſcientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm iſta res occaſione plurium quæſtionum ab Academiâ Celeberrima antehac propoſitarum jam tanto ſtudio ſit inveſtigata atque abſoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Exploſis hoc ſaltem tempore qualitatibus occultis miſsâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum ſaniori philoſophandi modo nullatenùs conſiſtere poteſt, omnium virium quæ quidem in mundo obſervantur, duplex ſtatuendus eſt fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iſte effectus ſemper vel ab alliſione corporum, vel à vi centrifugâ proficiſcitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora ſunt prædita in ſtatu ſuo ſive quietis ſive motûs æquabilis in directum perſeverandi, debetur. Ob hanc enim ipſam facultatem corpus in motu poſitum alia corpora, quæ vel ipſius motui directè ſunt oppoſita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum ſollicitat; atque priori caſu regulæ colliſionis corporum, poſteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonſtrantur. Cùm igitur omnia corpora terreſtria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò ſollicitentur, cauſa hujus ſollicitationis continuo appulſui materiæ cujuſdam ſubtilis, vel vi centrifugæ ſimilis materiæ tribui debebit. Priori igitur caſu materiam ſubtilem ſtatui opporteret, quæ conſtanter ſummâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujuſmodi verò hypotheſis ob maximas difficultates, quibus eſt involuta, admitti minimè poteſt. Primò enim perpetuò novis viribus

ribus eſſet opus, quæ materiam ſubtilem indeſinenter verſùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæſtio non majorem lucem aſſequeretur. Deinde talis motus per ſe diu conſiſtere non poſſet, propter perpetuum materiæ ſubtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum iſtiuſmodi poſitione permixta.

§. 13. Excluſâ igitur materiæ ſubtilis continuâ alliſione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idonea, alia harum virium cauſa non relinquitur, niſi quæ in vi centrifugâ conſiſtat. Quemadmodum autem materia ſubtilis in gyrum acta ac vorticem formans non ſolùm animo concipi, ſed etiam in mundo perſiſtere queat, jam ſatis ſuperque eſt expoſitum, cùm in diſſertationibus, quæ cùm quæſtio de causâ gravitationis agitaretur, laudes Illuſtriſſimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis ſimul dilucidè eſt oſtenſum, quomodo ejuſmodi vortices comparatos eſſe oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis diſtantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana ſit facta, ut vix quicquam ad præſens inſtitutum attinens adjici queat; vorticum ulteriori examini ſine ullâ hæſitatione ſuperſedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejuſmodi amplam atque adeò jam confectam digreſſionem poſtulare haud videatur. Quoniam enim quæſtio de cauſa gravitatis cùm verſùs Terram tùm etiam verſùs Solem & Planetas jam ſatis eſt inveſtigata ac diremta; nunc quidem, ſi cujuſcunque Phænomeni cauſa eò fuerit perducta, ibidem acquieſcendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis inveſtigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præſenti negotio ſufficere poſſet, ſi æſtûs Maris cauſa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum cauſa non ſolùm habetur probabilis, ſed etiam quæ ſola ſit veritati conſentanea, cujuſmodi eſt gravitatio tàm verſùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Cauſam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujuſdam ſubtilis collocamus, quorum alter circa Solem alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, ſi materiæ ſubtilis vorticem conſtituentis celeritas ſtatuatur tenere rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in iſtiuſmodi vortice poſita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis diſtantiarum reciprocè eſt proportionalis. Vis abſoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ diſtantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ ſubtilis abſolutâ. Ac primò quidem quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis abſoluta ex tem-

tempore Terræ periodico cum diſtantia ejuſdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus diſtantia à centro Solis æqualis eſt ſemidiametro Terræ, eò ſollicitetur vi, quæ ſit 227512 vicibus major, quàm eſt gravitas naturalis in ſuperficie Terræ. Metiemur autem hanc ipſam vim abſolutam cujuſque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in diſtantiâ à ſuo centro ſemidiametro Terræ æquali: ex quo ſi vis gravitatis terreſtris deſignetur per 1. erit vis abſoluta Solis $= 227512$, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis abſolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipſo Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præceſſione Æquinoctiorum conſtituiſſe videtur circiter $\frac{1}{40}$. Quare ſi, poſitâ Terræ ſemidiametro $= 1$, corporis cujuſdam à centro Solis vel Lunæ diſtantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem ſollicitatur vel ad Lunam, vel $= \frac{L}{xx}$ vel $= \frac{S}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona conſequentia fluit. In his quidem litterarum S & L determinationibus aſſumſimus mediam Solis à Terra diſtantiam 20620 ſemidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10″ ſequitur, Lunæ verò à Terra diſtantiam mediam 60 ſemid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypotheſibus non pendent, uti ſequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æſtum Maris per binas vires, quarum altera Solem reſpicit, altera Lunam, ſumus expoſituri, facilè videri poſſemus eandem omninò explicationem ſuſcipere, quam Newtonus dedit in ſuis Principiis Mathematicis Philoſophiæ Naturalis. Primùm autem notandum eſt, quòd ſi Newtonus veram cauſam hujus Phænomeni aſſignaſſet, ſummoperè abſurdum atque abſonum foret, novitatis ſtudio aliam cauſam, quæ certò falſa futura eſſet, excogitare. Deinde verò Newtonus ne veſtigium quidem reliquit, ex quo cauſa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi poſſet, ſed potiùs de cauſæ Phyſicæ inventione, qualem Academia Regia potiſſimum requirit, deſperaſſe videtur; id quod ejus aſſeclæ apertè teſtantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam eſſe, neque ulli cauſæ externæ deberi firmiter aſſerunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem & expoſitionem omnium Phænomenorum ad æſtum Maris pertinentium minimè perfecit, ſed quaſi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum ſolutionem poſtulat, quæ Newtonus non eſt aggreſſus: cùm enim hujus quæſtionis enodatio ampliſſimos calculos requirat, ipſe analyſin vitans pleraque tantum obiter indicaſſe contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipſius explicationem locus eſt relictus. Neque enim in his viribus veram æſtus Maris cauſam contineri antè certum eſſe poteſt, quàm abſoluta cal-

calculo perfectus conſenſus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

CAPUT SECUNDUM.

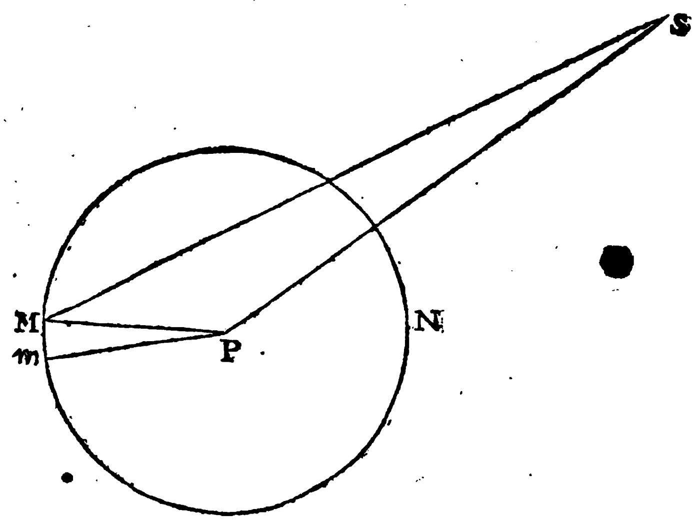
De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.

§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè ſtabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera ſunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in univerſam Terram tamquam unum corpus conſideratam exerçet; alterum verò eos, quos ſingulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis inveſtigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro ſcilicet gravitatis, collecta conſideratur, ac tàm ex motu inſito quàm viribus ſollicitantibus motus Terræ progreſſivus in ſuâ orbitâ determinari ſolet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam eſſe debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam ſenſibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter ſe commovendas ac Mare agitandum multò eſſe fortiorem vi Solis; ex quo pleriſque primo intuitu ſummè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori caſu reſpectu vis Solis evaneſcat, cùm tamen eadem caſu poſteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriuſque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, ſatis dilucidè patebit, eos inter ſe maximè diſcrepare, atque à vi, quæ in univerſam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter ſe oriri poſſe & viciſſim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter ſe conſiſtit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, ſi ſingulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter ſe parallelis ſollicitentur, eo caſu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamſi ſint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, ſed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo conſumtum iri; perindè ac ſi totum Terræ corpus vel in unico puncto eſſet conflatum, vel ex materiâ firmiſſimè inter ſe connexâ conſtaret. Ex quo manifeſtum eſt partes Terræ ſaltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter ſe commoveri non poſſe, niſi à viribus diſſimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ ſollicitantium, ſed potiùs diſſimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter ſe diſcrepant, eum effectum, quo ſitus partium mutuus per-

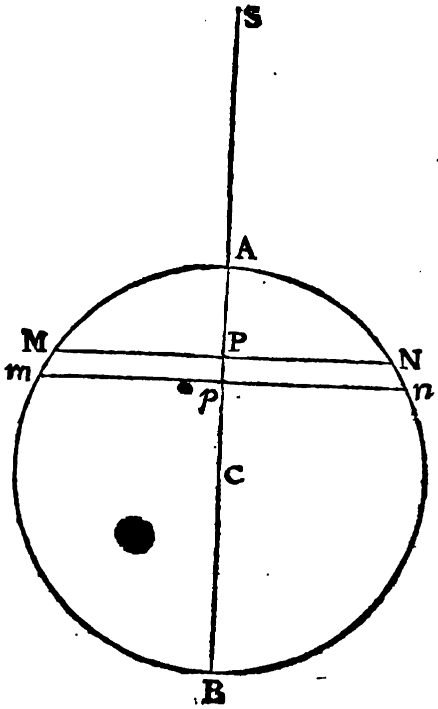
perturbetur, producit. Ita vis Solis, etſi eſt maxima, tamen ob inſignem diſtantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Luna multò major agitatio Oceani reſultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, inſigniter major ſit alterâ Lunam reſpiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, ſi utriuſque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus ſingulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna ſollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ univerſa Terra, ſi in ſuo centro gravitatis eſſet concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque eſt ea ipſa vis, quæ Terræ motum progreſſivum in ſua orbita reſpicit & turbat; deindè diſpiciendum eſt, quantùm vires, quibus ſingulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali diſcrepent. Quòd ſi enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque ſingulæ ſitum ſuum relativum inter ſe retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas ſingulas partes ſollicitantes, eò magis eæ inter ſe commovebuntur, ſitum relativum permutabunt. In hac autem inveſtigatione, ſimul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio eſt habenda; hæc enim vis in cauſa eſt, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diverſis Terræ regionibus ſint inæquales, æquilibrii tamen ſtatus detur, in quo partes tandem ſingulæ conquieſcant, neque perpetuò inter ſe agitari pergant. Atque hanc ob rem ſingulæ Terræ partes à tribus viribus ſollicitatæ conſiderari debebunt, primò ſcilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorſum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujuſmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit inveſtigandum.



§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Luna urgetur, definiamus, conſideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta PS ad planum circuli MN ſit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM = y$, & diſtantia $SP = x$, ac vis ſive Solis ſive Lunæ abſoluta $= S$. His poſitis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in directione MS vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx+yy}$, poſitâ cùm vi gravitatis naturalis in ſuperficie Terræ $= 1$, tùm etiam ſemidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum Mm versùs S nitetur vi $= \frac{S \times Mm}{xx+yy}$. Reſolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in MP, alterius verò ſit parallela directioni PS; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam ſe mutuò deſtruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS, ac vim his omnibus æquivalentem iiſdem conjunctim ſumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum Mm in directione ipſi PS parallela vi $= \frac{Sx \times Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde poſitâ ratione radii ad peripheriam $= 1 : \pi$ tota circuli MN peripheria, quæ erit $= \pi y$, urgebitur ſeu quaſi gravitabit versùs S in ipsâ directione PS vi $= \frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S ſollicitabitur, prodibit, ſi vis motrix inventa dividatur per maſſam movendam, quæ eſt $= \pi y$, eritque $= \frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 20. Hoc præmiſſo, contemplemur ſuperficiem ſphæricam genitam converſione circuli AMB circa diametrum AB; ſitque ſemidiameter $AC = BC = r$; erit ipſa ſuperficies $= 2\pi rr$. Jam attrahatur hæc ſuperficies ad Solem Lunamve in S, exiſtente diſtantiâ $SC = a$; atque ad vim totalem ſeu conatum quo integra ſuperficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus converſione elementi Mm circa diametrum AB, quæ protenſa per S tranſeat. Poſitis igitur $SP = x$, $PM = y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS = \frac{\pi Sxy.Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At poſito $Pp = dx$, erit $Mm = \frac{rdx}{y}$, & $xx + yy = 2ax - aa + rr$, unde annulli conatus versùs S erit $= \frac{\pi Srxdx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale eſt $=$



$C + \frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis ſuperficiei ſphæricæ converſione arcus AM ortæ prodibit $= \frac{\pi Srr}{aa} + \frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare ſi ponatur $SP = SB$ ſeu $x = a + r$, emerget conatus totius ſuperficiei ſphæricæ $= \frac{2\pi Srr}{aa}$: hincque cùm ipſa ſuperficies ſit $= 2\pi rr$, erit vis acceleratrix quâ ſuperficies ſphærica actu versùs S tendet $= \frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, ſi tota ſuperficies in centro C eſſet collecta.

§. 21. Cùm igitur ſuperficies ſphærica perinde ad Solem ſive Lunam in S ſollicitetur, ac ſi tota in ipſo centro eſſet conflata, hæc proprietas ad omnes ſuperficies ſphæricas, ex quibus integra Sphæra compoſita concipi poteſt, patebit, dummodo ſingulæ hæ ſuperficies ex materiâ homogeneâ conſtent, ſive quod eodem redit, ipſa Sphæra in iiſdem à centro diſtantiis ſit æquè denſa. Hanc ob rem ejuſmodi Sphæra quoque perinde ad S in directione PS urgebitur, ac ſi tota ipſius materia in centro C eſſet concentrata; hæcque proprietas non ſolùm in ejuſmodi

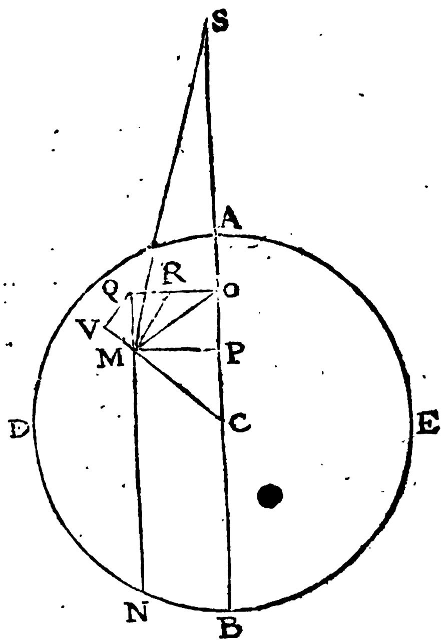
di Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi ſunt confectæ, ſed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ conſtant difformi, dummodo in æqualibus à centro diſtantiis, materia circumquaque ſit homogenea ſeu ſaltem ejuſdem denſitatis. Cùm igitur Terram ſibi repræſentare liceat tanquam Sphæram, ſi non ex uniformi materiâ conflatam, tamen ſine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè denſam includat, Terra quoque univerſa tàm à Sole quàm à Lunâ æquè ſollicitabitur, ac ſi omnis ejus materia in centro eſſet collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratiſſimis ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ inſtitutis paſſim menſuris ſatis eſt demonſtratum, Terræ figuram ad polos eſſe compreſſam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc inſtituto tutò negligi poteſt. Parique ratione, etiamſi Terra in æqualibus à centro diſtantiis non ſit æquè denſa, tamen differentia certè non eſt tanta, ut error ſenſibilis inde ſit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad ſitum partium Terræ relativum immutandum, definienda eſt vis acceleratrix, quâ centrum Terræ ſive ad Solem ſive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, ſi comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino ſitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in ſe ſpectata omnium partium ſitum mutuum invariatum conſervabit. At ſi vires, quibus ſingulæ partes à Sole aut Lunâ urgentur, diſcrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum niſi firmiſſimè inter ſe ſint connexæ in ſitu ſuo mutuo perturbari debebunt. Hocque caſu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, ſenſibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iſte motus, qui in ſingulis Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipſas partes ſollicitantes proficiſcatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innoteſcet, ſi à vi acceleratrice illam particulam ſollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque ſubtractio ita inſtituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam ſollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compoſitione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco ſuo deflectens.

§. 23. Conſentanea eſt hæc reductio principiis Mechanicis, quibus ſtatuitur motum relativum in ſyſtemate quotcunque corporum & à quibuſcunque viribus ſollicitatorum manere invariatum, ſi non ſolùm toti ſyſtemati motus æquabilis in directum ſimul imprimatur, ſed etiam ſingulis partibus vires æquales quarum directiones ſint inter ſe parallelæ, applicentur. Noſtro igitur caſu motus inteſtinus partium Terræ non turbabitur,

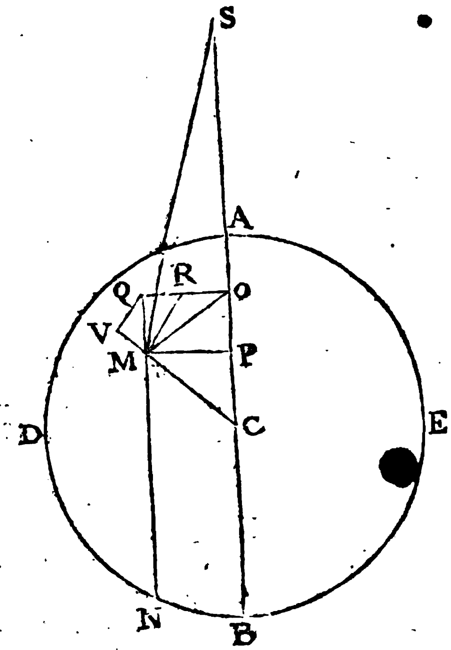
habitur, ſi ſingulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd ſi autem iſtæ vires æquales ſint illi, quâ tota Terra ſeu centrum ſollicitatur, & contrariæ, hoc ipſo Terræ motum curvilineum & inæquabilem, quippe qui ab iiſdem viribus oritur, adimemus. Quare ſi inſuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impreſſum concipiamus, obtinebimus totam Terram quieſcentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur & inter ſe commovebuntur, ac ſi nullas iſtiuſmodi mutationes intuliſſemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione ſubſidium aſſequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipſâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, ſi centrum Terræ conſtituatur immotum, quàm ſi totalis motus ſingularum partium motibus eſſet permixtus. Hanc ob rem iſtâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æſtûs Maris, prouti in Terrâ immotâ ſentiri debent, eliciamus; quippe qui eſt caſus naturalis, ad quem omnes obſervationes ſunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.

§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in S exiſtentem cujus vis abſoluta ſeu ea, quam in diſtantia à centro ſuo S ſemidiametro Terræ æquali exerit, ſit $= S$, diſtantia verò centri Terræ C ab S ſeu CS ponatur $= a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta ſollicitabitur in directione CS, $= \frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus ſitus ita ſit definitus, ut ſit $CP = x$ & $PM = y$, exiſtente MP normali ad CS; hinc igitur habebitur $SP = a - x$ & $SM = \surd((a-x)^2 + y^2)$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M verſùs S pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2 + y^2}$; à quâ



cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra verſùs S nititur, concipienda eſt particulæ M applicata vis $= \frac{S}{aa}$ in directione MN ipſi CS parallela & oppoſita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac ſi univerſa Terra quieſceret vel uniformiter in directum moveretur, qui caſus ab illo,

lo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innoteſcet, quo particula M à vi ad S directa de loco ſuo recedere annitetur: ad ipſum autem motum definiendum inſuper vis gravitatis erit reſpicienda: & quia hæc particula non eſt libera, ſed quaquaversùs materiâ terreſtri circumdata, inveſtigari oportet, quantum iſta materia effectum viribus ſollicitantibus concedat.



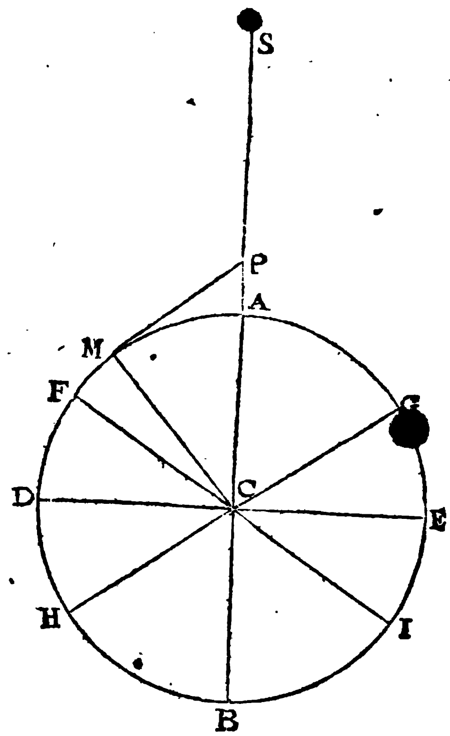
§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum eſt propoſitum in ipſum effectum ab his viribus oriundum inquirere, ſed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujuſmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M ſollicitantium reſultent. Hunc in finem reſolvatur vis MS in duas laterales, quarum alterius directio parallela ſit ipſi CS, altera verò in MP cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione MQ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione MP trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M inſuper trahatur in directione MN vi $= \frac{aa}{S}$, tres iſtæ vires à Sole Lunave in S exiſtente reducentur ad duas, quarum altera in directione MQ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare ſi rectæ MQ & MP his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur exprimet diagonalis MO tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli OMP tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, ſi fiat ut MP ad MO ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipſa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione MO ſollicitans, quæ oritur à vi ad S tendente.

§. 26. Ut autem iſtæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio eſt MC, conjungi queant, reſolvantur eæ in binas, quarum altera in ipſam directionem MC cadat, alteriùs verò directio ſit MR nor-

malis ad MC. Ad hoc commodiſſimè præſtandum, reſolvatur vis MS primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipſi CS parallelam, alteriùs verò directio in ipſam MC incidat. Cùm igitur ſit $MC = \sqrt{(x^2+y^2)}$ erit prior vis $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, poſterior verò $=\frac{S\sqrt{(x^2+y^2)}}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At ſi à priori auferatur vis $=\frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione MQ ſollicitans $=\frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in CM productam demittatur perpendiculum QV, eritque ob ſimilitudinem triangulorum QVM & MPC vis gravitati contraria ſecundùm directionem MV agens ex vi MQ orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; unde omninò particula M à vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea verò eadem particula M in directione MR ad MC normali ſollicitabitur vi $=\frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 27. Tametſi iſtæ expreſſiones tantoperè ſint compoſitæ, ut parum ex iis ad uſum deduci poſſe videatur, tamen ſi conſideremus diſtantiam Lunæ à Terra, multò magis autem diſtantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x & y reſpectu quantitatis a exiguas admodum eſſe; per approximationem ſatis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim ſit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = (a^2-2ax+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ſatis tutò ſubſtitui poterit $\frac{1}{a^3}+\frac{3x}{a^4}+\frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem à vi Solis ſive Lunæ in S exiſtentis ad centrum Terræ C in directione MC urgetur, $=\frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea autem eadem particula M ſollicitabitur in directione MR ad MC normali, vi $=\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{3Sy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(x+\frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi poſteriores multis vicibus excedant, rem craſſiùs inſpiciendo, particula M à vi Solis Lunæve ſecundùm MC urgebitur vi $=\frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$, in directione verò MR vi $=\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 28.



§. 28. Ex his igitur poſtremis formulis intelligitur ab actione Solis ſive Lunæ in *S* exiſtentis gravitatem particulæ *M* augeri ſi ejus ſitus reſpectu rectæ *SC* ita fuerit comparatus, ut ſit $yy > 2xx$ hoc eſt tangens anguli $MCP > \sqrt{2}$ poſito ſinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, ſi fuerit $yy < 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens eſt $= \sqrt{2}$ contineat $54^\circ, 45'$ circiter, ſi concipiatur circulus Terræ maximus quicunque *ADBE*, cujus planum per punctum *S* tranſeat, in eoque ducantur rectæ *FCI* & *GCH*, quæ cum rectâ *SAB* angulos conſtituant 54° $45'$; tùm omnes Terræ particulæ in ſpatiis *FCH* & *GCI* ſitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in ſpatiis *FCG* & *HCI* poſitæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propoſitâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in *S* exiſtente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula *M* in directione horizontali *MR* urgetur, (*vide figuram ad pag.* 298.) affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræſentatur, verget, ſi quantitates *x* & *y* ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, ſi earum altera ſit affirmativa, altera negativa. Quare ſi particula *M* ſita fuerit vel in quadrante *ACD* vel *ACE*, tum vis horizontalis ad rectam *CA* tendet; contrà verò hæc vis ad radium *CB* dirigetur, ſi particula *M* ſit vel in quadrante *BCD* vel *BCE* conſtituta. Ex quibus perſpicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemiſphæria, ſuperius ſcilicet *DAE* & inferius *DBE*, inter ſe eſſe ferè ſimiles; quæ ſimilitudo quoque in ipſo æſtu Maris obſervatur.

§. 29. Ponamus nunc particulam *M* in ipsâ Terræ ſuperficie eſſe conſtitutam, eritque $\sqrt{(xx + y^2)} = 1$ ob Terræ ſemidiametrum $= 1$. Quare ſi particula *M* fuerit poſita in *M*, exiſtente anguli *ACM* ſinu $= y$ & coſinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix à Sole Lunâve in *S* augebitur vi $= \frac{S(y^2 - 2xx)}{a^3}$, ſecùndum horizontem autem in directione

tione MR urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, ſi particula M poſita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A & B, quæ punctum S vel in ſuo zenith vel nadir poſitum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod ſcilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus ſit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, ſi angulus ACM fuerit ſemirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conſpicitur vel $45°$ gradibus ſupra horizontem elevatum, vel tantundem ſub horizonte depreſſum latet: his igitur caſibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc conſiſtet, ut directio gravitatis mutetur, atque verſùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens eſt $= \frac{3S}{2a^3}$, exiſtente ſinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate deſignamus.

§. 30. Hæ itaque vires ſi ſatis eſſent magnæ, in ponderibus utique ſentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oſcillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; poſterior verò vis ſitum pendulorum quieſcentium verticalem de hoc ſitu deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujuſmodi perturbationes non obſervamus, operæ pretium erit dilucidè monſtrare vires illas tam eſſe exiguas, ut hi effectus ſenſus noſtros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole ſit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38535570}$; pro Luna autem quia eſt $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major eſt vi Solis, ceteris paribus; atque ſi Solis & Lunæ vires prorſùs conſpirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ ſeu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oſcillationum ejuſdem penduli eodem tempore editarum, illo caſu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ ſeu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò caſu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ ſeu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oſcillationum ab eodem pendulo eodem tempore abſolutarum, cùm gravitas maximè eſt diminuta;

& cùm maximè eſt aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001; hoc eſt ut 4666666 ad 4666667; ex quo ſatis perſpicitur differentiam hanc minimè percipi poſſe. Similis autem omninò eſt ratio alterius Phænomeni declinationis ſcilicet à ſitu verticali comparata, quæ nunquam ad 5''' exſurgere poteſt.

CAPUT TERTIUM.

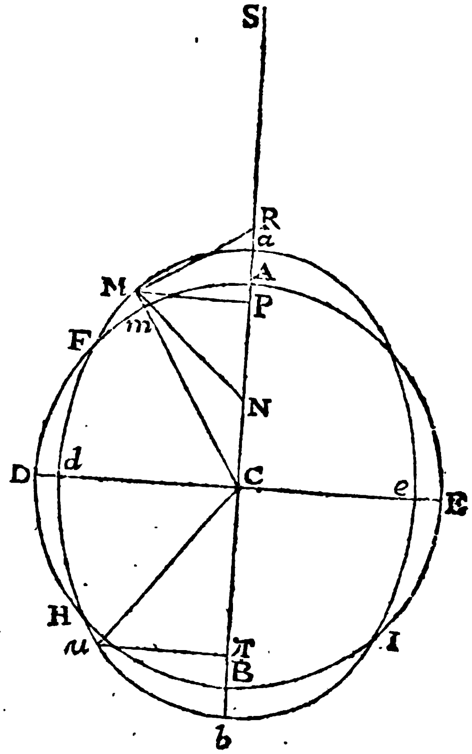
De Figurâ, quam vires cùm Solis tùm Lunæ Terræ inducere conantur.

§. 31. CUM igitur in capite præcedente vires tàm à Sole quàm à Lunâ oriundas determinaverimus, quibus ſingulæ Terræ particulæ ad ſitum relativum cùm inter ſe tùm reſpectu centri, quod in hoc negotio tanquam quieſcens conſideratur, immutandum ſollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipſum motum, quo ſingulæ particulæ inter ſe commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc inveſtigatio ſit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter ſe reſpicientibus, qualia vix uſquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem ſecundùm principia ſtatica ulteriùs perſequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm ſeorſim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ ſeu aquâ cinctam contemplabimur, quò ſollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc ſcilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipſam Terram quieſcentes concipimus, ita ut inter ſe perpetuò eundem ſitum relativum conſervent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad idem ſitus relativus duret. Perſpicuum autem eſt cognitionem hujus figuræ magno futuram eſſe adjumento ad ejuſdem figuræ tranſmutationem definiendam, ſi tàm Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Conſideremus igitur primùm Terram in ſtatu ſuo naturali, in quem ſe ſola vi gravitatis compoſuit; in quo, cùm habitura ſit figuram ſphæricam, repræſentet circulus *ADBE* ſeu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfuſam ponimus. Verſetur jam Sol vel Luna in *S*, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in *A* quàm in *B* diminuatur, in *D* verò & *E* augeatur, manifeſtum eſt Terram ſeu potiùs aquam illi circumfuſam elevatum iri in *A* & *B*, contrà verò in *D* & *E* deprimi, idque eouſque, quoad ſollicitationes à Sole Lunâve in *S* oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ.

Sit

Sit itaque curva *adbe* ea figura, quæ circa axem *ab* rotata generet Terræ formam, quam à vi ad *S* directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio conſtitutæ, neceſſe eſt ut directio media omnium ſollicitationum, quibus ſingulæ Terræ particulæ in ſupremâ ſuperficie ſitæ urgentur, ad ipſam ſuperficiem ſit normalis. Quare ſi particulam quamcunque *M* ſpectemus; ea primùm à gravitate naturali in directione *MC* urgetur deorsùm, idque vi, quam conſtanter ponimus = 1; quippe quæ eſt ipſa gravitas in ſuperficie Terræ, eò quòd elevatio vel depreſſio particulæ diſtantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, ſenſibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula *M* à vi in *S* exiſtente ſollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipſam *MC* incidit, alterius verò in *MR* normalem ad *MC*. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam *MN* normalem ad curvam *aMd*, quo ipſo natura hujus curvæ determinabitur.



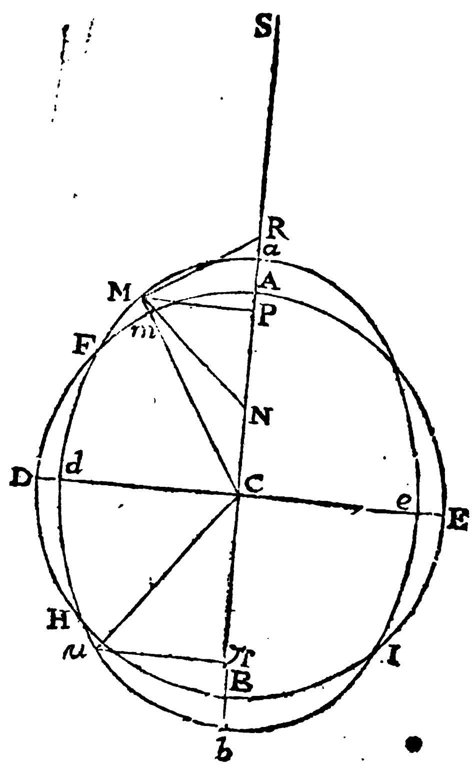
§. 33. Dubium hîc ſubnaſci poſſet, quod cùm ad præſens inſtitutum omnium virium, quibus ſingulæ particulæ ſollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non ſolùm non eſt infinitè parva, ſed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ reſultant: ſed quia hæc vis conſtantem producit effectum, Terræ ſcilicet figuram ſphæroidicam ad polos compreſſam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris obſervatur, ſenſibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ ſphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifeſtum autem eſt; quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à ſphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admiſſo motu diurno Terræ à figurâ ſphæroidicâ eſſe diſcrepaturam. Quâpropter in hoc negotio ſufficere poteſt, ſi, Terrâ inſtar ſphæræ perfectæ conſideratâ, definiamus quantam differen-

tiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, ſi Terræ motus vertiginis reſtituatur, perſpicuum erit totam figuram ſub æquatore intumeſcere, ſub polis autem ſubſidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depreſſio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque ſi ulla etiam varietas in æſtu Maris à motu vertiginis Terræ proficiſcatur, ea calculo monſtrante nuſquam major eſſe poteſt parte $\frac{1}{289}$ æſtûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam cauſam operæ pretium eſt tam complicatos & abſtruſos calculos inire, ad quos perveniretur, ſi Terræ figura naturalis à ſphæricâ diverſa poneretur, atque inſuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex alterâ parte axis ab ſimilis eſt & æqualis, determinandam, ponatur vis abſoluta ſive Solis ſive Lunæ in S exiſtentis $= S$, diſtantia $CS = a$, ac ducta ſemiordinata MP vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum M vel à Sole vel Lunâ versùs C urgebitur $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, inſuper autem idem punctum M ſollicitabitur in directione MR normali ad MC vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx-yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorſum pellitur vi $= 1$ ſecundùm directionem MC, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione MC deorſum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 ſequens terminus tutò negligi poteſt, & in directione MR vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium ſi MN ponatur media directio, prodibit per regulas compoſitionis motus anguli CMN tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+2Sa(yy-2xx)}$, quæ diviſione actu inſtitutâ, iiſque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimenſiones, abit in hanc expreſſionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ eſt ea ipſa formula, quâ vis MR exprimebatur. Quocirca angulus CMN prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, ſed tantùm à vi horizontali ſingulis particulis in Terræ ſuperficie ſitis impreſſâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipſa media directio MN debet eſſe ad curvam aMd in puncto M normalis, erit ſubnormalis $PN = -\frac{ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur ſit anguli MNP tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli MCP tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc eſt anguli CMN tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ ſuperiori expreſſioni, quâ hæc

hæc eadem tangens deſignabatur, æqualis poſita pro curvâ quæſitâ $aMdb$ ſequentem præbebit æquationem $\frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}=\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}+\frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)}=z=MC$, & anguli MCA coſinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}=u$, unde fiet $x=uz$ & $y=z\sqrt{(1-uu)}$, atque $ydx-xdy=\frac{zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $xdx+ydy=zdz$. Hac autem factâ ſubſtitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz}=\frac{3Sudu}{a^3}+\frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus poſtremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evaneſcit, ſi abeſſet, foret integrale $\frac{1}{c}-\frac{1}{z}=\frac{3Suu}{2a^3}$ ſeu $z=c+\frac{3Sccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale eſſe $z=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}+\frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V=\frac{5u^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z=c+\frac{3Sccuu}{2a^3}+\frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm ſatisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipſius z valorem per u commodiùs & propiùs definiendi.



§. 36. Cùm autem ſoliditas ſphæroidis, quod generatur ex converſione curvæ adb circa axem ab, æqualis eſſe debeat ſoliditati Sphæræ radio $CA=1$ deſcriptæ, hinc conſtans quantitas c quæ per integrationem eſt ingreſſa, definietur: id quod commodiſſimè præſtabitur, ſi utraque ſphæroidis ſemiſſis, ſuperior ſcilicet versùs S directa, atque inferior ſeorſim inveſtigetur. Quoniam igitur pro ſemiſſi ſuperiori eſt $CP=x=zu=cu+\frac{3Sccu^3}{2a^3}+\frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ & $MP^2=y^2=z^2(1-uu)=(1-uu)\left(cc+\frac{3Sc^3u^2}{a^3}+\frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yydx$, cui ſoliditas genita converſione ſpatii $dCPM$ eſt proportionalis, $=c^3u-\frac{c^3u^3}{3}+\frac{5Sc^4u^3}{2a^3}$

 $-3Sc$

$-\frac{3Sc^4u^5}{2a^3}-\frac{3Sc^5u^2}{a^4}+\frac{21Sc^5u^4}{4a^4}-\frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Poſito igitur $u=1$, prodibit ſuperioris ſemiſſis ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{u^3}-\frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori ſemiſſi ſit $Cac=z=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}-\frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus ſoliditas ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}+\frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius ſphæroidis ſoliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3+\frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm Sphæræ radio $=1$ deſcriptæ ſoliditas pari modo definita, ſit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1=c^3+\frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c=1-\frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæſitâ habebitur, hoc valore loco c ſubſtituto, iſta æquatio $z=1+\frac{S(3u^2-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura iſtius curvæ luculenter cognoſcitur.

§. 37. Hinc igitur perſpicitur à Sole vel Lunâ in S exiſtente aquam, cujus ſuperficies antè erat in A, attolli in a, ita ut ſit elevatio $Aa=\frac{S}{a^3}+\frac{S}{a^4}$; atque in regione oppoſitâ B, aquam pariter elevari per ſpatium $Bb=\frac{S}{a^3}-\frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A & B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm exceſſus ſuperioris elevationis ſuper inferiorem ſit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod diſcrimen reſpectu totius elevationis vix eſt ſenſibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D & E, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd=Ee=\frac{S}{2a^3}$; ex quo iſta depreſſio duplo minor eſt, quàm elevatio quæ in A & B accidit. In punctis præterea F, G, H & I, quæ à cardinalibus A & B diſtant angulo $54^\circ.45'$, quippe pro quo eſt $3uu-1=0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, ſed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoſcetur aquæ vel elevatio vel depreſſio ex angulo ACM, cujus coſinus u eſt ſinus altitudinis ſub quâ Sol vel Luna in S exiſtens ſuper horizonte conſpicitur ab obſervatore in M conſtituto; hoc enim in loco aqua elevata erit ſupra naturalem altitudinem intervallo $=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expreſſio ſi ſit negativa, Maris depreſſionem indicat. Hîc autem annotare non eſt opus, quòd ſi punctum S ſub horizonte lateat, tum ſinus depreſſionis maneat quidem u, ſed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depreſſionem, quæ à ſolâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, ſi uti ponimus, omnia in ſtatu æquilibrii eſſent conſtituta. Quoniam itaque eſt $S=227512$ atque $a=20620$ ſemid. Terræ, ſi una Terræ ſemidiameter aſſumatur

19695539 pedum Pariſ. erit $\frac{S}{a^3} = 0{,}5072$ ped. ſeu pauxillum excedet ſemipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evaneſcens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus ſub Sole verticaliter ſitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad ſemipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depreſſio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conſpicient; ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur; ex quo totum diſcrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter aſſurget. Iſte Solis effectus autem diſtantiæ tantum mediocri Solis à Terra eſt tribuendus: quòd ſi enim Sol verſetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ diſtantiarum Solis à Terra, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas ſit $= \frac{163}{10000}$, erit intervallum Aa vel Bb, dum Sol in perigæo verſatur, $= 0{,}5332$ ped. ſin autem Sol in apogæo ſit conſtitutus, $= 0{,}4825$ pedum; quorum differentia ad viceſimam pedis partem aſcendit: valor autem medius eſt $= 0{,}5072$, quem pro mediocri diſtantiâ Solis à Terra invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucuſque dedimus ſolutum, quodque maximi eſt momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, ſed aliam viam ſecutus, non ſolùm indirectam ſed etiam erroneam, invenit Mare à ſolâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli abſolutam quàm eandem diſtantiam à Terra aſſumſiſſet, quibus nos ſumus uſi. Concluſit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis ſeu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra ſub æquatore extenditur ac craſſior redditur quàm ſub polis; atque aſſumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ ſub æquatore à vi centrifuga factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed præterquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo ſuperſtructum fundamento, noſtrâ viâ directâ, quâ ſumus uſi, ſtatim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis aſſumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac ſi ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum inſtitutum reſtaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorſus diverſâ ſumus reſoluturi, congruentemque ſolutionem exhibituri.

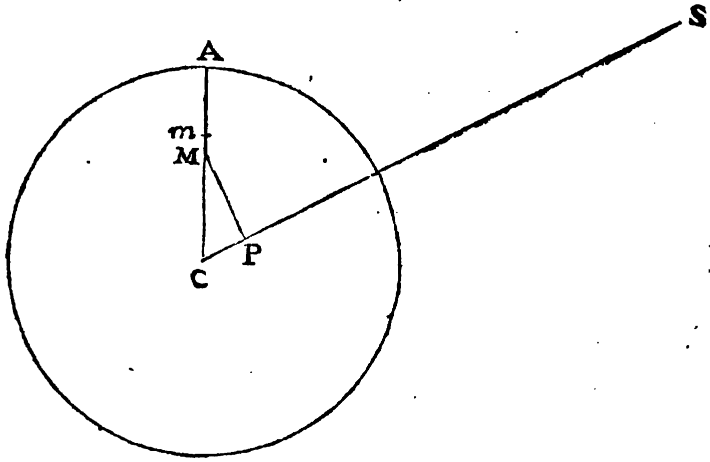
§. 40. Quamvis autem iſte Solis effectus in Mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus & planus eſſe videatur ob parallaxin Solis;

Solis, quam $10''$ aſſumſimus, nondum accuratiſſimè definitam; à quâ tam diſtantia Solis à Terra a, quàm æſtimatio vis abſolutæ S, pendet: tamen ſi rem attentiùs perpendamus, comperiemus expreſſionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ S præciſè in eadem ratione, in quâ cubus diſtantiæ a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmiſſimè ſtabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à ſolo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratiſſimè eſt definita. Quod ut clariùs appareat, conſideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus ſemiaxis tranſverſus ſeu diſtantia à Sole media ſit $= a$, vis autem Solis abſoluta $= S$, erit tempus periodicum ſemper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd ſi igitur tempus periodicum ſit $= t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ abſolutè inveniendum, exprimatur a in ſemidiametris Terræ, atque in minutis ſecundis dato tempore periodico t, erit ſemper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{tt}$, poſitâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ ſemidiametro. At ſi tempus Terræ periodicum ſeu annus ſidereus in minutis ſecundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ ped. poſitâ ſemidiametro Terræ per obſervationes exactiſſimas 19695539 ped. Pariſ. Reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex ſuperiori æquatione elevatio aquæ à vi Lunæ oriunda determinabitur; poſitâ enim vi Lunæ abſolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejuſque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem à Newtono repertum tantiſper retinebimus, quoad verus valor per alia Phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ à Terrâ mediocris diſtantia eſt $= 60\frac{1}{2}$ ſemid. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}47 = 0{,}037$ ped. Cùm autem Lunæ excentricitas ſit quaſi $\frac{550}{10000}$, erit dum Luna in perigæo verſatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}82 = 0{,}045$. pedum. At ſi Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur ſi Luna à Terrâ mediocriter diſtet, erit aquæ elevatio $Aa = L \times 90{,}41$ ped. $= 2{,}260$ ped. elevatio autem $Bb = L \times 87{,}47$ ped. $= 2{,}187$ pedum: ac depreſſio ad latera $Dd = Ee = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ ped. Pro perigæo verò Lunæ fiet $Aa = L \times 106{,}26$ ped. $= 2{,}656$ pedum

dum; $Bb = L. 102, 62$ ped. $= 2, 565$ pedum; atque $Dd = Ee = L. 52, 22 = 1, 305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa = L. 76, 93$ ped. $= 1, 923$ pedum, & $Bb = L. 74, 55$ ped. $= 1, 864$ pedum, atque $Dd = Ee = L. 37, 87$ ped. $= 0, 947$ pedum.

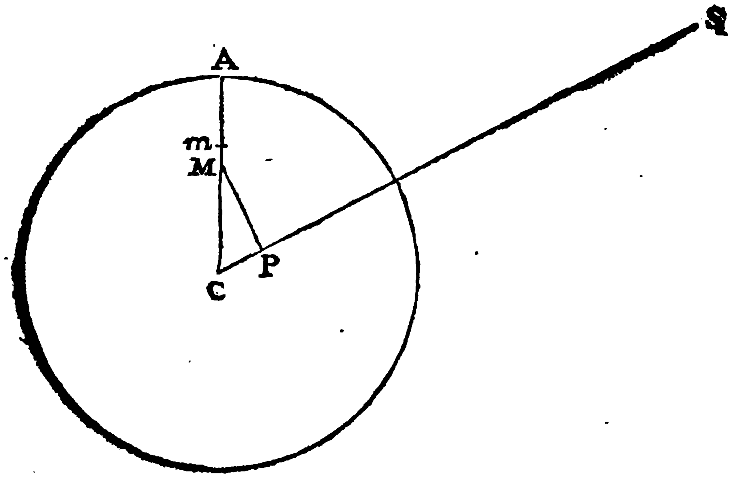
§. 42. Tametſi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depreſſio quæ vel à Sole vel Lunâ ſeorſum gignitur, ſit determinata, ſi quidem omnia ad ſtatum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejuſdem methodi ope eaſdem res definire, ſi Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus uſus pro utroque caſu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs ſit diverſa, ſimul ea, quæ jam ſunt eruta atque à Newtonianis diverſa deprehenſa, maximè confirmabit. Petita verò eſt hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ



aqueæ à ſuperficie Terræ ad centrum pertingentes ſint inter ſe æquiponderantes. Exiſtente igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis abſoluta ponatur $= S$, & diſtantia $SC = a$, ſit AC columna aquea à ſuperficie Terræ A ad centrum C uſque pertingens, quæ altitudo AC ſit $= b$. Ponatur anguli ACS coſinus $= u$, qui ſimul erit ſinus altitudinis ſub quâ punctum S à ſpectatore in A conſtituto ſuper horizonte elevatum conſpicitur; ſumaturque intervallum quodcunque $CM = z$, & conſideretur totius columnæ elementum $Mm = dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorſum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis diſtantiis non ſatis conſtet, ponatur dignitati cuicunque diſtantiarum à centro putà ipſi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes eſſe turbaturum. Urgebitur er-

go elementum Mm versùs centrum C vi $= z^n dz$; ex quo totius columnæ AC niſus deorſum à gravitate oriundus, erit $= \frac{b^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum $Mm = dz$ à vi S ſollicitabitur duplici modo, altero deorſum in directione MC, altero in directione ad illam MC normali, quæ poſterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, ſolaque prior conſiderabitur. Demiſſo autem ex M in CS perpendiculo MP, poſitiſque $CP = x$ & $PM = y$, erit $\surd(x^2+y^2) = z$, & $x = uz$ atque $y = z\surd(1-uu)$. At ex §. 27. vis, quâ particulâ Mm deorſum ſollicitatur, eſt $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\surd(xx+yy)} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\surd(xx+yy)} = \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expreſſio per dz multiplicata,



tumque integrata facto $z = b$, præbebit totius columnæ AC niſum à vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ AC niſus deorſum tendens erit $= \frac{b^{n+1}}{n+1} + \frac{Sb^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$, qui cùm in omnibus columnis debeat eſſe idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis ſemidiametro Terræ 1 in ſtatu naturali à ſolâ gravitate deorſum nititur, quæ vis eſt $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur ſequens emergit æquatio, $1 = b^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $b = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ eſt ea ipſa expreſſio, quam ſuprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem deſignet S Solis vim abſolutam, a ejus diſtantiam à Terra, & u ſinum anguli, quo Sol ſuprà horizontem eſt elevatus. Deinde ſit ſimili modo pro Luna L ejus vis abſoluta, b ejus diſtantia à Terrâ, atque v ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC = h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2c^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2u^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis eſſe debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione reſultat $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2u^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A ſupra ſitum naturalem, quem à ſolâ gravitate ſollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim ſollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expreſſione ſtatus aquæ vel elevationis vel depreſſionis ubique terrarum cognoſcetur.

§. 45. Hanc poſteriorem viam ſecuti, non ſolùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, ſed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuiſſet inſuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura eſſet à vi gravitatis & vi centrifugâ ſimul, ſeu quod eodem redit, in figurâ Terræ ſphæroidicâ compreſsâ, eſſe $= f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ eſſe $= h$; atque manifeſtum eſt quantitates f & h quàm minimè ab 1 diſcrepare. Cùm igitur utriuſque columnæ f & h idem debeat eſſe niſus deorsùm, columnæ autem f in quam ſola gravitas & vis centrifuga agunt niſus ſit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante α quantitatem à vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h niſus ſit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$; erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1)\alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Lh^2(3-1vv)}{2b^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2u^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h = f + s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò & b maximas, $0 = f^n s + \frac{Sf^2(1-uu)}{2a^3} + \frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3} - 2\alpha fs + \frac{Sfs(1-3uu)}{a^3} + \frac{Lfs(1-3vv)}{b^3} + \frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lf^3v(3-5vv}{2a^4}$ neglectis terminis in

 qui-

quibus s plures obtinet dimenſiones, ob ſummam ipſius s parvitatem reſpectu ipſius f. Hinc itaque fiet $s = \dfrac{\dfrac{S(3uu-1)}{2a^3} + \dfrac{L(3vv-1)}{2b^3} + \dfrac{Sfu(5uu-3)}{2a^4} + \dfrac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}}{f^{n-2} - \dfrac{2\alpha}{f} + \dfrac{S(1-3uu)}{a^3 f} + \dfrac{L(1-3vv)}{b^3 f}}$.

Quòd ſi porrò ponatur ſemiaxis Terræ per polos tranſiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ & $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè diſcrepabit; ſub ipſo enim æquatore eſt $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem eſt maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta ſupra altitudinem naturalem $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; diſcrimen enim quod revera aderit, ſenſus omnino effugiet, pendebitque ſimul à valore exponentis n.

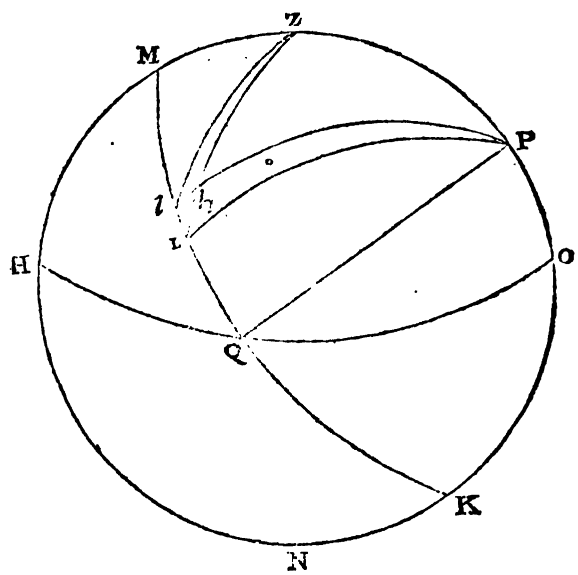
CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris ſi aqua omni inertiâ careret.

§. 46. QUÆ in capite præcedente ſunt tradita reſpiciunt hypotheſin aſſumtam, quâ Solem ac Lunam reſpectu Terræ perpetuò eundem ſitum tenere poſuimus; ibique præcipuè ſtatum æquilibrii, ad quem Oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem ſe res habet, ſi tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo caſu ob perpetuam ſitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adeſſe poterit; cùm enim tempore opus ſit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo ſtatus oceani aſſignatus à vero diſcrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii ſitum, quem vires ſollicitantes intendunt, pervenire non poterit, ſed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamſi in ipſum æquilibrii ſitum perveniat, in eo tamen non acquieſcet, ſed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè conſtat. Hujus autem utriuſque aberrationis ratio in inertiâ aquæ eſt poſita, quâ fit ut aqua nec ſubitò in eum ſitum ſe conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii ſitum attigerit, ibi quieſcat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem aſſumamus, hoc eſt iſtius indolis, ut non ſolùm quovis momento ſe in ſtatum æquilibrii ſubitò recipiat, ſed ibi etiam omnem motum inſitum deponendo permaneat, quamdiu iſte ſitus viribus ſol-

ſollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypotheſi, perſpicuum eſt aquam quovis temporis momento in eo ipſo ſtatu fore conſtitutam, qui ſecundùm præcepta capitis præcedentis poſitioni cùm Solis tùm Lunæ reſpondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypotheſi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus ſtatum Maris quàm commodiſſimè definiamus, primùm ſolam Lunam conſiderabimus, cùm in eâ præcipua æſtûs Maris cauſa contineatur, atque tam Fluxus quam Refluxus Maris à tranſitu Lunæ per meridianum computari ſoleat: quòd ſi enim Lunæ effectus innotuerit, non ſolùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, ſed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus ſimul agentibus proficiſcitur. Propoſitus igitur ſit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith ſit Z, horizon HQO & P polus borealis, ita ut arcus PO ſit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò MLK parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel viciſſim à meridiano ad L pertigit, ut angulus MPL, ſive hoc tempus ſe habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod eſt 24. horarum 48′, uti ſe habet angulus MPL ad quatuor rectos. Sit igitur



anguli MPL coſinus $= t$; ſinus elevationis poli PO ſeu ſinus arcûs $PZ = p$, coſinus $= P$, ac ſinus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem eſt ſinus diſtantiæ Lunæ à polo PL, hujus verò ipſius arcûs ſinus ſit $= q$, cui ſimul coſinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob ſinum totum conſtanter poſitum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo ſphærico ZPL dentur arcus PZ & PL cum angulo ZPL, reperietur per Trigonometriam ſphæricam arcûs ZL coſinus $= tpq + PQ$, qui ſimul eſt ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem, quem antè poſuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5$

$(tpq+PQ)^2-3$; qui valores in formulis præcedentis capitis ſubſtituti præbebunt ſtatum Maris, hoc eſt vel elevationem vel depreſſionem, pro loco propoſito ad tempus aſſignatum.

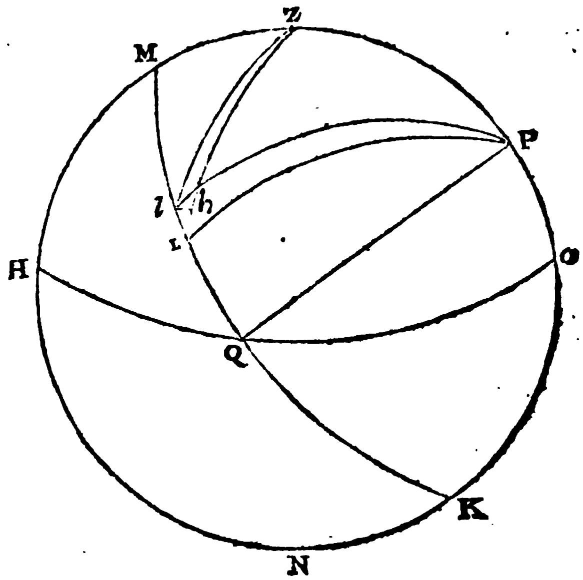
§. 48. Quòd ſi ergo Lunæ vis abſoluta ponatur $=L$, ejuſque à Terra diſtantia $=b$, erit intervallum, quo aqua ſupra ſtatum naturalem elevabitur, $=\frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3}+\frac{L(tpq+PQ)(5(tpq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expreſſio ſi ſit negativa, indicat aquam infra ſtatum naturalem eſſe depreſſam. Ponamus Lunam horizonte ſeu versùs auſtrum per meridianum tranſire, quo caſu erit $t=1$; hoc igitur tempore aqua ſupra ſtatum naturalem erit elevata intervallo $=\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}+\frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna ſub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ ſupra ſtatum naturalem per intervallum $=\frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3}+\frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expreſſio ſemper eſt negativa, ideoque indicat aquam infra ſtatum naturalem conſiſtere. Namque cùm P ubique ſit minor unitate niſi ſub ipſis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° aſſurgere poſſit, ex quo $Q<\frac{1}{2}$ & $QQ<\frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expreſſio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ſeu cùm poſterior terminus vix ſit ſenſibilis, ex ſolo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expreſſione intelligitur aquæ elevationem à ſolâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, ſive Luna ſit ſuper ſive ſub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem ſive v ſit affirmativum ſive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ ſi Luna ab horizonte diſtet arcu 35° 16′, tum aqua in ipſo ſtatu naturali erit conſtituta, neque elevata neque depreſſa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35° 16′ vel ſupra vel infra horizontem verſetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte diſtantia minor eſt quàm 35°. 16′. Omnino autem aqua maximè erit depreſſa dum Luna ipſum horizontem occupat, hocque tempore infra ſitum naturalem ſubſidet intervallo $\frac{L}{2b^3}=1,111$ pedum (§. 41.); atque de hoc ſitu elevabitur recedente Lunâ ab horizonte ſive ſuper ſive ſub Terra. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24. hor. 48′ Mare bis maximè erit depreſſa, biſque elevata; ſtatus ſcilicet depreſſionis incidet in appulſus Lunæ ad horizontem, ſtatus autem elevationis in appulſus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulſu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte diſtat, ſpatio 24 h. 48′ aqua

ſemel

ſemel tantum elevabitur, ſemelque deprimetur: ſub ipſis autem polis æſtus Maris omnino erit nullus, diurnus ſcilicet; nam variatio declinationis ſola ſtatum Maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur ſub polis Terræ nullus ſit Fluxus ac Refluxus Maris, ſed aqua tantum aliquantulum aſcendat deſcendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æſtus Maris in aliis Terræ regionibus ſecundùm noſtram hypotheſin debeat eſſe comparatus. Conſiderabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima poſita ſit ſub ipſo æquatore, ſecunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit; maxima depreſſio aquæ ubique erit eadem, ſcilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra ſitum naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipſo horizonte verſatur. Ab hoc itaque ſtatu maximæ depreſſionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, ſpatiis aſſignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel ſupra horizontem in *M* vel infra in *K* ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter diſtat, qui locus ſit *L* exiſtente angulo *MPL* recto. Præterea tres quoque Lunæ ſitus in ſuâ orbitâ contemplabimur, quorum primus ſit, cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, ſecundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet auſtralem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ ſequente adſcripſimus quantitatem anguli *MPQ*, ex quo tempus tam ortûs quàm occaſûs Lunæ, quo aqua maximè eſt depreſſa, atque elevatio exiſtit nulla, innoteſcit.



In locis ſub Æquatore ſitis, eſt elevatio Maris, dum Luna verſatur in

	M	*L*	*K*	*ang. MPQ.*
☽ *Declinatio* 0°	$\frac{3L}{2b^3}+\frac{2L}{2b^4}$	0	$\frac{3L}{2b^3}-\frac{2L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2{,}649L}{2b^3}+\frac{1{,}549L}{2b^4}$	0	$\frac{2{,}649L}{2b^3}-\frac{1{,}549L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. auſtr.* 20°	$\frac{2{,}649L}{2b^3}+\frac{1{,}549L}{2b^4}$	0	$\frac{2{,}649L}{2b^3}-\frac{1{,}549L}{2b^4}$	90°, 0'

Sub elevatione Poli 30°; erit Maris elevatio

☽ *Declinatio* 0°	$\frac{2{,}250L}{2b^3}+\frac{1{,}082L}{2b^4}$	0	$\frac{2{,}250L}{2b^3}-\frac{1{,}082L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{2{,}909L}{2b^3}+\frac{1{,}880L}{2b^4}$	$\frac{0{,}087L}{2b^3}-\frac{0{,}156L}{2b^4}$	$\frac{1{,}239L}{2b^3}-\frac{0{,}154L}{2b^4}$	102°, 8'
☽ *Decl. auſtr.* 20°	$\frac{1{,}239L}{2b^3}+\frac{0{,}154L}{2b^4}$	$\frac{0{,}087L}{2b^3}+\frac{0{,}156L}{2b^4}$	$\frac{2{,}909L}{2b^3}-\frac{1{,}880L}{2b^4}$	77°, 52'

Sub elevatione Poli 60°, erit Maris elevatio

☽ *Declinatio* 0°	$\frac{0{,}740L}{2b^3}-\frac{0{,}125L}{2b^4}$	0	$\frac{0{,}740L}{2b^3}+\frac{0{,}125L}{2b^4}$	90°, 0'
☽ *Decl. boreal.* 20°	$\frac{1{,}760L}{2b^3}+\frac{0{,}582L}{2b^4}$	$\frac{0{,}263L}{2b^3}-\frac{0{,}514L}{2b^4}$	$\frac{0{,}092L}{2b^3}+\frac{0{,}158L}{2b^4}$	129°, 5'
☽ *Decl. auſtr.* 20°	$\frac{0{,}092L}{2b^3}-\frac{0{,}158L}{2b^4}$	$\frac{0{,}263L}{2b^3}+\frac{0{,}514L}{2b^4}$	$\frac{1{,}760L}{2b^3}-\frac{0{,}582L}{2b^4}$	50°, 55'

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem Maris ſupra ſtatum maximæ depreſſionis in menſuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ & $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Pariſinis ex §. 41. ſubſtituat, habitâ ratione diſtantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem eſt expoſitum. Conſequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia conſectaria, quæ verò nondum ſummo cum rigore ad experientiam examinari poſſunt, etiamſi jam inſignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus, perſpicuum autem eſt, ſi aquæ inertia tribuatur, tum diverſa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd ſi igitur hi aſſignati effectus jam cum obſervationibus planè conſentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra ſtatum ſuum naturalem

turalem ſimus contemplati. Interim tamen ſatis tutò jam ſtatus Maris ſub ipſis polis poterit definiri, qui etſi ad experientiam examinari non poteſt, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem ſub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte diſtantiam, id quod ipſa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulſu æſtus Maris alibi æſtimari ſolet. Dabitur tamen his locis mutatio menſtrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua ſenſim elevabitur prout Lunæ declinatio ſive versùs boream ſive versùs auſtrum augetur, donec tandem ſi declinatio ſit maxima, per ſpatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm ſit perquàm lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iiſdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S & a, loco L & ſubſtitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorſim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem ſimplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione verſari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco verſabuntur, atque ſimul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus ſuperioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis ſinus $= Q$, coſinus $= q$, ac pro angulo MPL cujus coſinus eſt $= t$, erit ſinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs auſtrum tranſeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem ſuperabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(pq+PQ)^2 - 1\right) + \frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2 - 3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm ſenſus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(PQ-pq)^2 - 1\right) + \frac{L(PQ-pq)}{2b^4}\left(5(PQ-pq)^2 - 3\right)$. Maxima denique aquæ depreſſio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ ſit circiter ſubquadruplum ipſius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ ſuprà recenſiti, quartâ ſui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem ſe habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppoſitione verſantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol ſecun-

dùm aſcenſionem rectam à Lunâ diſtet 180°, erit hoc caſu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur ſinus altitudinis Solis $= -tpq - PQ$, qui pro novilunio erat $= tpq + PQ$, ex quo quadratum hujus ſinûs utroque caſu eſt idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte verſantur, tumque aqua humilior erit quàm in ſtatu naturali intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque ſitu donec Luna ad meridianum ſupra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ+pq)^2\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum ſubſidet uſque ad Lunæ obitum; tum verò rurſus elevabitur uſque ad appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per ſpatium $3(PQ-pq)^2 \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino ſequente quippe ferè inſenſibili. Cùm igitur ſint $PQ+pq$ & $PQ-pq$ ſinus diſtantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano verſatur, erunt ſpatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum ſupra ſtatum maximè depreſſum elevatur, in ratione duplicatâ ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum tranſit. Niſi ergo vel Luna in ipſo æquatore exiſtat, vel Terræ locus ſub æquatore ſit ſitus, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per ſpatium $= 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis fieri conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipſo æquatore verſari, quoniam tum plerumque minimus æſtus obſervatur. Hoc itaque caſu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine aſſumamus 23° 29′, cujus ſinus ſit $= Q$, coſinus $= q$, poſitâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M verſari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua ſupra ſtatum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$: at dum Luna ſub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more ſolito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $= \frac{L(3p^2q^2+3P^2Q^2-1)}{2b^3} - \frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè verſabitur, ex quo depreſſio totalis aquæ in Refluxu infra ſtatum naturalem pro-

proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp-1)}{2a^3}$: quare à Fluxu uſque ad ſubſequentem Refluxum aqua ſubſidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo aſſignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æſtibus quàm minoribus infert, ſatis tutò aſſumere poſſe videmur ſpatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii ſive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu aſcendit, expreſſionibus inventis eſſe proportionalia. Quamobrem ſi in dato Terræ loco ex pluribus obſervationibus determinetur ſpatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum aſcendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniiſve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis conſequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per obſervationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ abſolutas S & L, quæ eſt ipſa via quâ Newtonus eſt uſus ad vim Lunæ abſolutam definiendam, cùm vis Solis ſit cognita: quod negotium, cùm à Newtono non ſatis accuratè ſit pertractatum, nos id ex iſtis principiis expediemus. Exprimat igitur $m:n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cum in ſyzygiis luminarium quùm quadraturis tempore æquinoctiorum, aſcendendo deſcendendoque oſcillatur; eritque $m:n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$; ex quâ elicitur iſta proportio $m\left(q^2 + \frac{P^2Q^2}{p^2}\right) - n : m+n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data ſit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis à Lunâ oriundâ $\frac{L}{b^3}$ ſaltem proximè. Inſtituamus calculum pro obſervationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Graces*) factis, ex quibus diligenter inter ſe collatis pro ratione $m:n$ prodit iſta 17 : 11. Cùm igitur hujus loci elevatio poli ſit circiter 50°, erit $P = $ ſin. 50°, & $Q = $ ſin. 23°, 29′; hincque $qq + \frac{P^2Q^2}{pp} = 1{,}0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7{,}1356 : 28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ ſit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis obſervationibus concluſit: atque hanc ob rem ipſius determinationem vis Lunæ abſolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque reſpicientibus ſunt allata, attentiùs conſiderentur, mox patebit maximos æſtus menſtruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depreſſio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, ſimul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò diſ-

ſentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum diſcrimen inter quemque Fluxum ac ſubſequentem Refluxum obſervabitur, æſtuſque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phaſes æſtus Maris medium teneat inter maximum minimumque neceſſe eſt, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conſpirant, nec ſibi invicem adverſantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniiſque maximus eveniat æſtus, quibuſque quadraturis minimus æſtus reſpondeat, abſolutè ſine reſpectu ad ſitum loci habito definiri nequit. Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm eſt in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium eſt nullum, quin æſtus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore ſunt poſita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum diſſita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æſtus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æſtus mox ſubſequentes multo ſunt minores. Quòd ſi autem inter binos æſtus à Lunâ oriundos conſequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æſtus eſt $\frac{2,250}{2b^3} L$ ſi Lunæ declinatio ſit nulla, æſtum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $= \frac{2,074}{2b^3} L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contrà verò ſub elevatione poli 60 graduum, eſt æſtus Maris, Lunâ verſante in æquatore, $= \frac{0,740}{2b^3} L$, æſtus autem medius, cùm Lunæ declinatio eſt 20°, eſt $= \frac{0,916}{2b^3} L$, ideoque major. Ex quo conſequitur in regionibus polis vicinioribus æſtus maximos, non in æquinoctia, ſed potius circa ſolſtitia, incidere debere; quâ quidem in re theoria noſtra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypotheſi.

§. 57. Quanquam in præcedenti capite, quo in quantitatem æſtûs Maris præcipuè inquiſivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc capite iſtud argumentum fuſiùs atque ad obſervationes accommodatè perſequemur. Obſervationes enim, quæ circa æſtum Maris inſtitui ſolent, ad tria genera commodiſſimè referuntur; ad quorum

rum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depreſſio, atque indicatur quantum quovis æſtu aqua cùm aſcendat tùm deſcendat. Ad ſecundum obſervationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus reſpiciunt, quibuſque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm ſummam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus obſervationum ad ipſum motum Maris reciprocum ſpectat, iiſque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depreſſio abſolvatur, ſive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum tranſit & viciſſim, inveſtigatur. Quibus tribus rebus cùm obſervationes convenientiſſimè inſtituantur, iiſdem theoria atque explicatio phænomenorum commodiſſimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro noſtrâ hypotheſi in præcedentibus capitibus abundè ſatisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliiſque circumſtantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abſtrahimus, manifeſtum eſt ubique terrarum, ſi ſola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longiſſimè fuerit remota, hoc eſt iis ipſis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam ſupra quàm infra Terram tranſit: ſunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo ſimul ſucceſſiva Maris commotio cognoſcitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulſu aqua debet eſſe ſumma, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus ſolliciti; cùm tam obſervationes ſufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipſe Maris motus indicatus rationi ſit conſentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis ſatis remotis ſeu extra circulos polares ſitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit, elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totieſque deprimetur; atque utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus ſeu ſummas elevationes interjectum conſtanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abſtrahendo; at tempus ſummæ depreſſionis, cùm reſpondeat appulſui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, ſed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propoſiti elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc eſt quò majus fuerit diſcrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium ſextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut noſtræ concluſiones magis ad obſervationes perducantur. Ac primò quidem manifeſtum eſt tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci tranſit, quippe quo momento etiam

 Sol

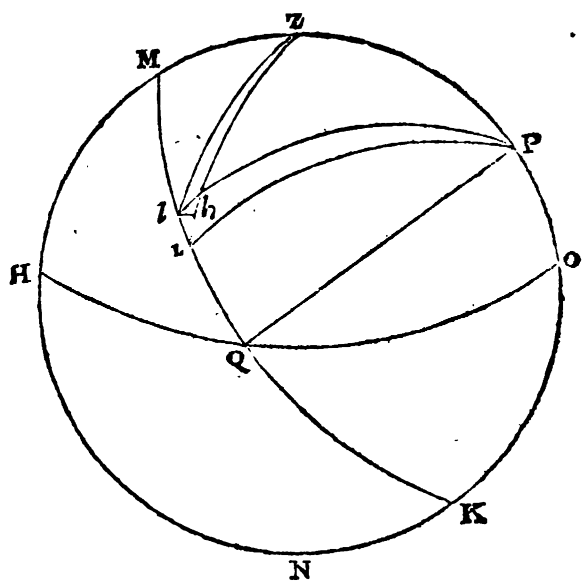
Sol ad eundem meridianum appellit, ſi quidem ſyzygia ipſo meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem ſi novilunium pleniluniumve in ipſum meridiem incidat; ipſo quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque ſi id eveniat mediâ nocte, eodem ipſo momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm ſi conjunctio vel oppoſitio luminarium meridiem vel præcedat vel ſequatur, tum Fluxus non in ipſum meridiem incidet, ſed vel tardiùs vel citiùs veniet; quia Luna his caſibus tanquam primaria æſtûs cauſa vel poſt vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem ſive plenilunium ſive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs reſpectu meridiei. Ponamus enim novilunium ſeu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus ſit 12°. circiter, ipſo meridie Luna à meridiano jam diſtabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna poſt meridiem demum per meridianum tranſibit, elapſis $\frac{n}{30}$ horis ſeu $2n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis poſt meridiem, tum Maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratiſſimè cognoſcentur, ſi ad ſingulos dies tranſitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occaſus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depreſſio reſpondet; majorem autem hujuſmodi tabula afferet utilitatem, ſi inſuper quovis die diſtantia Lunæ à Terrâ inducetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum obſervationibus, quibus conſtat, diebus novilunii vel plenilunii æſtum Maris accelerari ſi novilunium pleniluniumve poſt meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non reſpondeat appulſui Lunæ ad meridianum, ſed tardiùs eveniat, uti poſt docebitur, tamen ſimilibus caſibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, ſi ad obſervationes reſpiciatur, non ſumi debet momentum meridiei, ſed id momentum, quo ſi Lunæ cum Sole conjunctio vel oppoſitio in ipſum meridiem incidit, ſumma aquæ elevatio obſervatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujuſmodi obſervationes inſtituunt fieri ſolet, ſi plenilunium noviluniumve vel ante vel poſt meridiem incidat, ſumma Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem ſyzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel poſt, tum Fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs obſervari debebit. Atque hæc eſt ea ipſa regula quam Celeb. Caſſini in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quamplurimis obſervationibus inter ſe comparatis derivavit; jubet ſcilicet numerum horarum, quibus conjunctio ſive oppoſitio luminarium verum meri-

diem

diem vel præcedit vel ſequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire ſolet, vel addi vel ab eo ſubtrahi, quo verum Fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perſpicuum eſt eam correctione ulteriori opus habere à vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit inſenſibilis, cùm ſumma aquæ elevatio non ſubitò adſit, ſed per tempus ſatis notabile duret.

§. 61. Niſi autem luminaria proxima ſint vel conjunctioni vel oppoſitioni, maxima Maris elevatio non in ipſum Lunæ tranſitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum verſatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conſervat, tantiſper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem ſi Sol interea ſenſibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel creſcet ſenſibiliter, vel decreſcet; ex quo dum Luna prope meridianum exiſtit, fieri poteſt, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perſpicuum eſt ſummam Maris altitudinem tardiùs ſeu poſt tranſitum Lunæ per meridianum accidere debere, ſi eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem ſi Luna poſt Solem per meridianum tranſeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occaſum; tum, quia Mare in tranſitu Lunæ per meridianum à vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulſum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve ſequentibus. Quando autem Sol ipſum horizontem occupat, dum Luna in meridiano verſatur, tum etiamſi diſtantia Solis ab horizonte perquam ſit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato ſinûs altitudinis Solis ſit proportionalis, quod omnino evaneſcit, etiam hoc caſu maxima aquæ elevatio in ipſum Lunæ per meridianum tranſitum incidet, hicque caſus circa quadraturas luminarium locum habet.



§. 62. Ut igitur innoteſcat, quantum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel creſcant vel decreſcant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L verſari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempuſculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræſentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum ſit ut antè anguli MPL coſinus $= t$, & ſinus $= T$, eritque ipſe angulus $LPl = d\theta = \frac{\surd(1-tt)}{+dt} = \frac{dt}{T}$, ex quo orietur anguli MPl coſinus $= t + dt = t + Td\theta$. Si jam ponatur ſinus elevationis poli $= P$, ſinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam ſi declinatio ſit auſtralis, ſinus Q ſumi debet negativè, coſinus verò reſpondentes ſint p & q, reperietur ſinus altitudinis L ſupra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique l ſinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpqd\theta$. Quocirca ſi Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad Mare attollendum ſit $= \frac{L(3vv-1)}{2b^3}$, erit hujus vis incrementum tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lvdv}{b^3} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{b^3}$. At ſi Sol ponatur in L, ejus vis ad Mare elevandum tempuſculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$. Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora reſpondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt,

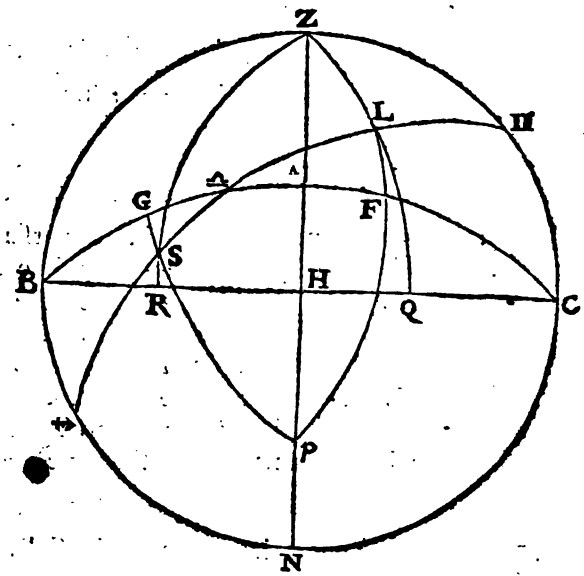
dunt, ſunt enim ut 24 ad $24\frac{3}{4}$ ſeu ut 32 ad 33, ſine ſenſibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen ſi res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquiſitum ſit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempuſculo acceptum $= \frac{32L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{11b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus caſibus evaneſcere, quorum primus evenit ſub polis, quia ibi eſt $p = 0$; ſecundus, ſi punctum L in meridiano ſit ſitum, tum enim fit $T = 0$; tertius denique locum habet, ſi punctum L in horizonte exiſtat, ubi eſt $tpq + PQ = 0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L verſari ac Lunam per meridianum jam tranſiiſſe, hocque momento maximè aquam eſſe elevatam; jam enim oſtendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam ſummam incidere poſt tranſitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento neceſſe eſt, ut decrementum vis Lunæ, quod tempuſculo $d\theta$ patitur, æquale ſit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum ſumti quo Luna jam à meridiano receſſit, coſinus $= n$, ſinus $= N$, atque ſit Lunæ declinationis borealis ſinus $= P$, coſinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Nprd\theta}{b^2}$, quod cùm æquale eſſe debeat incremento vis Solis eodem tempuſculo nato $= \frac{3S(tpp+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, denotante Q ſinum declinationis borealis Solis, & q ejus coſinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{32}{33}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul diſtabit, poni poterit $n = 1$, atque cùm ſit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iſte valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus converſus dabit temporis ſpatium, quo aqua poſt tranſitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P = 0$ & $p = 1$; quare ſi declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales aſſumantur, ita ut ſit $qq = rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expreſſionis valor extat maximus ſi angulus MPL ſit 45°; quo caſu erit $N = \frac{1}{8}$, & angulus reſpondens $= 7^\circ, 11'$, qui indicat aquam ſummam 30 minutis poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante tranſitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, ſi Sol tum verſùs occaſum verſetur, angulo $MPL =$ ſemirecto. Quamobrem ſi Luna ad meridianum appellat horâ nonâ ſive matutinâ ſive pomeridianâ, Fluxus demum poſt ſemihoram eveniet; at ſi horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua ſumma 30′ antè obſer-

 vabitur

vabitur: in aliis verò Terræ regionibus iſta aberratio magis eſt irregularis; interim tamen ſatis prope ex formulâ datâ per ſolam æſtimationem poteſt definiri.

§. 64. Quòd ſi autem hanc rem curatiùs inveſtigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à ſe mutuò maximè ob angulum horarium MPL inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phaſi aberrationem maximæ aquæ elevationis à tranſitu Lunæ per meridianum determinemus, repræſentet nobis circulus $ZBNC$ verticalem primarium, BC horizontem, ZN meridianum per dati loci Zenith Z



& Nadir N ductum, atque Æquator ſit BAC, polus auſtralis p, & ecliptica ♊ ♎ ♐. Conſtitutus nunc ſit Sol in S & Luna in L, quæ modò per meridianum tranſierit, quo tempore ponimus aquam maximè eſſe elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ ſinum eſſe $= F$, coſinum $= f$; Lunæ verò longitudinis ſinum eſſe $= G$, coſinum $= g$; ſitque inclinationis eclipticæ B ♎ ♐ ſinus $= M$, coſinus $= m$. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum ſinus antè erant poſiti Q & R; erit ſcilicet $Q = FM$, $R = GM$; hincque $q = \surd(1 - F^2M^2)$ & $r = \surd(1 - G^2M^2)$. Deinde angulus SpL æqualis eſt angulo cujus tangens eſt $\frac{mF}{f}$ demto angulo cujus tangens eſt $\frac{mG}{g}$; hujus verò ejuſdem anguli ob angulos SpZ & LpZ datos, quorum ſinus ſunt poſiti T & N, tangens quoque eſt $\frac{nT + Nt}{nt - NT}$, quæ tangens propter ſinum N valde parvum proximè eſt $= \frac{T}{t} + \frac{N}{tt}$. Ponatur autem K pro ſinu anguli qui exceſſus eſt anguli habentis tangentem $= \frac{mF}{f}$ ſuper angulum cujus tangens eſt $\frac{mG}{g}$, & k pro coſinu, reperietur $T = K - Nk$ & $t = k + NK$ ſcripto 1 pro n: quibus valoribus ſubſtitutis prodibit $N =$

Kq

$\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+krQq}$ ex æquatione $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$, paragr. præced.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis verſari ac primò quidem in primo poſt novilunium quadrante, ita ut arcus LS futurus ſit 90°., erit $G=f$, & $g=-F$, unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ ſin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ − Atang. $\frac{-mf}{F}$) atque k ejuſdem anguli coſinui æquabitur. Quare his tempeſtatibus aqua maximè elevata poſt tranſitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris converſum dabit angulum cujus ſinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+krQq}$. Pro poſteriore verò quadraturâ poſt novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$, unde erit $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus fit ut antè $K=$ ſin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ − Atang. $\frac{-mf}{F}$) & $k=$ coſinui reſpondenti. Ne autem hìc ſigna + & − calculum confundant, notari convenit [illegible] eſſe ſinum arcûs, qui reſtat, ſi aſcenſio recta Lunæ ſubtrahatur ab aſcenſione rectâ Solis; atque k eſſe ejuſdem arcûs coſinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis verſari, erit longitudo Solis $=0°$, ſeu 360°, & longitudo Lunæ = vel 90° vel 270°, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea aſcenſio recta Solis eſt 360°, & aſcenſio recta Lunæ vel 90° vel 270°; utroque caſu ergo fit $k=0$, unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, ſi Sol verſetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis verſatur, aqua maximè erit elevata eo ipſo momento, quo Luna ad meridianum appellit.

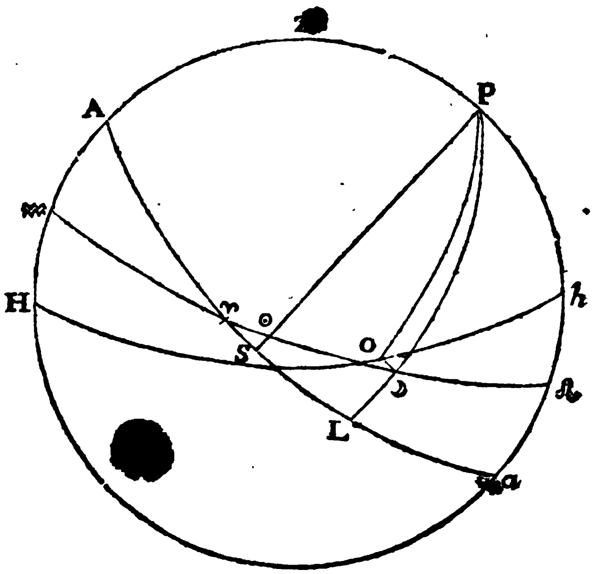
§. 66. Sit porrò Sol in ſolſtitio æſtivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90°, Lunæ verò $=0°$, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$, $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò aſcenſio recta habebitur 90°, Lunæ verò $=0°$, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ eſt longitudo Lunæ 180°, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ aſcenſio recta ſit 180°, erit $K=$ ſin. $-90°=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)p}$. Quoniam autem eſt $4>m^2$, dum Sol in ſolſtitio æſtivo verſatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget poſt Lunæ tranſitum per meridianum ſupra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc tranſitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; ſub æquatore enim omnino evaneſcit. Sit poli elevatio 45°, fietque his regionibus $N=\pm\frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm ſit M ſinus 23°,29′, prodibit $N=$

ſinui anguli $6°, 33'$, qui in tempus converſus dat $26'$. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante tranſitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis poſt tranſitum. Contrarium evenit ſi vel Luna ſub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in ſolſtitio hyemali verſetur. Ex his igitur formulis, ſi tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio tranſitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel ſequi debeat; cujuſmodi ſupputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando [illegible]am inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur ſatis eſt expoſitum; quo momento Mare maximè ſit elevatum, maximam quoque Maris depreſſionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifeſtum eſt, ſi ſola Luna Mare agitaret, tum mini[illegible] aquæ altitudinem obſervatum iri, eo ipſo momento, quo Luna [illegible]orizonte verſetur: atque hinc perſpicuum eſt, idem uſu venire debere, ſi Sol eodem momento quoque in horizonte exiſtat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua reſpondebit ſitui Lunæ in horizonte, ſi eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamſi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos caſus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo caſu a[illegible] jam elevabitur, ex quo neceſſe eſt imam aquam ante adventum L[illegible] ad horizontem extitiſſe, contrà verò ſi dum Luna in horizonte verſatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs ſcilicet poſt appulſum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum ſub horizonte Hb in ☽ adhuc verſari, Solemque in ☉ eſſe poſitum, unde ad meridianum PZH progrediatur; hocque ipſo momento aquam maximè eſſe depreſſam. Neceſſe igitur eſt, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale ſit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam ſit anguli ☽ PO ad polum ſumti, diſtantiam Lunæ à ſuo ortu O indicantis, ſinus $= V$ & coſinus $= v$, qui ob angulum ☽ PO valde parvum tutò ſinui toti 1 æqualis concipi poteſt. Invento ergo angulo hoc ☽ PO ſeu arcu æquatoris illi reſpondente, eoque in tempus converſo, conſtabit quanto temporis intervallo ima aqua appulſum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occaſum quàm ad acceſſionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 63. Poſitis nunc $A\gamma a$ æquatore ac ♒ ♈ ♌ ecliptica, ſit elevationis poli Pb ſinus $= P$, coſinus $= p$; ſinus declinationis Lunæ borea-

lis

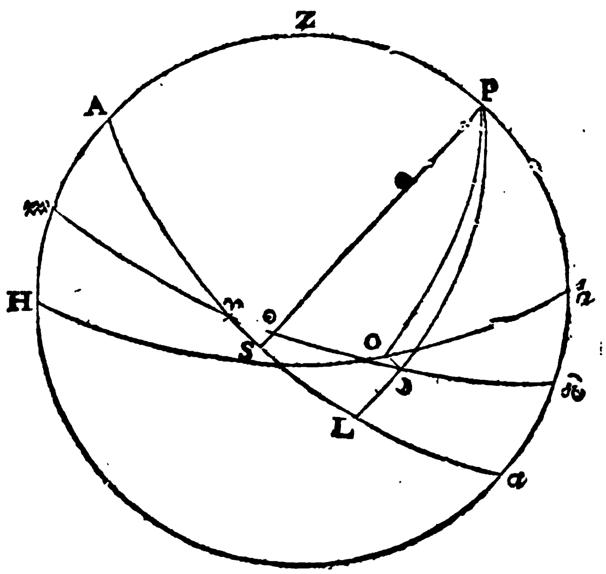


lis ☽ $L = R$, coſinus $= r$; ex quibus fiet anguli APO coſinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evaneſcit. Cùm igitur anguli APO ſinus ſit $= \frac{\sqrt{(p^2 r^2 - P^2 R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(1 - P^2 - R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(pp - RR)}}{pr}$, erit anguli AP☽ ſinus $= \frac{v\sqrt{(pp-RR)} - VPR}{pr}$, & coſinus $= \frac{-vPR - V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $=$ $\frac{3LV\sqrt{(pp-RR)}\,(\sqrt{(pp-RR)} - VPR)\,d\theta}{b^3} = \frac{3LV(pp-RR)\,d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ⊙ S ſinus $= Q$ & coſinus $= q$, atque anguli AP⊙ ſinus $= T$, coſinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq + PQ)\,Tpq\,d\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale eſt ponendum, ſiquidem Maris altitudo hoc tempore eſt minima. Quare cùm ſit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, iſta habebitur æquatio $4V(pp - RR) = Tpq(tpq + PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq + PQ)}{4(pp - RR)}$: cùm igitur hoc pacto innoteſcat angulus OP☽, is in tempus converſus dabit temporis ſpatium, quo ſumma Maris depreſſio ante ortum Lunæ contingit. At ſi punctum O deſignet Lunæ occaſum, idem angulus præbebit tempus poſt Lunæ occaſum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex for-

formulâ inventâ quibus caſibus ima aqua in ipſum appulſum Lunæ ad horizontem incidat; hoc ſcilicet primò evenit, ſi $T = 0$, hoc eſt ſi Sol in meridiano verſetur, deinde ſi $tpq + PQ = 0$, id eſt ſi Sol quoque horizontem occupet; quos binos caſus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noſter Terræ ſub æquatore ſitus, ſeu elevatio poli nulla, erit $P = 0$, & $p = 1$, unde efficitur $V = \frac{Ttqq}{4(1-RR)} = \frac{Ttqq}{4rr}$; in quâ formulâ cùm q & r denotent coſinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter ſe diſcrepabunt; ponamus enim alteram declinationem eſſe maximam, alteram verò minimam ſeu $= 0$, erit tamen coſinuum ratio minor quàm $1 : \surd \frac{3}{4}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ ſemper intra hos limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$ continebitur. Quòd ſi ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quòd tutò facere poſſumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V = \frac{Tt}{4} = \frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ ſinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano diſtat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depreſſionis aquæ aſſignandum, videndum eſt quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujuſque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli ſumatur duplum, hujuſque dupli ſinus, cujus pars octava præbebit ſinum anguli, qui in tempus converſus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulſum ad horizontem vel præcedit vel ſequitur; id quod ex notatis circumſtantiis diſcernere licet. Sic ſi Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus uſque ad meridiem 3 horarum, angulusque reſpondens 45°, cujus dupli ſinus eſt ipſe ſinus totus, cujus pars octava ſit ſinus anguli 7°, 11′, cui tempus reſpondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aſpectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ♈ ☉ ſinum eſſe $= F$, coſinum $= f$ longitudinis verò Lunæ ♈ ☽ ſinum eſſe $= G$, coſinum $= g$; atque inclinationis eclipticæ ☊ ♈ *a* ſinum $= M$, coſinum $= m$. His poſitis erit $Q = MF$, & $R = MG$; atque aſcenſionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $= \frac{mF}{f}$, Lunæ verò aſcenſionis rectæ ♈ L tangens $= \frac{mG}{g}$. Subtrahatur aſcenſio recta Solis ab aſcenſione rectâ Lunæ, & differentiæ ſinus ſit $= K$, coſinus $= k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ ſit ſinus $= K$ & coſinus $= k$, aguli verò AP ☽ ſinus $= \frac{\surd(pp - RR) - VPR}{pr}$ ob $v = 1$, & coſinus $= \frac{-PR - V\surd(pp - RR)}{pr}$, erit anguli AP ☉ ſinus $= T = \frac{(k + KV)\surd(pp - RR) - kPKV + KPR}{pr}$ & coſinus $t = \frac{(K - kV)\surd(pp - RR) - KPRV - kPR}{pr}$; quibus



bus valoribus ſubſtitutis, ſimulque ſinu V tanquam valde parvo conſiderato, reperietur ſinus $V = \frac{(KPR + k\surd(pp - RR))\ q\ (Kq\surd(pp - RR) - kPRq + PQr)}{4rr\,(pp - RR)}$. Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$, $V = \frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula ſuperior à diſtantiâ Solis à meridiano petita ſimul ad differentiam aſcenſionalem Solis & Lunæ poteſt accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præſens inſtitutum, quo tantum veritatem cauſæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus eſt hæc pluribus perſequi, quippe quæ potiſſimum ad accuratiſſimas æſtûs marini tabulas ſupputandas pertinent, quæ res in propoſitâ quæſtione Illuſtriſſimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æſtu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æſtum Maris fuſiùs deduximus, eâ hypotheſi nituntur aſſumtâ, quâ aquam inertiæ expertem poſuimus: quamobrem non eſt mirandum ſi plerique effectus aſſignati cum Phænomenis minùs congruant, atque

adeo

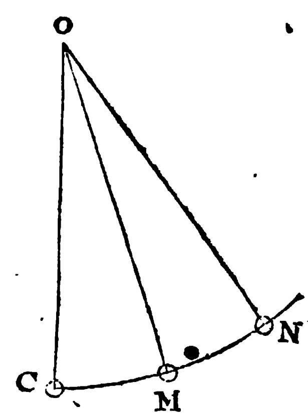
adeo pugnare videantur; quòd ſi enim inter ſe prorſus convenirent, theoria non ſolùm non eo conſenſu confirmaretur, ſed potiùs omnino ſubverteretur, cùm quilibet facilè agnoſcat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis concluſionibus maximè ab experientiâ diſſentiunt, potiſſimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam ſumma Maris elevatio quàm ima depreſſio contingere ſolet, reſpiciunt. Nuſquam enim ubi quidem Mare eſt liberum atque apertum, tam exiguum diſcrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine obſervatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor ſcilicet pedum tantum; quæ elevatio inſuper tamen maxima eſt deprehenſa, ac tum ſolùm oriunda, quando tam regio prope æquatorem eſt ſita, quàm vires luminarium inter ſe maximè conſpirant. Experientiâ namque conſtat, pleriſque in locis, ſi æſtus contingat maximus, aquam non ſolùm ad altitudinem duplo majorem, ſed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non ſoli inertiæ aquæ, ſed maximam partem vicino continenti ac littorum ſitui eſt tribuenda, uti in ſequenti capite clariſſimè monſtrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nuſquam illis ipſis momentis, quæ aſſignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempeſtatibus hìc definitis Fluxus maximi vel minimi, ſed ubique tardiùs evenire conſtanter obſervantur; cujus quidem retardationis cauſa in ipſâ aquæ inertiâ poſita eſſe primâ etiam fronte perſpicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab obſervationibus diſſentiat, tamen complures circumſtantiæ ſeſe jam præbuerunt experientiæ tantopere conſentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque reſpicientibus, quas non temerè aſſumſimus, ſed aliunde exiſtere demonſtravimus, vera & genuina æſtûs Maris cauſa contineatur. Hanc ob rem jam meritò ſuſpicari licet, diſſenſiones quæ inter theoriam noſtram, quatenus eam aſſumtæ hypotheſi ſuperſtruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliiſque circumſtantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficiſci. Quocirca ſi omnia inertiæ ratione habitâ ad obſervationes propiùs accedant, id quidem noſtræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque ſimul omnes alias cauſas, quæ præter has vel ſunt prolatæ vel proferri poſſunt, excludet, irritaſque reddet. Cùm igitur conſenſum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox ſimus evidentiſſimè oſtenſuri, quæſtioni ab Inclytâ Academiâ propoſitæ ex aſſe ſatisfeciſſe jure nobis videbimur: cùm non ſolum nullas vires imaginarias effinxerimus, ſed etiam virium Lunam Solemque reſpicientium exiſtentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum pleriſque Anglorum ad qualitates occultas ſumus delapſi, verùm potius cauſam iſta-

tum

rum virium modo rationali & legibus motûs conſentaneo in vorticibus conſtituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare poſſemus; idque feciſſemus, niſi ab aliis cùm jam ſatis eſſet expoſitum, tùm etiam ab Illuſtriſſimâ Academiâ in præſente quæſtione non requiri videatur.

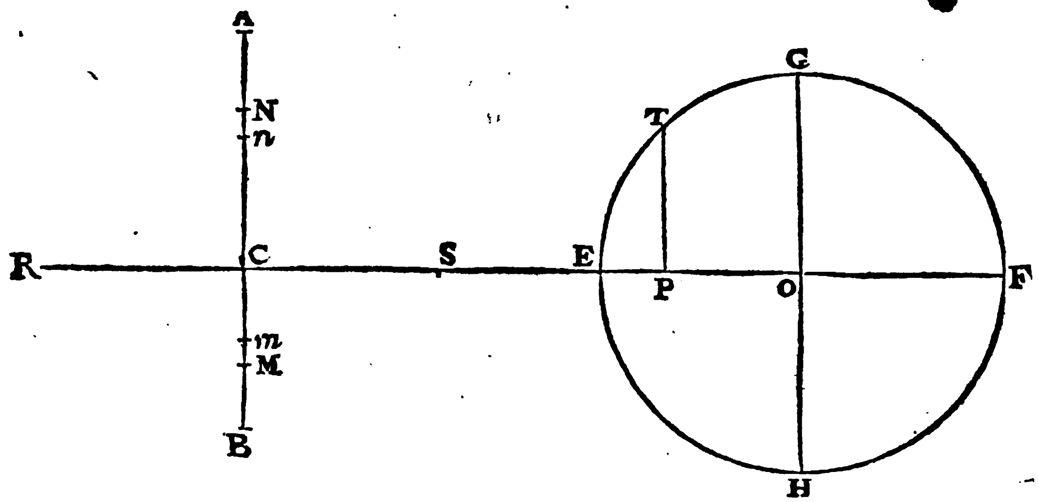
§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipſi ejuſmodi qualitatem affinximus, quâ viribus ſollicitantibus ſubitò obſequeretur, ſeque in inſtanti in eum ſtatum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio conſiſteret; hocque pacto aquam non ſolùm ſubitò omnis motûs capacem poſuimus, ſed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem priſtinum motum amittat. Longè aliter autem res ſe habet, ſi inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non ſubitò ſe ad eum ſitum componat, quem vires intendunt, ſed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in cauſa eſt, quòd aqua, cùm in ſtatum æquilibrii pervenerit, ibi non acquieſcat, ſed ob motum inſitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perſpicuum eſt, admiſsâ inertiâ aquæ, à potentiis ſollicitantibus motum omninò diverſum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, ſi inertiâ privata eſſet; cujus diſcriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni poteſt. Ponamus enim corpus pendulum OC ob gravitatem ſitum tenens verticalem, à vi quâpiam in latus ſecundùm directionem CM ſollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, ſeu ejuſmodi eſſet indolis, cujus aquam hactenus ſumus contemplati, tum ſubitò ſitum OM acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum conſideratur, poſt aliquod demum tempus elapſum ad ſitum OM perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quieſcet, ſed ultrà excurret, putà in N uſque, ita ut ſpatium CN ferè ſit duplo majus ſpatio CM; prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi ſollicitanti obtemperat; atque à ſitu æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excurſionem conficit, quàm ſi inertiâ careret; quæ ſunt eæ ipſæ duæ res, in quibus theoria antè expoſita ab experientiâ maximè diſſentire deprehenſa eſt.



§. 74. Si nunc iſtud penduli exemplum ad noſtrum caſum æſtûs Maris transferamus, primò ingens ſimilitudo in ſitu penduli verticali ac ſta-

tu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, obſervatur. Nam quemadmodum pendulum, ſi in quamcunque plagam de ſitu verticali declinetur, propriâ vi gravitatis ſe in eundem recipit, ita etiam aqua, ſi ex ſitu ſuo æquilibrii depellatur, vi gravitatis ſe ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oſcillationes peragit, cujuſmodi oſcillationum caſus in aqua obſervati paſſim inveniuntur expoſiti. Deinde etiam ſimili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex ſitu ſuo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim ſeſe in ſitum æquilibrii reſtituendi. Quòd ſi igitur Mare à viribus externis, Solis ſcilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, neceſſe eſt ut inde motus oſcillatorius ſeu reciprocus oriatur æſtui Maris omnino ſimilis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem ſunt res, quæ abſolutam ac perfectam totius motûs determinationem ſummoperè reddunt difficilem, quarum altera phyſicam ſpectat, atque in ipſâ fluidorum naturâ conſiſtit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè ſi quæſtio ſit de ampliſſimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipſâ analyſi eſt poſita, eò quòd iſte motus Maris reciprocus prorſus ſit diverſus ab omnibus oſcillationibus à Mathematicis adhuc conſideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare ſollicitantes neque à ſitu corporis oſcillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id uſu venit in omnibus oſcillationum caſibus etiam nunc expoſitis, ſed eæ vires à ſitu luminarium reſpectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujuſmodi oſcillationes nemo adhuc, quantum quidem conſtat, calculo ſubjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem phyſicam attinet, res hoc quidem tempore ferè deſperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia ſit aſſecuta incrementa, tamen ea potiſſimum motum aquarum in vaſis & tubis fluentium reſpiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari poteſt. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præſtare non licet, niſi ut hypotheſibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæſtio ad conſiderationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamſi difficillimis integrationibus ſit involuta, tamen feliciter ſuperare confidimus. Conſidero ſcilicet ſuperficiem aquæ *RS*, quæ hoc in ſitu æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in *A*, deprimaturque in *B*. Quòd ſi igitur aqua in *M* uſque ſit depreſſa, atque externæ vires Solis ac Lunæ ſubitò ceſſarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur ſeſe elevare uſque in ſitum *RS* naturalem, iſteque conatus eò erit major, quò majus fuerit ſpatium *CM* quo à ſitu naturali diſtat. A veritate itaque non multum recedemus,



mus, ſi hanc vim ipſi ſpatio MC ponamus proportionalem: quamobrem poſito ſpatio $MC = s$, erit vis, quæ aquæ ſuperficiem in M uſque depreſſam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypotheſis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd ſponte indicat, ſi aquæ ſuperficies ſupra C jam ſit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypotheſis confirmatur pluribus phænomenis aquæ niſum reſpicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium ſuperſit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M conſtitutam urgeri à ſolâ Lunâ, atque ut calculus per ſe moleſtus minus habeat difficultatis, ſit locus C ſub ipſo æquatore ſitus, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith tranſeunte æquatore ſcilicet circumferetur: ſit $EGFH$ iſte circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque EF repræſentet horizontem, & G zenith. Poſitis his, ſit Luna in T dum Maris ſuperficies verſatur in M, ita ut $PT = y$ exprimat ſinum altitudinis Lunæ ſuper horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, poſito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo ſuperficies Maris in M duplici vi attolletur, ſcilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd ſi ergo ponamus aquam in M jam habere motum ſurſum directum, cujus celeritas tanta ſit quanta acquiritur lapſu gravis ex altitudine v, atque ſpatium $Mm = -ds$ tempuſculo infinitè parvo abſolvatur, habebitur per principia motus $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in E

jam

iam elapſum, quod arcui ET eſt proportionale, eſſe $= z$, quæ littera ipſum arcum ET ſimul denotet, erit $y =$ ſin. z ſcilicet ſinui arcûs z, hoc enim modo ſinus ac coſinus arcuum ſumus indicaturi: unde orietur $1 - 2yy =$ coſ. $2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ coſ. $2z$, hincque $dv = -ds \left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h} \text{coſ. } 2z.\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis ſit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde ſumto elemento dz pro conſtante, fiet $dv = \frac{2dsdds}{dz^2} = -ds \left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h} \text{coſ. } 2z\right)$, atque $2dds + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3 \text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s & z, & propterea ſi debito modo integretur, indicabit ſitum ſeu ſtatum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio eſt differentialis ſecundi gradûs, atque inſuper arcus & ſinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus eſſe obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimenſione nuſquam adſit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejuſmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non ineſt, rejicere; unde hæc conſideranda venit æquatio $2dds + \frac{sdz^2}{g} = 0$, quæ per ds multiplicata fit integrabilis, exiſtente integrali $ds^2 + \frac{ssdz^2}{2g} = cdz^2$ ob dz conſtans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}} =$ arcui cujus ſinus eſt $\frac{1}{\sqrt{2cg}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2cg}$. ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea naſcitur ſubſtitutio facienda pro æquatione propoſitâ $2dds + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3 \text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$; fiat enim $s = u$ ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du$ ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{udz}{\sqrt{2g}}$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $dds = ddu$ ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2dudz}{\sqrt{2g}}$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{udz^2}{2g}$ ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget iſta æquatio $2ddu$ ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4dudz}{\sqrt{2g}}$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1 - 3 \text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipſa variabilis u non inſit, ſed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd ergo ponatur $du = pdz$, erit $ddu = dpdz$, & æquatio noſtra tranſibit in ſequentem differentialem primi gradûs tantum, $2dp$ ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4pdz}{\sqrt{2g}}$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1 - 3 \text{coſ. } 2z)}{2h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, ſi multiplicetur per quantitatem quampiam ex z & conſtantibus compoſitam, eò quòd p plures unâ dimenſiones habet nuſquam. Ad inte-

integrationem autem abſolvendam notandum eſt hujus æquationis $dp + pZdz = \Sigma dz$, in quâ Z & Σ functiones quaſcunque ipſius z denotent; integrale eſſe $e^{\int Z dz} p = \int e^{\int Z dz} \Sigma dz$. Reductâ autem noſtrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2p\,dz \cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\cos.2z-1)}{4h\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque

$Zdz = \frac{2dz\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\,diff.\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Zdz = 2\log.\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Zdz} = (\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}})^2$. Ex his ſequitur integrale noſtræ æquationis $p(\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}})^2 = \frac{1}{4h}\int dz \sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}(3\cos.2z-1) = \frac{3}{4h}\int dz \sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\cos.2z - \frac{1}{4h}\int dz\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur eſſe $\int dz \sin.\alpha z = C - \frac{1}{\alpha}\cos.\alpha z$, atque $\int dz \sin.\alpha z.\cos.\beta z = C - \frac{\beta\sin.\alpha z.\sin.\beta z - \alpha\cos.\alpha z.\cos.\beta z}{\alpha^2-\beta^2}$: ex his itaque conficietur $p(\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}})^2 = C + \frac{\sqrt{2g}}{4h}\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{(2\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}.\sin.2z + \frac{1}{\sqrt{2g}}\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}.\cos.2z).3}{(\frac{1}{2g}-4)4h}$ atque $p =$

$$\frac{C}{(\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}})^2} + \frac{\sqrt{2g}.\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h[\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}]^2} - \frac{(4g\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\sin.2z + \sqrt{2g}.\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}\cos.2z).3}{4h(1-8g)[\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}]^2}.$$

§. 59. Cùm autem poſuiſſemus $du = p\,dz$, erit $u =$

$$\int p\,dz = \int\frac{Cdz}{[\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}]^2} + \int\frac{dz\sqrt{2g}.\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h[\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}]^2}$$

$$-\frac{3}{4h}\int dz\frac{[4g\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\sin.2z + \sqrt{2g}.\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}\cos.2z]}{(1-8g)[\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}]^2}.$$ Hæ autem formulæ omnes ſunt abſolutè integrabiles, prodibitque $u = D - \frac{C\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g\cos.2z}{2h(1-8g)\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; ex quo tandem reſultat $s = u\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}} = D\sin.\frac{z}{\sqrt{2g}} + C\cos.\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g\cos.2z}{2h(1-8g)}$, quæ eſt æquatio generalis ad quodvis tempus z ſtatum aquæ, ſeu diſtantiam ejus

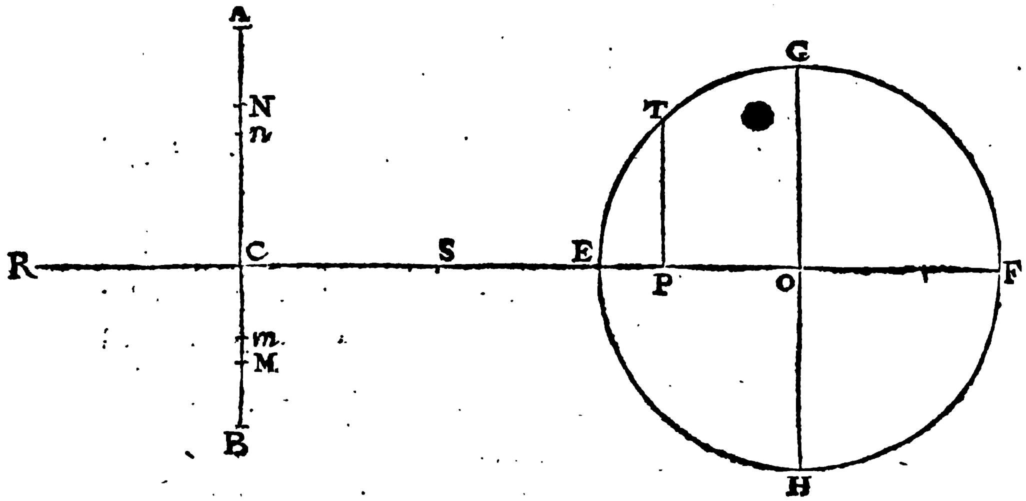
ejus ſupremæ ſuperficiei à C indicans, ubi conſtantes C & D ex dato Maris ſtatu ad datum tempus definiri oportet. Quòd ſi igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem eſſe deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T verſatur in eodem loco M verſetur, neceſſe erit ut valor ipſius s maneat idem, etſi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At poſito $z + 2\pi$ loco z, terminus coſ. $2z$ manet quidem invariatus, at D ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D$ ſin. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C$ coſ. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adeſſe non poteſt niſi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ſit numerus integer, vel C & $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam eſt datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut iſta habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g\,\text{coſ.}\,2z}{2h(1-8g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus ſtatus Maris cognoſcetur: valores ſcilicet affirmativi ipſius s dabunt ſitum aquæ infra ſitum naturalem C, negativi verò ſupra C.

§. 80. Cognito autem ſpatio s per tempus z, celeritas quoque Maris quâ in M aſcendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g\,\text{ſin.}\,2z}{h(1-8g)}$, quæ expreſſio ipſi celeritati, quâ aquæ ſuperficies, dum in M verſatur, elevatur, eſt proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ ſemper eſt ut ſinus dupli arcûs ET, vel etiam ut ſinus dupli temporis, quo Luna à tranſitu per meridianum abeſt, tempore ſcilicet in arcum æquatoris converſo. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla ſi Luna fuerit vel in E vel in G vel in F vel in H; hoc eſt, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè ſit elevata vel maximè depreſſa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, biſque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depreſſa iis ipſis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit coſ. $2z = 1$; atque ſpatium CB erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum, quibus eſt coſ $2z = -1$: ac tum altitudo CA erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non ſatis conveniunt, tamen ea hypotheſi aſſumtæ planè congruunt, quâ poſuimus Lunam ſolam agere, ac perpetuò in ipſo æquatore verſari, ex quo æſtus ſe tandem ad ſummam regularitatem componat neceſſe eſt. Quòd ſi enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol inſuper agat, æſtus jam formati perpetuò turbabuntur; ex quo ob æquabilitatem continuò ſublatam effectus tardiores neceſſariò conſequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris horizontalis

zontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æſtum formandum motu horizontali progredi debeat, perſpicuum eſt hinc retardationem in æſtu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus ſollicitantibus in æquilibrio conſiſteret. Maxima igitur depreſſio etiam tum Lunæ horizontali reſponderet, cùm eſt $y = 0$, foretque ſpatium depreſſionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulſum ad meridianum continget, fiet per ſpatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare ſi aqua inertiâ careret, foret ſpatium MN, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admiſsâ agitationes perficientur in ſpatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$; cujus exceſſus ſuper ſpatium MN erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æſtûs pendet à valore litteræ g; qui quidem ſemper eſt affirmativus; nam ſi foret $g = 0$, quod evenit ſi gravitatis vis eſſet infinitè magna reſpectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æſtus oriretur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æſtus, qui adeo in infinitum excreſcere poſſet ſi foret $8g = 1$; hoc quippe caſu vis Lunæ gravitatem ſuperaret, omneſque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non poteſt, multo minus autem eſſe poteſt $8g > 1$, quod tamen ſi eveniret, maxima elevatio appulſui Lunæ ad horizontem, maximaque depreſſio Lunæ meridianum occupanti reſponderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, ſi inertiâ careret, agitetur per ſpatium $MN = \frac{3g}{h}$, ſuprà autem §. 41. eâdem hâc hypotheſi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari ſupra libellam per ſpatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi ſpatio 1,112 pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1,124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipſius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipſum arcum circuli cujus radius eſt $= 1$ expreſſimus: hinc itaque valor ipſius g reſpectu unitatis definietur tempore eodem modo expreſſo, quo aqua in M uſque depreſſa ſolâ vi gravitatis ſe in C reſtitueret, quod tem-



tempus ex circumſtantiis facilè poterit æſtimari: prodibit autem per calculum tempus hujus reſtitutionis $= \frac{\pi}{2} \sqrt{2g}$, denotante π ſemiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, ſeu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd ſi igitur reſtitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2g}}{2}$ & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perſpicuum eſt, quò citiùs aqua ſe propriâ ſuâ vi reſtituere valeat, eò minùs exceſſurum eſſe ſpatium AB ſpatium MN. Cùm autem de hâc reſtitutione non ſatis tutò judicare queamus, præſtabit ex obſervationibus rationem ſpatii AB ad MN proximè aſſumere. Si enim ponamus eſſe $AB = 2\,MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; ſin autem ſit $AB = 3\,MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{2}{12}$: at poſito $AB = 4\,MN$, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus ſpatium abſolvere poni poteſt, aſſumamus $g = \frac{2}{36}$ ſeu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in ſtatum naturalem ſe reſtituere valeat. Poſito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5,4$; ſpatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat ſpecialis, retineamus litteram n, cujus valorem eſſe circiter 6 vel 5 notaſſe ſufficiet, qui valor ſatis propè ad æſtimationem accedit: ita ut ſit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn-16} \cdot \frac{9}{8}$ pedum: unde ſatis patet n neceſſariò eſſe debere > 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in ſenſu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli ſinum eſſe $= P$, coſinum $= p$; Lunæ verò declinationis borealis ſinum eſſe $= Q$, coſinum $= q$; Lunamque ſuper Terra jam per meridianum tranſiiſſe, ab eoque diſtare angulo horario $= z$, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ deſignet; quòd ſi nunc arcûs z coſinus ponatur $= t$, erit ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunæ Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}$ $(3(tpq + PQ) - 1) = \frac{3p^2q^2tt + 6pqPQt + 3P^2Q^2 - 1}{h}$, poſito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò eſt $t = \text{coſ.}\, z$ erit $2tt - 1 = \text{coſ.}\, 2z$, & $tt = \frac{1 + \text{coſ.}\, 2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad Mare elevandum habebitur $=$ $\frac{3p^2q^2 \text{coſ.}\, 2z}{2h} + \frac{6pqPQ \text{coſ.}\, z}{h} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h}$. Ponamus nunc ſuperficiem aquæ in M verſari, exiſtente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu aſcendit debitam eſſe altitudini v, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunæ}\right)$, cùm verò ſit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ ſeu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$ ipſi celeritati aſcenſûs erit $v =$ $\frac{2dsdds}{dz}$, poſito dz conſtante: hinc igitur emerget iſta æquatio $2dds + dz^2$ $\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h} + \frac{6pqPQ \text{coſ.}\, 2z}{h} + \frac{3p^2q^2 \text{coſ.}\, 2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus z & ſtatum Maris s continens.

§. 84. Quòd ſi nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo ſuperior, ea pariter bis integrari poſſe deprehendetur, integrationibus autem ſingulis debito modo abſolutis, & conſtantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} - \frac{6gpqPQ \text{coſ.}\, z}{h(1-2g)}$ $- \frac{3gp^2q^2 \text{coſ.}\, 2z}{2h(1-8g)}$ ac celeritas aſcenſûs $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQ \text{ſin.}\, z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2 \text{ſin.}\, 2z}{h(1-8g)}$. Cùm autem ſit $\text{ſin.}\, 2z = 2\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, z$, celeritas duobus caſibus evaneſcit, quorum primus eſt ſi $\text{ſin.}\, z = 0$, alter ſi $\text{coſ.}\, z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; illi caſus dabunt aquam ſummam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam ſummam contingere debere iis ipſis momentis, quibus Luna per meridianum tranſit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, ſi eſt $\text{coſ.}\, z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò eſt ima ſi eſt $\text{coſ.}\, z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ poſito $g = \frac{1}{18}$. Hìc autem idem eſt notandum quod ſuprà, ſcilicet nos poſuiſſe motum aquæ eſſe uniformem ſeu quotidie ſui ſimilem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, ſeu ſaltem ſuam declinationem non variare. Quoniam verò ob va-

 riabi-

riabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iſte motus perpetuò turbatur, atque inſuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita eſt ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis ſequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter ſi Luna ſuper horizonte ad meridianum appellit, alter ſi ſub Terra; priori caſu eſt coſ. $z = 1$, & coſ. $2z = 1$, hoc itaque tempore Mare ſupra libellam C elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna ſub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter coſ. $z = -1$ ac coſ. $2z = 1$ hoc caſu: harum igitur altitudinum differentia eſt $= \frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$: atque Mare in tranſitu Lunæ per meridianum ſupra horizontem altiùs elevatur, ſi declinatio Lunæ ſit borealis; contrà verò ſi declinatio fuerit auſtralis, major Maris elevatio reſpondebit appulſui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipſo æquatore verſante, ambo Fluxus inter ſe erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum ſucceſſivorum inæqualitas erit maxima ſub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, ſi fuerit coſ. $z = \frac{-PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore ſubſtituto, reperietur aqua infra libellam C ſubſidere per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æſtu movebitur per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqP\cdot Q}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum ſignorum ambiguorum ſuperius + valet ſi Luna ſuper horizonte, alterum verò − ſi Luna ſub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum ſuperiore Lunæ tranſitu per meridianum elevaretur ſupra libellam C per ſpatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò tranſitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum diſcrimen eſt $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut diſcrimen admiſsâ inertiâ majus ſit parte circiter octava, quàm idem diſcrimen ſi inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua ſublatâ inertiâ, ſi fuerit coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit conſtituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo

ſpatium;

ſpatium, per quod æſtus Maris ſit ſublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3p^2q^2 + 3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h} g$; cùm igitur idem ſpatium conceſsâ inertiâ, ſit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6grpPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit exceſſus hujus ſpatii ſuper illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo poteſt ut ſpatium, in quo æſtus Maris continetur, majus ſit ſublatâ inertiâ, quàm ſi ea aquæ tribuatur, id quod eveniet ſi $\frac{p^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc eſt $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, poſito $g = \frac{1}{18}$; quod verò ſi evenit, Luna ne quidem horizontem in curſu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo ſequitur æſtum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad uſum magis accommodatè ſpatium AB, per quod Mare agitatur, ita expreſſum ut ſit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi ſignorum ambiguorum ſuperius tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, inferius verò ſub horizonte reſpicit.

§. 87. Cùm ſit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ diſtantiam tenente, atque g ſit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit poſito $g = \frac{2}{25}$ ſpatium $AB = \frac{25}{9}\left(pq \pm \frac{3}{7}PQ\right)^2$, $3{,}372$ ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit ſpatium $AB = \frac{9}{5}\left(pq \pm \frac{5}{8}PQ\right)^2 \cdot 3{,}372$ ped. Ex his colligitur æſtum fore maximum pro eadem elevatione poli, ſi fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{2}{25}$, vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{1}{18}$: horum autem caſuum prior veritati magis videtur conſentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur ſequitur ſub æquatore æſtum fore maximum ſi Luna nullam habeat declinationem, atque ſimul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit aſſignari, cui maximus æſtus reſpondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽
0°.	0°,	0′	30°.	13°,	54′	60°.	———
5°.	2°,	8′	35°.	16°,	42′	65°.	———
10°.	4°,	19′	40°.	19°,	46′	70°.	———
15°.	6°,	33′	45°.	23°,	11′	75°.	———
20°.	8°,	52′	50°.	27°,	3′	80°.	———
25°.	11°,	18′	55°	maxima.		85°.	———

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$: ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ g innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius g tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2 . 16,86$ ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16,86$ ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos Fluxus dirimit, quàm fieret, ſi ima aqua Lunæ horizontali reſponderet. Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur z, erit coſ. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem inſequitur, coſinus eſt $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejuſque ergo intervalli à tempore medio ſinus eſt $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expreſſio adeo ſub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum fit $= 13°$, unde Refluxus

fluxus à tempore inter Fluxus medio circiter $54'$ aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem verſentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipſius g aſſumto conſequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non poſſe abſolutè determinari, ſed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius Oceani ſpectat, cùm ab extenſione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias ſignificationes ſortietur.

§. 89. Ex ſolutione horum duorum problematum, quæ quidem in ſe ſpectata non ſolum ſunt attentione digna, ſed etiam cùm analyſin tùm etiam motûs ſcientiam amplificant, quamvis ea caſum propoſitum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ noſtræ jam inſigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à Sole profecta cum inertiâ aquæ poteſt conjungi, atque æſtus Maris definiri, quâtenus à ſolâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æſtus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obſtaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorſus abſtrahimus, atque univerſam Terram undiquaque aquâ circumfuſam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejuſmodi obſervationibus, quæ in ampliſſimo Oceano apud exiguas inſulas ſunt inſtitutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progreſſivi, quo alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, neceſſe eſt ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui oppoſita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus conſequitur: unde Fluxus non ad tranſitus Lunæ per meridianum contingent, ſed aliquanto ſeriùs evenient, omnino uti experientia teſtatur.

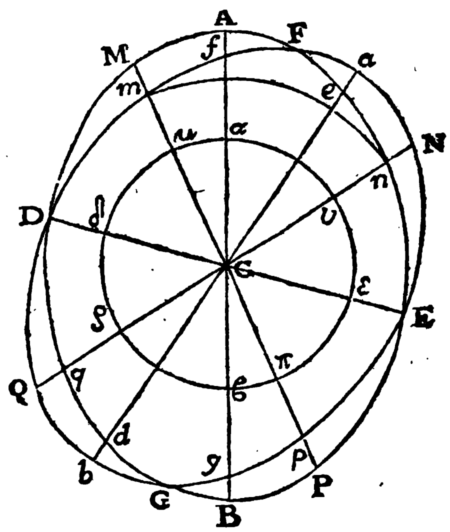
§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non poteſt, quia à motu aquæ ejuſque profunditate plurimum pendeat, prout etiam videmus in diverſis locis eam vehementer eſſe diverſam, atque aliis locis Fluxum contingere poſt Lunæ culminationem tribus horis nondum elapſis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem inſignis retardatio terrarum poſitioni eſt adſcribenda; interim tamen hinc ſufficienter conſtat motum Maris admodum poſſe impediri. Pro eodem verò loco ſatis luculenter perſpicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd ſi enim æſtus contingat infinitè parvus, dubium eſt nullum, quin is ſtato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc caſu ne locus quidem concedatur agendi: unde dilucidè ſequitur æſtus eò tardiùs advenire debere, quò

ſint majores. Atque hoc ipſum experientia confirmat, quâ conſtat æſtus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs inſequi tranſitum Lunæ per meridianum, quàm æſtus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs reſpectu Solis per meridianum tranſeat, quàm in ſyzygiis, æſtus tamen non 6 horis tardiùs, ſed tantum circiter 5 $\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim inſtitui poteſt ſimili modo, quo pro ſolâ vi Lunæ fecimus, ejuſmodi retardationem majorem in ſyzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamſi eum ob ſummas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen ſatis planum eſt præcipuam ejus cauſam in ipſâ naturâ aquæ eſſe quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à Flamſtedio maximè probatur, quippe qui obſervavit maximam retardationem non tam ſyzygiis luminarium, neque minimam quadraturis reſpondere, ſed iis tempeſtatibus, quibus æſtus ſoleant eſſe maximi & minimi, id quod demum poſt ſyzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à ſyzygiis ad quadraturas accelerationem, reſpectu tranſitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad ſyzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus poſt ſyzygias Fluxum tranſitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, ſtabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia ſequentibus æſtus Maris citiùs inſequi debet tranſitum Lunæ per meridianum, quàm in ipſis ſyzygiis, id quod etiam obſervationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & ſextum poſt ſyzygias retardatio reſpectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24′ retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æſtus ad actionem virium magis exactè ſequendam, quæ determinatio cùm duret uſque ad quadraturas, mirum non eſt, quòd æſtus tùm reſpectu Lunæ citiùs contingant, magiſque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progreſſu à quadraturis ad ſyzygias, quo tempore æſtus à Sole continuò retardantur; hocque neceſſariò efficitur, ut tandem in ipſis ſyzygiis Fluxus tardiùs inſequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æſtûs conjungendam eſſe putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, ſæpiſſimè enim in hâc quæſtione plures cauſæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem eſt id ipſum quod calculus ille ſummoperè implicatus & moleſtus quaſi per tranſennam oſtendere viſus eſt.

§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis certiùs & ſolidiùs judicare queamus, ipſum motum progreſſivum, quem aqua ab æſtu recipit, inveſtigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur nunc ſubſidat, neceſſe eſt ut priori caſu aqua aliunde affluat, poſteriori

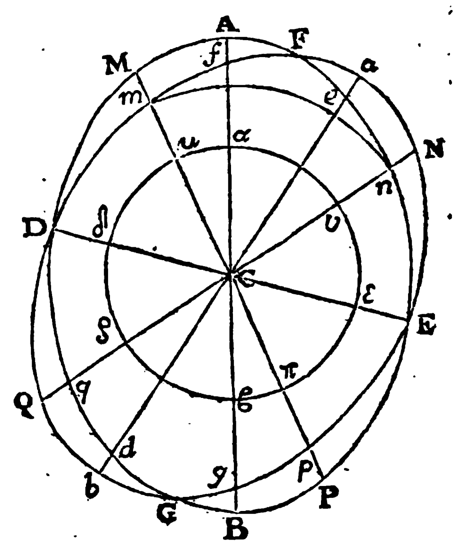
riori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræſentet igitur tempore quocunque figura *ADBE* ſtatum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis *A* & *B* aqua maximè ſit elevata, in locis verò mediis ab *A* & *B* æquidiſtantibus, maximè depreſſa. Poſt aliquod tempus transferatur æſtus ſummus ex *A* & *B* in *a* & *b*, ſitque *aDbE* figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore neceſſe eſt, ut à parte oceani *DF* defluxerit aquæ copia *FAMDmf*, in partem verò *FE* tantundem aquæ affluxerit, portio ſcilicet *FaNEne*: ſimili modo portio *EG* decrevit copiâ aquæ *EPBGgp*, portioque *GD* augmentum accepit *GbQDqd*. Si



nunc ponamus portionem *FMm* tranſire in locum *FNn*, ac portionem *EPp* in *ENn* deferri, ſatis clarè motum aquæ progreſſivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ ſummæ *A* fiat ab ortu in occaſum, aqua quæ circa *A* versùs orientem ſcilicet ab *M* ad *N* uſque eſt ſita, in occaſum movebitur; ſimiliterque ea quæ huic è diametro eſt oppoſita & ſpatium *PQ* occupat. Contrà verò reliqua aqua in *MQ* & *NP* contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim *M*, *N*, *P* & *Q* quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab *M* uſque ad *F* creſcet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut *A* ſint differentiis *Af* proportionalia: ab *F* verò uſque ad *N* celeritas decreſcere debet, & decrementum celeritatis in *e* erit ut *ae*; ſimilique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propoſitæ.

§. 93. Si hæc diligentiùs proſequamur ac punctum *a* ipſi *A* proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque *M* fore intervallum *Mm* ſinui dupli anguli *MCA* proportionale. Quare ſi anguli *ACM* ſinus ponatur $= x$, coſinus $= y$, ac celeritas quam aqua in *M* habet, versùs occaſum $= u$ erit du ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs *AM* ſit ut $\frac{dx}{g}$; nam figuram inſtar circuli conſiderari licet: erit du ut $2x\,dx$, atque u proportionale erit ipſi $2xx - 1$ ejuſmodi adjecta conſtante, ut ubi *Mm* eſt maximum, ibi celeritas evaneſcat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quo-

quocunque *M*, quam aqua versùs occidentem habebit, uti coſinus dupli anguli *MCA*. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè eſt elevata; huicque celeritati æqualis eſt ea, quâ aqua in locis ubi maximè eſt depreſſa, versùs orientem promovetur; ſi quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in ſphæra motus aliquantum diverſus erit, ſed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & *B* 45 grad. diſtant, ob coſinum dupli anguli = 0, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non ſolum motus aquæ progreſſivus cognoſcitur, quo alterna elevatio ac depreſſio producitur, ſed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficiſci poſſunt, perſpiciuntur. Ceterum quanquam ſectio noſtra plana *ADBE* æquatorem ſolum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis ſignificandum ſatis commodè adhiberi poteſt: quin etiam motus pro ſphæra hinc ſatis diſtinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per ſolidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.



§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquiſitioni inſiſtemus, quòd celeritas progreſſiva inſuper à profunditate maris pendeat. Quòd ſi enim ponamus *mn* jam eſſe Maris fundum, ita ut profunditas Maris in *M* major non eſſet quàm *Mm*; tum iſti aquæ tantus motus ineſſe deberet, quo ea, dum Fluxus ex *A* in *a* tranſit, ex ſitu *nFMm* in ſitum *mFNn* transferri poſſet. Hic autem motus quamvis ſit difformis & per totam maſſam inæquabilis, tamen ſi tota tranſlatio ſpectetur, totus motus ex ſpatio à centro gravitatis interea percurſo eſt æſtimandus. Hoc igitur caſu, quo Terræ ſuperficiem ſolidam ad *mn* uſque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis maſſæ *nFMm* ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum *A*, ex quo ejus celeritas tanta eſſe deberet, quâ tempore unius horæ ſpatium ferè 15 graduum percurrere poſſet, quæ celeritas undique foret enormis ac ſtupenda. At ſi Mari profunditatem majorem tribuamus, ſcilicet ad *μν* uſque, tum illa celeritas multò fiet minor, decreſcet namque in eadem ratione in qua profunditas creſcit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in ſe ſpectata inventa

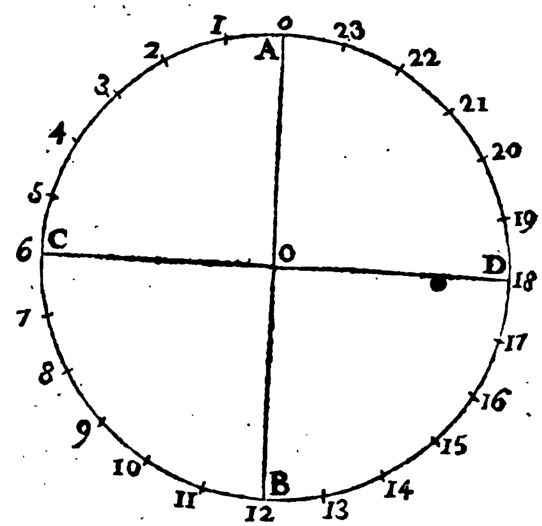
inventa eſt coſinui dupli anguli *MCA* proportionalis, eò fiat minor, quò majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compoſitam ex ratione directâ coſinûs dupli anguli *MCA* atque ex inverſâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, poſitâ ſcilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diverſas profunditates patet, ſi cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò aſcendit modò deſcendit, qui jam ſuprà eſt definitus. Primò enim manifeſtum eſt, ſi Mare ubique eâdem celeritate, (poſitâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem manſuram eſſe eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam eſſe. At, ſi aqua motu inæquabili progrediatur, manifeſtum eſt iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgeſcere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ creſcat, ibi aquam ſubſidere oportere. Quare cùm elevatio & depreſſio Maris à motûs progreſſivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu aſcenſûs & deſcenſûs cognito. Cùm enim celeritas aſcenſûs ſit decremento celeritatis progreſſivæ æqualis, celeritas deſcenſûs verò incremento celeritatis progreſſivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem ſuprà §. 84, ſi Luna à meridiano versùs occaſum jam receſſit angulo z, hoc eſt cùm regio propoſita ab eâ, in quâ aqua eſt ſumma, versùs orientem ſecundùm longitudinem diſtet angulo z, fore celeritatem quâ aqua aſcendit $= \frac{-6gpqPQ\, \text{ſin.}\, z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\, \text{ſin.}\, 2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati aſcenſûs proportionale ſit decrementum motûs horizontalis, erit ipſa celeritas horizontalis versùs occaſum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{6gpqPQ\, \text{coſ.}\, z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2\, \text{coſ.}\, 2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè ſumtum & per dz diviſum dat ipſam celeritatem aſcenſûs. Quoniam autem hæc expreſſio ſimul exhibet ſpatium, quo Mare ſupra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi ſuprà libellam, & inversè profunditati Maris, quæ eſt vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo inſufficienti ſuperſedere potuiſſemus.

§. 96. Conſideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu uſque ad Refluxum, indeque ad ſequentem Fluxum, idque ſub æquatore, dum Luna pariter in æquatore verſatur: erit itaque celeritas aſcenſûs

 ut

ut − ſin. 2z, celeritas autem horizontalis verſùs occaſum ut 15 coſ. 2z + 1 poſito $g = \frac{1}{10}$, cui expreſſioni ſimul altitudo aquæ ſupra libellam eſt proportionalis. Quòd ſi ergo ſuperficies Terræ ſeu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis *A* & *B* aqua ſit maximè elevata, in *C* & *D* verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. deſignabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad ſingulas horas poſt Fluxum elapſas.



Hora poſt Fluxum.	*Celeritas Maris verticalis.*		*Celeritas Maris horizontalis.*	
0	0,000	deſcendit.	1,067	in occaſum.
1	0,500	deſcendit.	0,927	in occaſum.
2	0,860	deſcendit.	0,567	in occaſum.
3	1,000	deſcendit.	0,067	in occaſum.
4	0,860	deſcendit.	0,432	in ortum.
5	0,500	deſcendit.	0,792	in ortum.
6	0,000	aſcendit.	0,932	in ortum.
7	0,500	aſcendit.	0,792	in ortum.
8	0,860	aſcendit.	0,432	in ortum.
9	1,000	aſcendit.	0,067	in occaſum.
10	0,860	aſcendit.	0,567	in occaſum.
11	0,500	aſcendit.	0,927	in occaſum.
12	0,000	deſcendit.	1,067	in occaſum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè ſi Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox aſcenſum citiùs abſolvi mox verò deſcenſum; totus autem motus faciliùs ex ipſis formulis datis cognoſcetur. Hìc denique profunditatem ubique eandem poſuimus; quòd ſi enim eſſet diverſa;

la, motus horizontalis ſimul rationem inverſam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æſtus iis ipſis temporibus evenire poſſe, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æſtus tum, cùm vis à Luna & Sole nata eſt debiliſſima, ſed aliquanto tardiùs. Æſtûs enim magnitudo non ſolum à quantitate virium ſollicitantium pendet, uti id uſu veniret, ſi aqua inertiâ careret, ſed inſuper à motu jam antè concepto. Quòd ſi enim antè Mare omnino quieviſſet, tum primus certè æſtus oriundus admodum futurus eſſet exilis, etiamſi vires ſollicitantes eſſent maximæ; ſequentes verò æſtus continuò creſcerent, donec tandem poſt tempus infinitum magnitudinem aſſignatam obtinerent, ſi quidem vires ſollicitantes idem robur perpetuò ſervarent: atque hoc idem evenire debet, ſi æſtus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus ſollicitantibus convenit. Quare cùm æſtus novilunia ac plenilunia præcedentes ſint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò ſubitò totam ſuam quantitatem conſequentur, atque hanc ob rem æſtus etiamnum poſt ſyzygias augmenta accipient, donec ob tum ſecutura virium decrementa, æſtus iterum decreſcere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipſi æſtus quàm incrementa eorum cenſenda ſunt maxima, quatenus ſcilicet æſtus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui ſequi deberent; ex quo manifeſtum eſt non illos æſtus, qui in ipſis ſyzygiis luminarium contingunt, eſſe maximos, ſed ſequentes eſſe majores. Hocque idem intelligendum eſt de æſtibus minimis, qui non in ipſas quadraturas incidunt, ſed tardiùs ſequuntur: unde ratio luculenter perſpicitur, cur æſtus tàm maximi quàm minimi non ipſis ſyzygiarum & quadraturarum tempeſtatibus reſpondeant, ſed ſeriùs obſerventur, tertii ſcilicet demum vel quarti poſt hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æſtum Maris obſervatorum.

§. 98. IN præcedentibus capitibus fuſiùs expoſuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam eſt directa, altera versùs Solem, produci debent; eoſque cùm per calculum analyticum, tùm per ſolida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum exiſtentiâ dubitari omnino non liceat, ſi quidem illæ vires admittantur. At verò iſtas vires in mundo exiſtere non ſolum per alia phæ-

nomena evidentiſſimè probavimus, ſed etiam earum cauſam phyſicam aſſignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam ſit conſtitutus, poſuimus, quippe quæ eſt unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in ſuis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipſa phænomena internam vorticum ſtructuram & indolem commonſtrarunt; ob eaque vortices ita comparatos eſſe ſtatuimus, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò aſſumſerimus, ſi effectus ex iis oriundi cum phænomenis æſtûs Maris conveniant, certiſſimè nobis perſuadere poterimus, in aſſignatis viribus veram æſtûs Maris cauſam contineri; abſonumque omninò fore, ſi cauſam æſtûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite conſtituimus omnes effectus, qui in ſuperioribus capitibus ſparſim ſunt eruti, conjunctim & ordine proponere, ſummumque eorum conſenſum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terriſque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejuſmodi anomalias æſtûs Maris, quæ evidentiſſimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujuſmodi ſunt æſtus vel vehementer enormes vel vix ſenſibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel inſignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis ſequens caput ultimum deſtinavimus: ita in hoc capite tantum ea æſtûs Maris phænomena explicanda ſuſcipimus, quæ in portubus ampliſſimum Oceanum reſpicientibus vel inſulis obſervari ſolent in Oceano ſitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus eſſe obſervatur, diſtinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres claſſes revocari debere. Ad primam ſcilicet claſſem referenda ſunt phænomena, quæ in uno æſtu in ſe ſpectato conſpiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodiſſimè ſub varietatibus diurnis comprehendi poſſunt, quâtenus ea ſe offerunt obſervatori, qui per integrum tantum diem obſervationes inſtituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda claſſis complectitur varietates menſtruas, quæ ſeſe obſervatori per integrum menſem æſtum Maris contemplanti offerunt, quorſum pertinent æſtus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique claſſis comprehendit varietates annuas ac pluſquam annuas, quæ ſequuntur vel varias Lunæ à Terra diſtantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuſcujuſque claſſis recenſebimus, atque quomodo ſingula cum theoriâ traditâ congruant, oſtendemus. Hìc verò, ut jam eſt monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire poſſunt, animum prorſus abſtinemus, eas ſequenti capiti reſervantes. Multò minùs

tùs verò ad ventum hìc reſpicimus, quo æſtus Maris cùm ratione magnitudinis, tùm temporis plurimum affici obſervatur; ſed tantùm ejuſmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè ſint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam claſſem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc conſiſtit, quòd ubique in ampliſſimo Oceano quotidie bini Maris Fluxus ſeu elevationes, binique Refluxus ſeu depreſſiones obſerventur, atque tempus inter binos Fluxus ſucceſſivos circiter 12. h. 24′. deprehendatur. Huic verò Phænomeno, ſi ulli alii, per theoriam noſtram pleniſſimè eſt ſatisfactum, ubi oſtendimus maximam aquæ elevationem deberi tranſitui Lunæ per meridianum tam ſupra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejuſdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12. hor. 24′, neceſſariò ſequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à ſe invicem diſſitos oriri debere, quemadmodum hoc ipſum calculus tam pro hypotheſi aquæ inertiâ carentis, quàm admiſſâ inertiâ, clariſſimè indicavit. Simul autem ex iiſdem determinationibus intelligitur ſub ipſis polis nullum omnino æſtum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt; quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ conſequentia theoriæ, etſi obſervationibus nondum ſatis eſt comprobata, tamen quia ex iiſdem principiis ſequitur quæ inſtitutis obſervationibus ſatisfaciant, nulli ampliùs dubio ſubjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non ſatis exactè medium interjacere obſervatur inter Fluxuum momenta, ſed mox priori mox poſteriori eſt propius, quod Phænomenum cum noſtrâ theoriâ apprimè congruit; oſtendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus reſpondere, niſi vel locus ſitus ſit ſub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, ſed modò priori modò poſteriori Fluxui eſſe propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus poſt tranſitum Lunæ per meridianum venire obſervetur, idque aliquot horarum ſpatio, in portubus versùs apertum Oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum Oceano non liberrimè communicantur, ſed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æſtus advenit, quæ retardatio ſi ferè ad 12 horas aſcendit, in cauſa eſſe ſolet, ut hujuſmodi in locis Fluxus ante tranſitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri poſſet Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè conſideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum ſequatur, uti apparebit ſi æſtuum momenta, quæ ſucceſſivè ad littora Britanniæ minoris

& Normanniæ obſervantur continuóque magis retardantur, attentiùs inſpiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non ſolum demtâ inertiâ, ſed etiam eâ poſitâ, ſi tantum aquæ motus verticalis ſpectetur; at ſi etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè oſtendimus Fluxum perpetuò retardari, ac demum poſt Lunæ tranſitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm ſit admodum variabile pluribuſque circumſtantiis ſubjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis ſeſe in ſitum æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n eſſe circiter 5 vel 6, manifeſtum eſt tanto etiam tempore opus eſſe, quo aqua eum ſitum quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel $2\frac{1}{2}$ hor. poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum obſervationibus in Oceano libero inſtitutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis cauſam meritò aſſignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon ſuppeditat æſtûs magnitudo, quæ autem tam diverſis locis quàm diverſis tempeſtatibus maximè eſt mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æſtubus, qui nonnullis in portubus obſervari ſolent, reliqui cum noſtrâ Theoriâ egregiè conſentiunt; inertiâ enim ſublatâ, invenimus ſub æquatore maximum æſtum fore per ſpatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipſius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate Oceani ſeſe propriâ ſuâ vi in ſtatum æquilibrii reſtituendi pendet; ex quo ſub æquatore ſpatium per quod maximus æſtus agitatur ad 8., 12, 16 & plures pedes exſurgere poteſt. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æſtûs tenere rationem duplicatam coſinuum elevationis poli, unde ſub elevatione poli 45°., magnitudo æſtûs circiter duplo erit minor quàm ſub ipſo æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æſtus multò minor quàm ad littora; cujus diſcriminis cauſa in ſequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æſtus adhuc minor obſervatur, quàm hæc regula requirit; id autem oſtendetur à non ſatis amplâ Oceani extenſione ſecundùm longitudinem proficiſci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui verſùs Occidentem littoribus Americæ; verſùs Orientem verò littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non eſt ſatis magna, ut integram æſtûs quantitatem ſuſcipere queat.

§. 103.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menſtruas reſpicit, atque oſtendit æſtus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejuſdem menſis eſſe maximos, æſtus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ noſtrâ ad amuſſim quadrat. Cùm enim æſtus Maris non ſolum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, ſed etiam à vi Solem ſpectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor eſt vi Lunæ, manifeſtum eſt æſtum Maris maximum eſſe debere, ſi ambæ vires inter ſe conſpirent, atque aquam ſimul vel elevent vel deprimant, id quod accidere oſtendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde ſimili modo, quoniam iſtæ vires inter ſe maximè diſcrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Lunâ maximè elevatur, ſimul à Sole maximè deprimitur ac viciſſim, perſpicuum eſt iiſdem temporibus æſtum minimum eſſe debere. Præterea verò ipſum diſcrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æſtus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis inveſtigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ abſolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex obſervationibus Briſtolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ inſtitutis, concluſionibus mirificè inter ſe congruentibus: qualis conſenſus profectò expectari non poſſet, ſi theoria veritati non eſſet conſentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujuſmodi ſunt Galilæi, Walliſii atque Carteſii, qui cauſam in preſſione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè ſatisfaciunt, ſed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc conſiſtat, quòd unius menſis intervallo maximi æſtus non ſint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè inſequuntur; ſed ſequentes tertii ſcilicet circiter vel quarti, ſimilique intervallo æſtus minimi demum poſt quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fuſiùs eſt expoſita, ubi oſtendimus, cùm æſtus ante ſyzygias incidentes eſſent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non ſubitò æſtum maximum producere valere, ſed tantùm Mare ad eum ſtatum ſolicitare. Cùm igitur poſt ſyzygias vis æſtum efficiens ſenſibiliter non decreſcat, æſtus etiamnum poſt hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum poſt ſyzygias fiet maximus; ſimiliſque eſt ratio diminutionis æſtuum, quæ etiamnum poſt quadraturas contingere debet, ita ut æſtus minimi demum poſt quadraturas eveniant. Hujuſmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo exiſtentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob ſimilem enim rationem ſingulis diebus maximum calorem non in ipſo meridie ſentimus, etiamſi hoc tempore vis Solis calefaciens ſine dubio ſit maxima, ſed demum aliquot horis poſt meridiem, atque propter eandem cauſam neque ſolſtitii æſtivi momento maximus calor annuus ſentitur, neque tempore ſolſtitii hyberni frigus ſummum, ſed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105.

§. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore ſyzygiarum multo ſtrictiùs ordinem tenere obſervantur, quàm circa quadraturas. Hìc verò ante omnia animadvertendum eſt præcipuam ſenſibilem anomaliam in momentis æſtuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore ſolari atque à vero meridie ſeu tranſitu Solis per meridianum ſoleant computari, cùm ea potiùs à tranſitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd ſi autem ad has obſervationes tempus lunare à tranſitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evaneſcent, hoc verò multo magis in fluxubus circa ſyzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum tranſit, Sol non ſemper in horizonte verſatur, ſed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, neceſſe eſt ut illo caſu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod diſcrimen cùm partim ab elevatione poli partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumſtantiarum ratione ſatis propè definiri poteſt. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc ſola correctio ſeu reductio ad tranſitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorſum ſpectat regula à celeb. Caſſino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium ſeu novilunium vel ante meridiem vel poſt incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo ſubtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ eſt petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia ſupereſſe deprehenditur, cujus autem ratio ex noſtrâ theoriâ ſponte ſequitur. Quando enim ſyzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum tranſit, Sol jam ante eum eſt tranſgreſſus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo neceſſe eſt ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula ſola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ obſervatorum, Mem. 1710. inſertis, manifeſtò conſpicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs adveniſſe obſervatur, quàm calculus Caſſinianus indicabat; contrà verò tardiùs ſi ſyzygiæ demum pluribus horis poſt meridiem inciderint, cujus majoris retardationis cauſa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente eſt quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon ſuppeditat diverſa retardatio Fluxuum in ſyzygiis luminarium & quadraturis reſpectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs ſcilicet ubique locorum Fluxus, qui in ſyzygiis contingunt, inſequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex cauſa poteſt aſſignari, quarum prima à ſolâ quantitate æſtuum petitur, quia enim æſtus ſyzygiarum multò ſunt majores quàm æſtus quadraturarum, conſentaneum

vide-

videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò cauſa quæ hoc Phænomenon multò diſtinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, noſtræ theoriæ omnino eſt propria, priorique longè eſt præferenda. Ponamus enim t eſſe tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus poſt appulſum Lunæ ad meridianum venire ſolet; ſequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano verſatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè uſque ad quadraturas, neceſſe eſt ut his temporibus Fluxus multò citiùs poſt culminationem Lunæ ſequantur, viribuſque ſollicitantibus magis obtemperent, utì hoc fuſiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t-\theta$. Poſt quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo uſque ad ſequentem ſyzygiam intervallum $t-\theta$ iterum ad t uſque augebitur. Hujuſque Phænomeni ſolius explicatio ſufficere poſſet ad veritatem theoriæ noſtræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu ſit inſuperabile; neque à nemine adhuc ſaltem probabilis ejus cauſa ſit aſſignata.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum ſeſe immediatè inſequentium, quorum alter tranſitui Lunæ ſuperiori per meridianum reſpondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè obſervatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cum Lunæ declinatio eſt maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamſi in ipſo æquatore verſetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quando ſuper horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at diſcrimen ſub æquatore tam eſt exiguum, ut vix in ſenſus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ ſeu diſtantiâ ab horizonte continetur; hinc enim ſequitur quò major fuerit differentia inter diſtantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum tranſit tum ſuper horizonte tum ſub horizonte, eò majorem eſſe debere differentiam inter binos Fluxus ſucceſſivos, ex quo perſpicuum eſt iſtam differentiam versùs polos continuò creſcere debere, ſi quidem Luna habeat declinationem. Quòd ſi ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus ſeptentrionalibus Fluxus erit major qui tranſitum Lunæ per meridianum ſuperiorem ſequitur, alter verò ſequens, qui tranſitui inferiori reſpondet, minor. Contrà autem ſi Lunæ declinatio fuerit auſtralis, appulſui Lunæ ad meridianum ſuperiori Fluxus ſuccedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamſtedius obſervavit diligenter, nullumque eſt dubium, quin ea per copioſiſſimas obſervationes, quas Academia Celeberrima Regia Pariſina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè eſt inſpicienda, quoniam aliquibus in

portibus tantopere retardantur, ut ſequentibus Lunæ tranſitibus per meridianum ſint propiores, quàm illi, cui ſuam originem debent; ita Dunkerquæ circa ſyzygias Fluxus circiter meridie obſervari ſolet, neque verò illi ipſi tranſitui Lunæ per meridianum eſt tribuendus qui eodem tempore fit, ſed præcedenti, prouti ſucceſſiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentiſſimè teſtantur. Quare ſi verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujuſmodi obſervationes perluſtrare voluerit, is quemque Fluxum non cum tranſitu Lunæ per meridianum proximo comparet, ſed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena eſſet deprehenſurus.

§. 108. Commodus hîc nobis præbetur locus explicandi tranſitum à binis æſtubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares ſitis eveniunt, ad ſingulos æſtus, qui ſecùndùm theoriam noſtram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria noſtra monſtrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus obſervari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, tranſitio ſubitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri poſſet. Sed quia ſi Fluxus bini ſucceſſivi inter ſe ſunt inæquales, Refluxus aquæ ſeu maxima depreſſio Fluxui minori eſt vicinior, bini æſtus quoque ſucceſſivi ratione temporis inter ſe erunt inæquales, ſi quidem voce æſtûs intelligamus motum aquæ à ſummâ elevatione ad imam depreſſionem uſque, ac viciſſim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æſtus ſucceſſivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò ſimul ubique abſolventur tempore 12 horarum, cum 24′ circiter: quòd ſi itaque in eas regiones uſque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel ſuper horizonte vel ſub horizonte meridianum attingit, æſtus minor omnino evaneſcet, ſoluſque major ſupererit, qui tempus 12 h. 24′. adimplebit. Ex quibus perſpicuum eſt; ſi Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æſtuum ſucceſſivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evaneſcere debere, quod cùm evenit, bini æſtus in unum coaleſcunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æſtûs Maris menſtruis, pervenimus ad anomalias annuas vel pluſquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon deſumimus ex variatione æſtûs, quæ à diverſis Lunæ à Terra diſtantiis proficiſcitur. Obſervantur enim æſtus ubique majores ceteris paribus, in iiſdem ſcilicet luminarium aſpectibus iiſdemque declinationibus, ſi Luna in ſuo perigæo verſetur, minores verò, Lunâ in apogæo exiſtente. Egregiè autem hæc conveniunt cum noſtrâ theoriâ, quâ demonſtravimus Lunæ vires ad Mare movendum decreſcere in triplicatâ ratione diſtantiarum Lunæ à Terra: quòd ſi igitur Luna verſetur in perigæo Fluxus debebunt eſſe majores, quàm ſi Luna apogæum occupat. Præterea etiam

tabula

tabula quam Celeb. Caſſini in Mem. 1713. pro diverſis Lunæ à Terrâ diſtantiis ex plurimis obſervationibus Breſtiæ inſtitutis collegit, ſatis accuratè cum theoriâ noſtrâ conſpirat, etiamſi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm iſta ratio requireret, tamen diſcrimen valde eſt exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum ſuum effectum non tam citò conſequi poſſe, quem conſequeretur, ſi Luna perpetuò in perigæo verſaretur. Aliter autem Luna apogæa eſt comparata, quæ ad diminuendum æſtum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipſum ad diminutionem æſtûs ſit proclive, ſine ullâ reſiſtentiâ Luna in apogæo conſtituta effectum ſuum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. Caſſini ſe obſervaſſe teſtatur, ſimilem differentiam etſi multò minorem à variis Solis à Terrâ diſtantiis produci, id quod noſtræ theoriæ non ſolum eſt conſentaneum, ſed inde etiam ipſa quantitas hujus differentiæ poteſt definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon ſeſe nobis contemplandum offert, quo vulgò ſtatui ſolet æſtus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris eſſe majores, etiamſi obſervationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æſtus cæteris paribus comparatus eſſe debeat pro diverſis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex noſtrâ theoriâ (§. 87.) æſtus dum Luna in æquatore verſatur, maximos eſſe non poſſe, niſi in locis ſub ipſo æquatore ſitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æſtus reſpondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æſtus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, ſi quidem g ponatur $= \frac{2}{25}$; at poſito $g = \frac{1}{10}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æſtum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum obſervationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia inſtitutis, quibus conſtat maximos ſyzygiarum æſtus menſibus Novembri & Februario accidere ſolere, quibus temporibus Luna ferè aſſignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore verſanti maximi æſtus adſcribi ſolet, anſam præbuiſſe videtur, eſt modus æſtuum quantitates definiendi peculiaris ac ſatis perverſus; cùm enim crederent plerique obſervatores cauſis alienis tribuendam eſſe inæqualitatem, quæ inter binos æſtus ſucceſſivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire ſunt arbitrari, ſi ſumerent medium inter binos Fluxus ſucceſſivos. Quòd ſi autem hoc modo quique æſtus æſtimentur, tum utique maximi æſtus in æquinoctia incidere obſervabuntur, id quod etiam noſtræ theoriæ maximè eſt conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim poſitis ſinu elevationis poli $= P$, coſinu $= p$, ſinu declinationis Lunæ $= Q$, coſinu $= q$, major æſtus fiat per ſpatium $\frac{3g}{b(1-8g)}\left(pq+\frac{PQ(1-8g)^2}{1-2g}\right)$; minor verò per ſpatium =

$\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, §. 86.) erit per hunc æſtum Maris menſurandi modum quantitas æſtûs $= \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right) = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expreſſione perſpicitur maximos æſtus ubique, ſi quidem modo recenſito menſurentur, Lunæ in ipſo æquatore degenti reſpondere, niſi ſit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2} > p^2$, hoc eſt niſi tangens elevationis poli major ſit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his ſcilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æſtus producet. At ſi ponatur $g = \frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; ſin autem ponatur $g = \frac{1}{58}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at poſito $g = \frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis obſervationes inſtitui non ſoleant, ſatis tutò affirmare licet, maximos æſtus menſtruos accidere circa æquinoctia, ſi quidem quantitas æſtûs quotidie menſuretur per medium arithmeticum inter ſpatia, quæ duo æſtus ſucceſſivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ noſtrâ ſit ſentiendum, niſi eam veram & genuinam æſtûs Maris cauſam, qualis ab Illuſtriſſima Academia Regia in propoſitâ quæſtione deſideratur, in ſe complecti, non videmus? Non ſolum enim omnia Phænomena, quæ in æſtu Maris obſervantur, clarè & diſtinctè explicavimus, ſed etiam exiſtentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adſcribimus evidentiſſimè demonſtravimus; ex quo efficitur cauſam à nobis aſſignatam, non tantum omnibus Phænomenis ſatisfacere, ſed etiam eſſe unicam quæ cum verâ conſiſtere queat. Quòd ſi enim quiſpiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare poſſet, etiamſi hoc fieri poſſe minimè concedamus, ejus certè explicatio ſubitò concideret & everteretur à viribus noſtræ theoriæ, quas aliunde in mundo exiſtere abundè conſtat; quoniam ab illis viribus imaginariis hiſque realibus conjunctim effectus duplicatus conſequi deberet, quem experientia averſatur. Nunc igitur nobis ſummo jure aſſerere poſſe videmur, veram æſtûs Maris cauſam in duobus vorticibus eſſe poſitam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus ſit indolis, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris utriuſque vorticis: quæ proprietas obtinetur, ſi celeritas materiæ ſubtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum ſunt excogitati, ſed ille qui Solem circumdat eſt is ipſe, qui omnes planetas in ſuis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etſi ejus vis niſi in æſtu Maris non ſentitur, tamen ſine ullâ hæſitatione admitti poteſt, cùm certò conſtet

Terram; Jovem ac Saturnum ſimilibus vorticibus eſſe cinctos, unde ejuſmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari poſſe videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamſi in illis veram æſtûs Maris cauſam ponamus; hoc autem de induſtriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties ſit tractatum ac ferè exhauſtum; neque nobis perſuadere poſſumus, ſi hâc occaſione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum à quoquam eſt factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

CAPUT OCTAVUM.

De Æſtûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam noſtræ diſquiſitionis partem, quæ præcipua eſt, in quâ Theoriam expoſitam ad ſtatum telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua iſta diſquiſitio facilior redderetur, ab omnibus circumſtantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi poſſent, cogitationem abſtraximus. Primò ſcilicet non ſolum totam Terram ex aquâ conflatam poſuimus, ſed etiam inertiam aquæ mente ſuſtulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ ſupereſſent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus; verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfuſam aſſumſimus, ſeu etiamnum anomalias à Terris negleximus. Nunc itaque noſtra theoria eò eſt perducta, ut nihil ampliùs adjicere neceſſe foret, ſi quidem æſtus Maris à Terris littoribuſque ſenſibiliter non afficeretur; niſi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perſpecto facilè adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput deſtinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam ſingularium, quorum cauſa non tam in ipſâ aquâ viribuſque eam ſollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribuſque eſt quærenda: hac enim parte abſolutâ nihil ampliùs reſtare videtur, quod vel ad Theoriæ noſtræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem deſiderari queat. Quamvis enim Illuſtriſſima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæſtiones de eodem in poſterum proponere conſtituiſſet, tamen quia hoc tempore vera cauſa phyſica deſideratur, veritatem noſtræ theoriæ non ſatis confirmari arbitramur, niſi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè oſtenderemus, cùm ſi vel

unicum Phænomenon refragaretur, eo ipſo tota theoria ſubverteretur; quam ob cauſam prolixitatem noſtræ tractationis, atque tranſgreſſionem limitum præſcriptorum nobis ſine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perſpicuum eſt motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpoſitam non ſolum perturbari, verùm etiam quandoque prorſus impediri debere. Suprà enim oſtendimus, ſi tota Terra aquâ eſſet circumfuſa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd ſi ergo Oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipſo curſus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum conſequi non poterunt, niſi aqua ab Occidente afferatur: ſic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab Occidente eò deferatur neceſſe eſt, ab [illegible] ſcilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Aſiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per ſe determinant, ſed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum ſeligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iſte motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur neceſſe eſt. Hinc igitur perſpectâ poſitione littorum cujuſvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorſumque in Refluxu decedere debeat, ſi modò elevationes & depreſſiones aquæ per totum Mare attentè conſiderentur: tota enim hæc quæſtio pertinebit ad hydroſtaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, niſi affluxus ab occidente fiat copioſus, ad littora quæ versùs occidentem reſpiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam ſunt diſpoſita, aquæ curſus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priuſquam eò pertingat, omnino uti inſpectio mapparum docebit. Quoniam verò iſte aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, neceſſe eſt, ut Fluxus ad littora magis ad orientem ſita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perſpicua eſt in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad oſtia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs Oceanum ampliſſimum patent, tempore plenilu-

niorum

niorum ac noviluniorum Fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis cenſeri poteſt, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire obſervantur. Sic ad Portum S. Malo tempore ſyzygiarum Fluxus demum horâ ſextâ ſequitur, ad oſtia verò Sequanæ uſque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Oſtendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innoteſcit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ ſpatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam abſolvere debet uſque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ obſervari ſolet. Atque ſimili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum ſine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æſtûs Maris ad littora attinet; facilè intelligitur æſtum Maris ad littora majorem eſſe debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapſu ſolo jam intumeſcentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat Oceano, ubi maxima eſt profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadoſa vehementer inturgeſcet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum ſufficeret ad ſpatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iſte aquæ affluxus in ſinibus vadoſis multò adhuc magis increſcere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulſa ad latera diffluere nequit, ſi quidem ſinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non ſolum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, ſed etiam cur Briſtolii tam enormis Fluxus circa ſyzygias luminarium obſervetur; cùm enim in hâc regione littus ſit valdè ſinuoſum ac vadoſum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob ſinuoſitatem tam citò diffluere poteſt. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconſuetorum æſtuum, qui paſſim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm conſideratio littorum & Fluxûs aquæ eò ſponte quaſi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex Oceano Atlantico; quàm Refluxus per fretum Galliam ab Anglia dirimens, ingenti fiat celerita-

(†) Ita legitur in exemplari Pariſino, procul dubio mendosè, ſed locum reſtituere non ſumus auſi; ab oſtio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur via rectiſſima, quæ horis 7 à fluxu percurruntur qui ideo 70 milliaria ſingulis horis ad minimum emetiretur, unde 80 milliaria pro 8 milliaribus ſcribenda conjectamur.

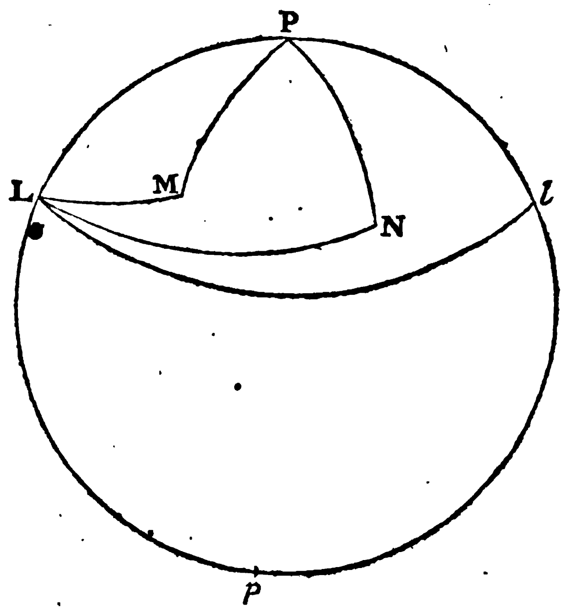
leritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab iſto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in Oceanò Germanico ſenſibiliter mutari nequit. Atque hanc ob cauſam ſtatui oportet, in hoc Mari æſtum proficiſci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum Oceano Atlantico multò major patet; quam ſententiam magnopere confirmat ingens æſtuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia obſervata, ad Oſtia ſcilicet Thamiſis pertingit Fluxus elapſis jam duodecim horis poſt tranſitum Lunæ per meridianum, atque Londinum uſque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod Phænomenon conſiſtere non poſſet ſi aqua per fretum Gallicum ſolùm moveretur, cùm jam in ipſo freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non poteſt quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per fretum Gallicum æſtum quoadmmodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter ſe conſpirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æſtum Maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari poſſe, cùm intervallo ſex horarum per freta Herculea & Oreſundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde reffluere, ut ſenſibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in iſtiuſmodi maribus quæ à vaſto Oceano tantum anguſtis fretis ſeparantur, æſtus omnino nullus contingere poteſt, niſi forte talia maria Terris incluſa ipſa tam ſint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æſtum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem æſtum, quorum alter, qui quidem longè eſt minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter ſingularem littorum quorumdam ſitum mirabilia Phænomena in æſtu Maris evenire poſſunt. Quòd ſi enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æſtus in id duplici viâ vel ex eodem Oceano, vel ex diverſis communicetur, ratione temporis, quo bini iſti æſtus adveniunt inſignes diſcrepantiæ oriri poterunt. Nam ſi per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo ſimul Refluxus congruant, æſtus multo majores exiſtere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æſtus omnino deſtruetur ſi quidem per utramque viam aqua æquali vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non ſufficit ambæ viæ ſint æquales, ſed etiam requiritur ut bini æſtus ſucceſſivi ſint æquales, id quod evenit ſi Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit poſitum. Quòd ſi autem eadem duplici communicatione poſitâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore ſit motum; tum ob inæ-

inæqualitatem binorum æſtuum ſeſe inſequentium, Fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, ſuperabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore ſingulis diebus non bini Fluxus, ſed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æſtûs illius ſingularis Tunquini obſervati, ubi ſi Luna in æquatore verſatur nullus æſtus deprehenditur, ſin autem Luna habeat declinationem unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem noſtræque theoriæ conformem indicabimus cauſam.

§. 118. Hactenus æſtum Maris, quemadmodum in ampliſſimo Oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum ſitu cùm ratione quantitatis tùm retardationis diverſimodè turbetur, ſumus contemplati, neque neceſſe eſſe duximus ventorum Mariſque curſuum propriorum rationem habere, cùm ſatis pronum ſit perſpicere, quomodo his rebus æſtus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Supereſt igitur ut exponamus, quomodo in ſatis amplo tractu Maris, qui ab Oceano vel omnino eſt ſejunctus, vel per anguſtum tantum canalem conjunctus, peculiaris æſtus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perſpicuum enim eſt ſi talis tractus ſecundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æſtum pari modo generari debere, ac in ampliſſimo Oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extenſio tanta eſt, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu ſimul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, neceſſe eſt etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, ſi iſte tractus omnino non eſſet terminatus. At ſi iſte tractus tam fuerit parvus ut ſingulæ partes æqualibus fere viribus ſimul vel attollantur vel deprimantur, nulla ſenſibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit niſi in alio ſubſidat & contrà, ſi quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conſervetur. Atque hæc eſt ratio ut in Mari Baltico, Caſpio, Nigro, aliiſque minoribus lacubus nullus omnino æſtus deprehendatur.

§. 119. Quòd ſi autem iſtiuſmodi Maris tractus tantum ſpatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus ſenſibiliter differant, tum neceſſe eſt ut non ſolum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, ſed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta ſit, quanta in aperto Oceano eidem virium differentiæ reſpondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diverſis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, ſolam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam effectu Lunæ cognito facile eſt Solis effectum æſtimando vel adjicere vel auferre.



Repræſentet ergo $PLpl$ ſuperficiem Terræ cujus poli ſint P & p, atque M & N ſint duo termini in eodem Maris tractu aſſumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, ſit inveſtigandum. Repræſentet porro Ll parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore; ſitque Luna in L; atque exprimet angulus LPM tempus, quod poſt Lunæ tranſitum per meridianum termini M eſt præterlapſum, angulus verò LPN tempus poſt tranſitum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis PM & PN, erit arcus PM complementum latitudinis loci M, arcus PN verò loci N; angulus verò MPN dabit differentiam longitudinis locorum M & N; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

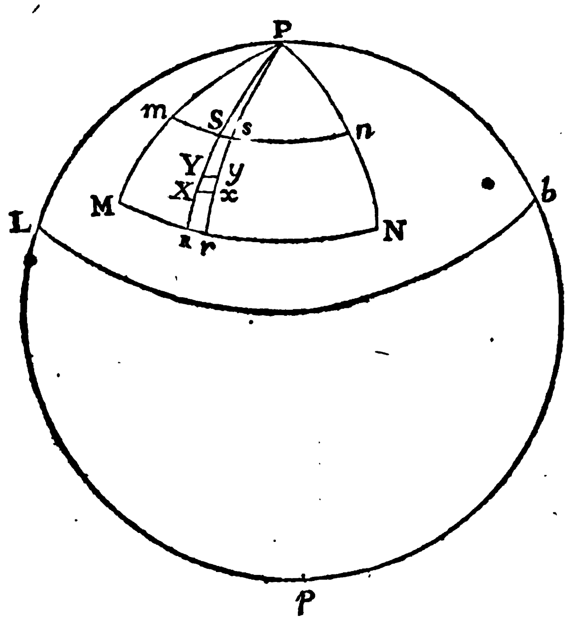
§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M & N circuli maximi LM & LN, exhibebuntque iſti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M & N ſupra horizontem elevata conſpicitur. Ponatur arcûs PL ſinus $= q$, coſinus $= Q$, erit Q ſinus declinationis borealis Lunæ, ſi quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs PM ſinus $= p$, coſinus $= P$, erit P ſinus elevationis poli pro loco M; ſimilique modo ſit arcûs PN ſinus $= r$ & coſinus $= R$, ita ut R ſit ſinus elevationis poli loci N: denique ſit anguli MPN ſinus $= M$ & coſinus $= m$, anguli verò LPM ſinus $= T$, coſinus $= t$; unde erit anguli LPN coſinus $= mt - MT$.

Ex

Ex his per trigonometriam ſphæricam reperietur ſinus altitudinis Lunæ ſuprà horizontem loci M ſeu coſinus arcûs $LM = tpq + QP$: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ ſinus $= (mt - MT)\, qr + QR$. Quare ſi, ut ſuprà, vis abſoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & diſtantia Lunæ à Terra $= b$, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet $= \frac{L(3(tpq + PQ)^2 - 1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in N elevari deberet $= \frac{L(3((mt - MT)qr + QR)^2 - 1)}{2b^3}$, utroque caſu ſupra libellam naturalem. Si ergo illa expreſſio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq + PQ)^2 - ((mt - MT)qr + QR)^2)$, hæcque expreſſio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs conſiſtat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè Phænomena hujuſmodi caſibus oriunda indicare annitimur; ſi enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum noſtrum Maris ab oriente N versùs occidentem M ſub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M & N ſit eadem; erit adeo $R = P$, & $r = p$. Tranſeat nunc Luna per meridianum loci M ſupra Terram ita ut ſit $T = 0$, $t = 1$; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq + PQ)^2 - (mpq + PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2 + 2(1 - m)pqPQ)$. At quando Luna per meridianum loci N ſupra Terram tranſit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo ſequitur, dum Luna à meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M ſenſim elevari per ſpatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq + 2(1 - m)PQ)$ interea verò in N tantundem ſubſidere. Sin autem Luna infra Terram à meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per ſpatium $= \frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq - 2(1 - m)PQ)$, per tantumque ſpatium aqua in N ſubſidet. Ponamus nunc angulum LPM eſſe 90 graduum, ſeu quæſtionem inſtitui, cùm Luna jam ante ſex horas meridianum loci M ſit tranſgreſſa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M. & $N = \frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2 - (PQ - Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ - M^2pq)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M appellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ + M^2pq)$. Sequuntur hæc ſi inertia aquæ negligatur; at inertiâ admiſſâ ex præcedentibus ſatis clarum eſt, cùm has differentias majores eſſe debere, tùm tempora mutationum tardiùs ſequi debere.

§. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, neceſſe ut quantùm aquæ unâ parte ſupra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum noſtrum ſecundùm longitudinem terminari binis



meridianis PM & PN, ſecundùm latitudinem verò binis parallelis MN & mn, poſitâque Lunâ in L ſit ſinus $PL = q$, coſinus $= Q$; ſinus $LPM = T$, coſinus $= t$. Porro ſit ſinus arcus $PM = p$, coſinus $= P$, ſinus $Pm = r$, coſinus $= R$, atque anguli MPN ſinus $= M$ & coſinus $= m$. Præterea ſit elevatio in M dum Luna in L verſatur, ſupra libellam $= \alpha$, ita ut hoc loco ſuprema aquæ ſuperficies à centro Terræ diſtet intervallo $= 1 + \alpha$, unde cùm ſinus altitudinis Lunæ in M ſit $= tpq + PQ$; erit gravitatio totius columnæ aqueæ ab M ad centrum Terræ $= \frac{(1+\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3}$, prouti ſuprà §. §. 43. & 44. demonſtravimus. Conſideretur jam locus quicunque X in noſtro tractu, in quo aqua ſupra libellam ſit elevata ſpatio $= \phi$; ac ducto per hunc locum meridiano PR, ſit anguli LPR ſinus $= X$, coſinus $= x$; arcûs PX ſinus $= z$ & coſinus $= Z$, unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit =

$\frac{Y}{1+n}+\varphi+\frac{L(1-3(xqz+QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis eſſe debeat illi, orietur $\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2)$, ex quâ formulâ ſi modò conſtaret elevatio aquæ in M, ſimul innoteſceret elevatio vel depreſſio in quovis loco X.

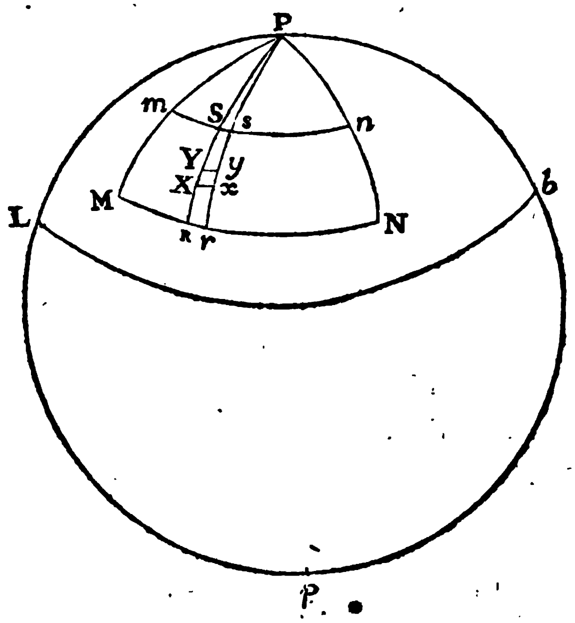
§. 123. Cùm ergo in X aqua ſupra libellam elevetur ſpatio φ; in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in ſtatu naturali, & quidem quantitas $XY.\,Xx.\,\varphi$, cujus elementi integrale per totum tractum ſumtum debet eſſe $=0$, ex quo valor ipſius α innoteſcet. Erit autem angulus $RPr=\frac{dY}{x}$, hincque arculus $Xx=\frac{z\,dX}{x}$, at elementum $XY=\frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx=\frac{dXdZ}{x}$, in quo ergo exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem eſt $=\frac{\varphi\,dXdZ}{x}=\frac{dX}{x}(\alpha dZ+\frac{3LdZ}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X conſtans, & integratione abſolutâ reperietur in elemento $RSsr$ exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem $=\frac{dX}{x}(\alpha(R-P)+\frac{3L}{2b^3}(q^2x^2(R-P)-\frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3)-\frac{2xQq}{3}(r^3-p^3)+\frac{Q^2}{3}(R^3-P^3)-(tpq+PQ)^2(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui acceſſiſſe oporteret, $=\alpha(R-P)\,A\,\text{ſin.}\,M+\frac{3L}{2b^3}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(Mm(1-2TT)-2M^2Tt)+\frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T-Mt-mT)+\frac{q^2(R-P)}{2}A\,\text{ſin.}\,M+\frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{6}A\,\text{ſin.}\,M-(tpq+PQ)^2(R-P)\,A\,\text{ſin.}\,M)$, quæ adeo quantitas debet eſſe $=0$: unde oritur $\alpha=\frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3}+\frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}-\frac{3Lq^2}{4b^3}+\frac{3L}{2b^3(R-P)\,A\,\text{ſin.}\,M}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm(1-2TT))+\frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT))$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M ſupra libellam, quam antè poſuimus $=\alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio ſupra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim ſinus anguli $MPX=S$ & coſinus $=s$, erit ſin. $LPR=X=Ts+tS$ & $x=ts-TS$, manentibusque arcûs PX ſinu $=z$ & coſinu $=Z$, erit elevatio aquæ in $X=\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2-\frac{3L}{2b^3}(tpq+PQ)^2$; quare loco α valore invento ſubſtituto, reperietur aqua in X ſupra libellam attolli actu per ſpa-

ſpatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts - TS)qz + QZ)^2 + \frac{L(1 - 3Q^2)(R^2 + PR + P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{ſin.}\,M}\left(\frac{q^2(3(R-P) - (R^3 - P^3))}{6}(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + \frac{2Qq(p^3 - r^3)}{3}(T - Mt - mT)\right)$. Quòd ſi ergo ponatur tractus noſter ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur caſus jam ſuprà tractatus; quoniam enim fit $MN = 360°$, ſeu A ſin. $M = 2\pi$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M = 0$ & $m = 1$: præterea verò quia M in polum auſtralem p, m verò in borealem P incidit, erit $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = +1$: ſi hi valores ſubſtituantur, prodibit elevatio aquæ in $X = \frac{L}{2b^3}(3((ts - TS)qz + QZ)^2 - 1)$, quæ, expreſſio, quia $ts - TS$ denotat coſinum anguli LPX atque $(ts - TS)qz + QZ$ ſinum altitudinis Lunæ ſupra horizontem in X, cum ſuperioribus formulis exactiſſimè convenit: ſi quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipſa expreſſio quoque emergit, ſi tantum alterum hemiſphærium vel boreale vel auſtrale ponatur aquâ totum circumfuſum, manent enim omnia ut antè, niſi quòd fiat $p = 1$ & $P = 0$: utroque [illegible] caſu fit $R^2 + PR + P^2 = 1$; ultimuſque terminus ob $M = 0$ utroque caſu evaneſcit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris ſecundùm longitudinem MN uſque ad 180 gradus extendi, erit $M = 0$ & $m = -1$ & A ſin. $M = \pi$, denotat enim A ſin. M ſemper arcum circuli, qui menſura eſt anguli MPN: hinc ſi brevitatis gratiâ ponatur ſinus anguli, quo Luna in X ſupra horizontem elevata apparet, $= v$, erit aquæ elevatio in X ſupra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{L(1 - 3QQ)(R^2 + PR + P^2)}{4b^3} - \frac{3Lqq}{4b^3} + \frac{2LTQq(p^3 - r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemiſphærium $LPlp$ aquâ eſſe circumfuſum, fiet $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = 1$; unde elevatio aquæ in X erit $= \frac{L(3v^2 - 1)}{2b^3}$, omnino ac ſi tota Terra aquâ cincta eſſet, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua ſuper Terra mutuam habeat communicationem ſatis amplam. Quòd ſi autem tractus noſter Maris tantum ad æquatorem uſque porrigatur à polo P, ita ut quartam ſuperficiei terreſtris partem ſolum obtegat, tum erit $p = 1$, $P = 0$, $r = 0$ & $R = 1$, hoc itaque caſu aqua in X elevabitur ad altitudinem $= \frac{L(3v^2 - 1)}{2b^3} + \frac{2LTQq}{\pi b^3}$: ex quo perſpicitur hoc caſu elevationem in X majorem, quàm ſi tota Terra aquâ eſſet circumdata, ſi expreſſio TQq habeat valorem affirmativum, minorem verò ſi TQq habeat valorem negativum. Sed limites huic quæſtioni præſcripti non permittunt hinc plura conſectaria deducere, cùm debita evolutio ſatis amplum tractatum requirat,

quirat; neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum caſus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam ſingularia explicanda inſervire poterunt.



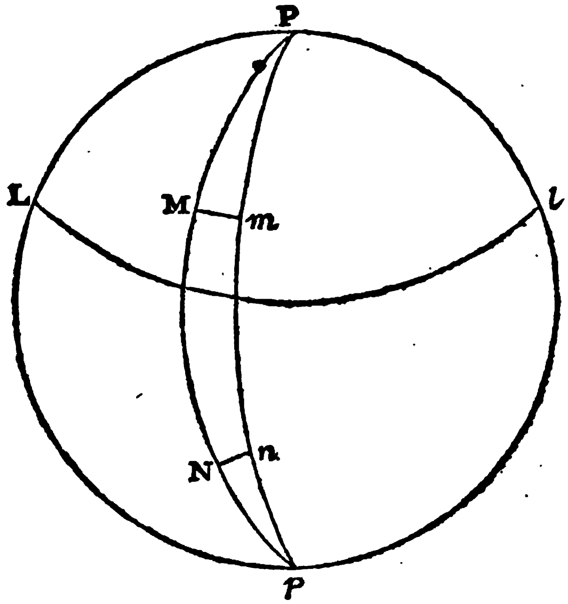
§. 126. Ponamus igitur latitudinem Mm infinitè eſſe parvam, ſeu $R = P$ & $r = p$, reperietur aquæ in X elevatio ſupra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(P^2 - q^2 - 3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,\text{ſin.}\,M}\left(\frac{pq}{2}(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + 2PQ(T - Mt - mT)\right)$. Conſideremus autem elevationem in M, ubi cùm ſit $v = tpq + PQ$, erit ea $= \frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4b^3}$ $+ \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{ſin.}\,M}(pq(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + 4PQ(T - Mt - mT))$. Tranſeat nunc Luna per meridianum loci M ſupra Terram, erit $T = 0$, & $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3Lpq(pq + 4PQ)}{4b^3}$ $\frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{ſin.}\,M}(Mmpq + 4MPQ)$; at ſi per eundem meridianum infra Terram tranſeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq - 4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A\,\text{ſin.}\,M}(Mmpq - 4MPQ)$. Quòd ſi autem Luna versùs ortum à meridiano diſtet angulo horario 90 graduum, ſeu circiter 6 horis ante appulſum Lunæ ad meridianum in M ſuperio-

periorem, erit $T = -1$ & $t = 0$, unde elevatio erit $= \frac{-3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,ſin.\,M}$ $(pqMm - 2PQ(1 - m))$; ſex verò horis poſt tranſitum Lunæ per meridianum loci M versùs occaſum, erit altitudo aquæ in M ſupra libellam $=$ $-\frac{3Lp^2q^2}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,ſin.\,M}(2pqMm - 2PQ(1 + m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut ſit $M = 1$, $m = 0$, & A ſin. $M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M =$ $\frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2\pi b^3}(2pqTt + 4PQ(T - t))$. Quæ ſi etiam declinatio Lunæ ponatur $= 0$, fiet $= \frac{3Lp^2q^2(2tt - 1)}{4b^3} + \frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi b^3}$ exiſtente $q = 1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M tranſit, ſed tardiùs, & quidem ſi dupli anguli LPM ſinus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc eſt ferè unâ horâ poſt tranſitum Lunæ per meridianum, hoc igitur caſu Fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs obſervetur, quàm ſi tota Terra aquâ eſſet circumfuſa. Dum autem Luna per meridianum ſuperius tranſit, erit elevatio $= \frac{3Lpp}{4b^3}$, quæ etiam valet ſi Luna infra Terram meridianum attingat; at ſex horis vel antè vel poſt, quando Luna in horizonte verſatur, erit aquæ depreſſio $= \frac{-3Lpp}{4b^3}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æſtum propemodum fore ſimilem æſtui generali, niſi quòd majoribus anomaliis ſit obnoxius, præcipuè ſi Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari poteſt ratio æſtûs, qui in Mari Mediterraneo obſervatur, & qui in ipſo hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æſtus erunt multò minores; decreſcunt enim ſi cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd ſi ergo in his formulis angulus MPN ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æſtus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri ſint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis ſubjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æſtus à ventis & curſu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix uſquam æſtus regularis obſervabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm ſinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò ſenſibiliorem pariet, à quo æſtus Maris Venetiis obſervatus originem habet. Tametſi enim Mare Mediterraneum non ſolum,

lum ſatis amplam habeat latitudinem, ſed etiam vehementer inæqualem, tamen ejuſmodi marium æſtus admodum exquiſitè ex præſenti caſu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi poteſt, quia extenſio Maris in longitudinem præcipuam cauſam æſtuum binorum ſingulis diebus evenientium continet, neque extenſio latitudinis multum conferat.



§. 129. Ponamus nunc tractûs noſtri Maris longitudinem evaneſcere, totumque tractum in eodem meridiano Pp ab M uſque ad N extendi, ita ut ſit $M = 0$, $m = 1$; ſinus autem elevationis poli in M ſit $= P$, coſinus $= p$, in N verò ſit ſinus elevationis poli $= R$, coſinus $= r$. Ex his ſi Lunà in L verſetur, ob A ſin. $M = M$, erit in M elevatio aquæ ſupra libellam $= \frac{3L(tpq + PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1 - 3Q^2)(P^2 + PR + R^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3}(q^2(3 - P^2 - PR - RR)(2TT - 1) - \frac{4Qqt(p^3 - r^3)}{R - P}) = \frac{L}{2b^3}((ttqq - QQ)(R^2 + PR - 2P^2) + \frac{2Qqt(3PpR + r^3 - 3P^2p - p^3)}{R - P}$. Quòd ſi nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs auſtrum ſitus, ita ut ſinus elevationis poli auſtralis in N duplo major ſit quàm ſinus elevationis borealis in M, ſeu $R = -2P$ & $r = \surd(1 - 4P^2)$, erit $R^2 + PR - 2P^2 = 0$, atque elevatio aquæ in M ſupra libellam erit $= \frac{LQqt}{3b^3P}$

$(9P^2p+p^3-r^3)$. Ex hâc igitur formulâ ſequitur, ſi Lunæ declinatio ſit nulla ſeu $Q=0$, tum nullum omnino æſtum in M obſervari debere. Quòd ſi autem Luna habeat borealem, tum ad tranſitum Lunæ per meridianum ſuperiorem aquam attolli ad ſpatium $=\frac{LQq}{2b^3P}(9P^2p+p^3-r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario ſexto verſetur, tum aquam ad libellam naturalem fore conſtitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depreſſum iri per ſpatium $=\frac{LQq}{2b^3P}(9P^2p+p^3-r^3)$; contrarium denique fore æſtum, ſi Luna habeat declinationem auſtralem. In tali igitur Maris tractu quotidie ſemel tantum aqua affluet, ſemelque refluet, ſi quidem Luna habeat declinationem; nam ſi Luna æquatorem occupat, æſtus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc caſu aptiſſimè explicari poſſe videtur Phænomenon illud æſtûs ſingularis, qui in portu Tunquini ad Batsham obſervatur, ubi omninò ut in præſente caſu dum Luna in æquatore verſatur, Mare nullum æſtum ſentit, at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs auſtrum, quotidie aqua ſemel tantum affluit ſemelque refluit, prorſus ut calculus monſtravit; ſcilicet ſi Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occaſum, hoc eſt poſt tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut ſuprà. Contrà verò ſi Lunæ declinatio ſit auſtralis, aqua deprimitur Lunâ ad occaſum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum caſu modò expoſito. Eſt præterea elevatio poli Tunquini 20° 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninſulis tùm inſulis ab utroque Oceano Pacifico & Indico fere prorſus ſeparatur, ſaltem ut libera communicatio non adſit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis ſinus circiter duplo major eſt, quàm ſinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumſtantiis per noſtram Theoriam eadem ipſa ſingularia Phænomena æſtûs Maris obſervari debent, quæ actu obſervantur: atque hoc modo ſi ullum adhuc dubium circa noſtram theoriam reliquum fuiſſet, id reſolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs ſublatum iri confidimus.

FINIS I. Part. TOMI III.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUTORE ISAACO NEWTONO Eq. Aurato.

TOMI TERTII CONTINUATIO,

CONTINENS

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

INTRODUCTIO AD LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

TRia ſunt in Lunæ Theoriâ ſpectanda, in quibus verſatur omnis quæſtio Aſtronomica quæ de ipſâ inſtitui poteſt; Primum ejus motus quâtenus è terrâ obſervatur; 2do. Figura Lunaris orbitæ à circulo plùs minuſve recedens & apſidum ejus poſitio; ac tertiò ejus orbitæ ad Eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus ſuos ageret; Luna Ellipſim quamlibet circa Terram deſcribere poſſet in Plano quovis, & ea Ellipſis perpetuò eadem maneret conſtantemque angulum cum Ecliptica efficeret; Itaque tota Theoria Lunæ circa hæc verſaretur Elementa, Primò, ut ex tempore quod Luna conſumeret ut à quâdam ſtellâ diſcedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus menſis Periodici ſiderei ſicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri poteſt, ita ut, datâ Epochâ, hoc eſt, dato loco Cœli in quo Luna aliquando obſervata fuiſſet, inde quem in locum migrare debuiſſet, dato tempore, per medii motus calculum inveniri poſſet.

Poſtea; locus Apogæi Lunæ, quod in Cœlis eidem puncto ſemper reſponderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ; ſic enim figura Ellipſeos quam Luna deſcribit obtineretur, & quia, citra Solis actionem, Luna moveretur ſecundùm Legem Keplerianam, hoc eſt, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem ſint proportionalia angulis è Terrâ ſpectatis, ſed areis deſcriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ Lunaris figurâ per Methodos notas, quæ differentia dicitur Æquatio Lunæ ſoluta, hoc eſt, æquatio à Sole non pendens, & intelligetur quibus in locis illa æquatio ſit adhibenda ex ſitu cognito Apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex ſitu Lunæ in Orbe ſuo reſpectu Apogæi ſui.

Tertiò. Quærendum foret obſervationibus, quibus in locis Luna

Eclipticam ſecet, cui nempe Cœli loco reſpondeant ejus Nodi, qui in hac hypotheſi fixi forent, & quonam angulo Orbita Lunæ foret inclinata ad Eclipticam, unde, quoniam ea inclinatio conſtans eſſet, diſtantiâ Lunæ à plano Eclipticæ per perpendiculum menſurata, foret ſemper proportionata diſtantiæ perpendiculari Lunæ à Linea nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ & Nodorum cognoſci poterit quonam ſub Angulo Luna ab Ecliptica diſtare videatur ex ipſâ terrâ; & ad quodnam punctum Eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis conſiderentur tabulæ Aſtronomicæ Lunares hæc continere debebunt

1°. Epocham Loci Lunæ dato aliquo tempore; tum obſervationem loci Apogæi quod fixum maneret, & obſervationem loci Nodorum pariter fixorum.

Poſtea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam Æquationis Lunæ ſecundum ejus diſtantiam mediam ab Apogæo; tabulam latitudinis Lunæ ſecundùm variam diſtantiam Lunæ à Nodo & denique tabulam reductionis Lunæ ad Eclipticam, ſecundùm eam diſtantiam Lunæ à Nodo.

Poſſunt his addi, tabula diſtantiarum Lunæ à Terra ſecundum ejus diſtantiam ab ejus Apogæo, tabula Diametrorum ejus apparentium ſecundùm eamdem diſtantiam ab Apogæo, & denique Tabula Parallaxeos quâ deprimitur Luna reſpectu ſpectatoris in ſuperficie telluris collocati, prout diverſa eſt ejus à Terra diſtantia, & prout altitudo ſupra horizontem eſt diverſa.

Talis foret tota de Lunâ Theoria, citra Solis actionem; ſed jam à longo tempore intellexerunt Aſtronomi Lunares motus à Lunæ ſitu reſpectu Solis plurimùm turbari, unde varias correctiones, ſive Æquationes variis titulis concinnare ſunt conati.

Quam luculenter ex Gravitatis Theoriâ, hæc non modò explicentur ſed etiam accurato calculo determinentur demonſtrare aggreſſus eſt Newtonus, & eas omnes Æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex Theoriâ ſuâ deductis ita feliciter ſtatuit ut motus Lunæ ejuſve Æquationes ex calculo repertæ in minuto ſecundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus obſervatoribus determinari potuerunt conſentiant, quod autoritatem integram illi Theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles ſunt, nec compendioſi, nec ſemper commodè ad ſyntheticam formam reducendi; Quos Newtonus hâc ultimâ ratione Lectori ſuo ſiſtere potuit eos enucleatè tradit, cæteros omittit & quod ex iis obtinetur ſtrictim in Scholio indicat, & primo quales ſint illæ æquationes juxta Aſtronomorum obſervationes dicit & quibuſnam Legibus ſecundum ipſos

ipſos obſervatores ſint adſtrictæ, mox tradit quales æquationes ex ſuis calculis emergant & quænam ſint earum Leges.

Ipſum tam obſervationibus ante ipſum inſtitutis, quam obſervationibus Flamſtedianis uſum eſſe conſtat, imo & ipſum exinde Tabulas Lunares ſibi conſtruxiſſe liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis Tabulis facile non comperiuntur, ſed quæ maximè conſentiunt cum novis Ill. Caſſini Tabulis, ita ut quo perfectiùs Cœli motus dignoſcunt Aſtronomi eo propiùs ad Newtonianas Theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam & ejus orbitam habeatur ratio; Primum fiat abſtractio excentricitatis Orbitæ tam Telluris quam Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione menſis Periodicus Lunæ longior evadat & ejus Orbita ex circulari in Ellipſim mutetur cujus axes per Prop. XXVIII. ſunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam Orbita Lunæ induit quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ ſecundum Tangentem orbitæ Lunaris dirigitur, naſcitur Variatio quam Tycho primus obſervavit, & maximam in Octantibus 40′½ ſtatuit, illam Ill. Caſſinus facit 33′. 40″. in Elementis Aſtronomiæ, eam verò ipſe Newtonus in hypotheſi orbitas Telluris & Lunæ eſſe circulares 35′. 10″. calculavit Prop. XXIX.

Tertiò ex eâ Solis actione naſcitur motus Apogæi Lunaris in conſequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. obſervationibus proximè congruus; Quinto denique Inclinationis Orbitæ Lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. & XXXV.

Nunc verò adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major ſit cum terra eſt in Perihelio ſuo quam in Aphelio; Inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; Primùm cùm menſis Periodicus Lunæ per Actionem Solis longior evadat & motus ejus medius augeatur, id incrementum quando terra eſt in Perihelio majus eſt quam cum eſt in Aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ diſtributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco diſſentiat, hinc itaque notis noſtris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti quod ad totam Lunæ Theoriam pertinet incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum aſſignamus, tum poſtea aperimus rationem quâ obtineri poteſt æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ à Sole diſtantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam Ill. Caſſinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Ea-

Eâdem ratione, variationes motus Apogæi & motus nodorum ex ſitu diverſo Terræ ad aphelium aut Perihelium ſuum ex utriuſque motu medio dato in ſecundo Paragrapho derivare docetur.

His ex Excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Lunaris, aut ejus inclinationis ad Eclipticam inde novæ irregularitates prioribus adnaſcuntur.

Primò menſis Periodicus paulo major fit cum Linea Apſidum per Solem tranſit quam cum ipſi eſt perpendicularis, hinc correctio nova Æquationi motus medii quæ in primo Scholii Paragrapho exponitur eſt facienda, hanc novam Æquationem Ill. Caſſinus exhibet in Tabella cujus titulus eſt *ſecunda Æquatio Solaris* & tertio Paragrapho Scholii traditur.

Itidem ſi linea nodorum per Solem tranſeat paulo major erit Solis actio & correctio nova exinde naſcetur eidem motui medio, hanc quarto Paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipſa orbitæ Lunaris ex diverſo ſitu Apogæi reſpectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit idque etiam inæqualiter pro diſtantiâ telluris à Sole.

Rurſus ipſe motus Apogæi prout Apogæum diverſimodè ſitum eſt reſpectu Solis mutatur, hinc Æquatio Apogæi naſcitur eaque duplex; prima ſupponendo telluris à Sole diſtantiam conſtantem, altera verò pendet ex mutatione diſtantiæ telluris à Sole.

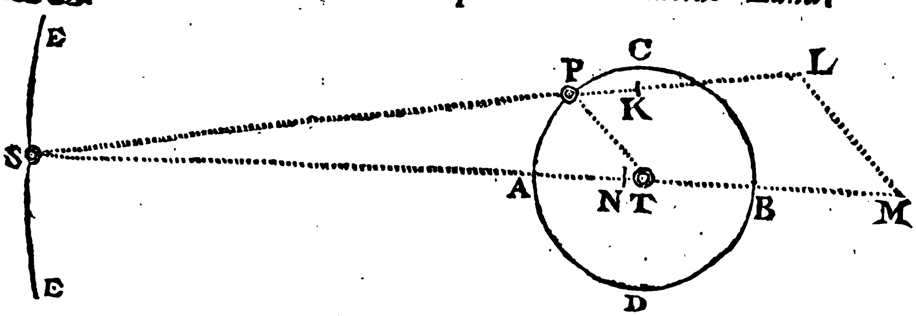
Hinc tandem cum orbitæ Lunaris forma, excentricitas & Apogæi poſitio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem ſolutam conſtituebant; ultimo autem Scholii Paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones ſint inſtituendæ: Omnia verò in hoc Scholio ſine demonſtratione tradit nec indicato ſuorum calculorum artificio, ideoque noſtri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis inſiſtere debuit, labore quidem non parvo, ſucceſſu qualicumque, utinam Lectoribus non ingrato.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

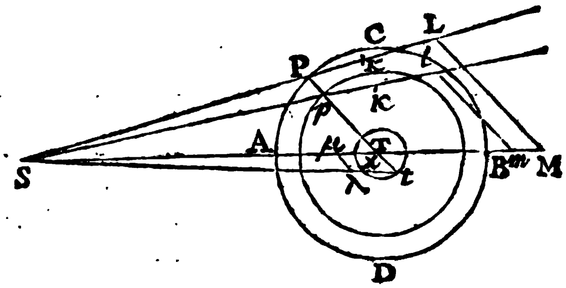
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

INvenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.



Deſignet *S* ſolem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; ſitque *SL* ad *SK* in duplicatâ ratione *SK* ad *SP*, & ipſi *PT* agatur parallela *LM*, & ſi gravitas acceleratix terræ in ſolem exponatur per diſtan-

DE MUNDI SYSTEMATE. diſtantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix lunæ in ſolem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipſius SM pars TM perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expoſitum eſt. (q) Quâtenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analo-

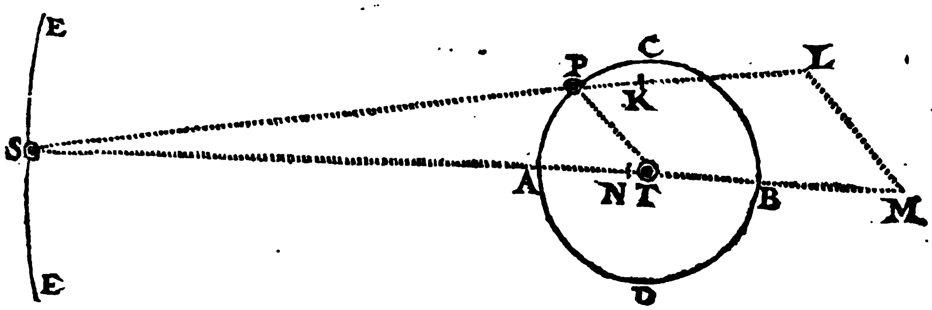


109. (q) * *Quâtenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus conſimilibus;* Deſignet ut prius S ſolem, ſed ſit T centrum commune gravitatis terræ & lunæ; ſit itaque p luna & t terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut diſtantia p t ſit æqualis P T, ductiſque S p, S t, ſumptiſque in eis lineis productis ſi opus ſit S k, S x æqualibus S T, ſecatiſque S l & S λ ita ut ſint ad S T in duplicatâ ratione S T ad S p & ad S t, actiſque l m, λ μ Parallelis ad p t, ſi exponat S T vim acceleratricem centri communis gravitatis T in ſolem, exponent S l & S λ vires accelerantes lunam & terram in ſolem, & perturbabuntur utriuſque motus reſpectu centri communis gravitatis per vires l m & λ μ, T m & T μ; Quæ vires conſimiles ſunt viribus L M & T M quibus lunam ſolam perturbari dictum fuit in ſuppoſitione terram eſſe immotam; nam ob maximam diſtantiam puncti S, lineæ P l, p l, T M, t λ pro parallelis ſunt habendæ, ideoque figuræ T P L M, T p l m, T t λ μ pro Parallelogrammis ſunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera P T, T M; p T, T m; T t, T μ, eamdem habent inter ſe rationem, demonſtratur enim in notâ 500. lib. 1. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) ſubſequente) eſſe P T ad T M, p T ad T m, T t ad T μ ut Radius ad triplum Coſinus anguli A T P qui Coſinus cum idem ſit in tribus hiſce caſibus, latera Parallelogrammorum circa æqualem angulum poſita erunt proportionalia, ea verò latera deſignant tam vires quibus Luna circa terram immotam revolvendo perturbatur quam eas quibus perturbarentur luna & terrâ circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo ſunt conſimiles.*

Sed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam. Quippe in obſervationibus motus Lunæ reſpectu terræ quaſi hæc immota eſſet conſideratur, tunc autem ſummæ virium acceleratricium, ex quibus velocitates reſpectivæ naſcuntur ipſi tribui debent, *& ſummas virium per li-*

nem

analogas *TM* & *ML* deſignare. Vis *ML* in (r) mediocri ſuâ quantitate eſt ad vim centripetam, quâ luna in orbe ſuo circa terram quieſcentem ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet, in duplicatâ ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa ſolem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. I.) hoc eſt,



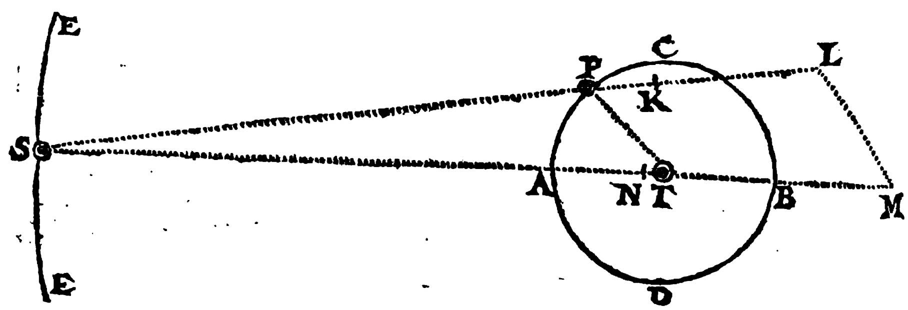
in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propoſitione quartâ quod, ſi terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ

neas TM & ML ipſis analogas deſignare. Vires enim acceleratrices p T & T t ſimul junctæ æquales ſunt ſoli vi PT & ſimilem effectum edunt, admovent utique corpora p & t, ſecundum directionem p T t, ſi ergo vis acceleratrix PT ſummæ utriuſque æqualis admoveat corpus P verſus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T ſpectatus: Vires MT, T μ divellunt corpora à ſe mutuo ſecundum directionem ST, idem verò præſtat vis T M quæ ſummæ ambarum eſt æqualis, nam eſt pT : T t :: m T : T μ :: ergo pT : pT + Tt :: mT : mT + T μ & altermando p T : m T :: (P T : MT) :: p T + T t : m T + 1 μ. Sed eſt p T + T t = P T ergo etiam m T + T μ = M T.

(r) * *Vis ML in mediocrì ſuâ quantitate &c.* Ob magnam Solis diſtantiam figurâ P T M L eſt parallelogrammum ideoque M L eſt proximè æqualis lineæ P T, ergo vis M L erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut P T ad S K ſive S T, ſed vires centrales qualeſcumque ſunt inter ſe directè ut Radii circulorum qui per eas deſcribuntur & inversè ut quadrata temporum Periodicorum, ergo ea vis quâ ſol agit in punctum T, eſt ad vim quâ Lunâ in orbè ſuo retinetur (poſito illam revolvi circa terram quieſcentem) ut S T ad P T directè & ut quadratum temporis Periodici Lunæ circa terram ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem; Ergo compoſitis rationibus, vis M L eſt ad vim quâ Lunâ in orbe ſuô retinetur ut quadratum temporis Periodici Lunæ ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem hoc eſt in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ eſt duratio anni ſiderei. 109

De Mundi Systemate.

terræ quamproximè. Et (ſ) vis quâ luna in orbem circa terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, quâ eodem tempore ad diſtantiam



ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & (t) hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie terræ,

109. (ſ) * *Et vis quâ Luna ad diſtantiam $60\frac{1}{2}$ ſemid. revolvi poſſet eſt ad vim quâ ad diſtantiam 60 ſemid. revolvi poſſet eodem tempore ut $60\frac{1}{2}$ ad 60.* Vires enim centrales ſunt ut diſtantiæ directè & tempora Periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) cum ergo hîc tempora Periodica æqualia ponantur, Vires Centrales ſunt ut diſtantiæ. Newtonus autem loco diſtantiæ $60\frac{1}{2}$ ſemid. terræ quæ revera intercedit inter terram & lunam, aſſumit diſtantiam 60 ſemid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim qua Lunâ in orbe ſuo retinetur æſtimaverat quaſi terra immota eſſet & Luna ad diſtantiam $60\frac{1}{2}$ ſemid. à terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa terram revolveretur; Verum cum terra reverâ circa centrum gravitatis commune Lunæ & Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad diſtantiam $60\frac{1}{2}$ ſemid. tempore illo revolvi apparet, minor eſt ea quâ ad eamdem diſtantiam eodemque tempore circa terram immotam revolveretur, & eſt æqualis illi quâ, eodem quidem tempore Periodico, ſed ad diſtantiam 60 ſemid. circa terram immotam revolveretur, ut conſtat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim Propoſitione ſtatuitur quod ſi duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis Ellipſeos quam unum circa alterum motum deſcribit eſt ad axem Ellipſeos quam circa illud quieſcens eodem tempore Periodico & eâdem vi deſcribere poſſet, ut ſumma corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc ſummam & corpus alterum, quare cum Telluris corpus ſit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, & prima duarum medieproportionalium inter 43 & 42 ſit $42\frac{2}{3}$ ſitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, Vis quâ Luna in orbe ſuo retinetur, ea eſt quâ ad diſtantiam 60 ſemid. terræ eodem ipſo tempore Periodico quod obſervatur circa terram immotam revolvi poſſet.

(t) * *Et hæc vis &c.* Per hujuſce Libri Prop. IV.

terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum *TM*, *ML*, datur etiam vis *TM* (u): & hæ ſunt vires ſolis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

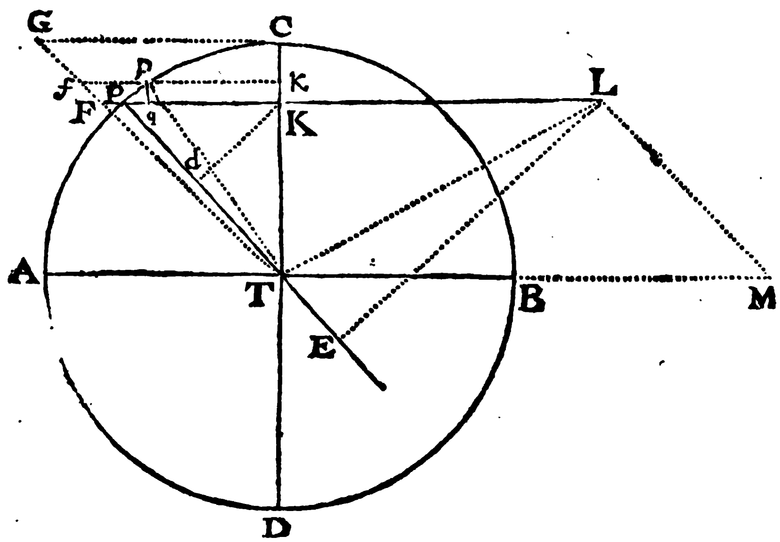
Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quâtenus motus lunaris ab actione ſolis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, eâ ſolâ exceptâ, de quâ hic agitur. Ob ingentem verò ſolis diſtantiam, ponamus etiam lineas *SP*

(u) * *Datur etiam vis TM.* Ob parallelas PT, LM & ingentem puncti S diſtantiam, PL & TM ſunt parallelæ, & figura PTLM eſt parallelogrammum, ideoque TM ſumitur ut proximè æqualis PL; Eſt autem PL triplum Coſinus anguli ATP exiſtente TP ſive LM radio; Nam quia SK eſt æqualis ST, ſi centro S radio ST deſcribatur arcus TK, erunt ST & SK in eum arcum perpendiculares, ſed is arcus proximè coincidit cum rectâ TC perpendiculari lineæ ST in T (ob diſtantiam centri S) ergo punctum K in ea recta TC occurret & SK ſive PK illi rectæ TC erit perpendicularis, ideoque PK erit Coſinus Anguli ATP; ſed, per conſtructionem, eſt SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (ſive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut SK (ſive SP + SK) ad SL − SK (ſive KL) ideoque eſt $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, ſed omittendi ſunt ultimi termini propter ingentem diviſorem SP, ergo eſt $KL = 2PK$, & $PK + KL$ ſive $PL = 3PK$. Q. E. D.

De Mundi Systemate

SP, *ST* ſibi invicem parallelas eſſe. (x) Hoc pacto vis *LM* reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem *TP*, ut & vis *TM* ad mediocrem ſuam quantitatem 3*PK*. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim *TL*; & hæc vis, ſi in radium *TP* demittatur perpendiculum *LE*, reſolvitur in vires *TE*, *EL*, quarum *TE*, agendo ſemper ſecundum radium *TP*, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ *TPC* radio illo *TP*



factam; & *EL* agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ *C* ad conjunctionem *A*, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut (y) ipſa vis accelerans *EL*, (z) hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus

109 (x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipſa vis accelerans* (13. lib. 1.).

(z) * *Hoc eſt ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Nam Triangula PTK, PLE ſunt ſimilia propter angulum communem in P & angulos rectos K & E, ergo eſt TP : TK :: PL : $EL = \frac{PL \times TK}{TP}$, (ſed per notam u) eſt $PL = 3PK$ ergo eſt $EL = \frac{3PK \times TK}{TP}$.

tempus per motum medium lunarem, (a) vel (quod eodem ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & (b) Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, (c) hoc eſt in datâ ratione, (d) ideoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſitè, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in lunam, (e) atque ideo ètiam ut velocitas hâc ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CTP, ſeu incrementum momenti. (f) Vis quâ luna circa terram quieſcentem ad diſtantiam TP, tempore

110 (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypotheſi orbem Lunarem eſſe circularem, angulus C T P vel arcus C P forent proportionales tempori, ſemotâ conſideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc vero perturbatio reſpectu ipſius motus Lunæ eſt exigua, itaque anguli C T P vel arcus C P tempori fere proportionales cenſeri poſſunt.

(b) * *Kk erit ad PK ut Pp ad Tp* ſive T P; Ex notiſſimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam ſi ex puncto p ducatur lineola p q perpendicularis ad PK, ea erit parallela & æqualis lineæ Kk, formabiturque Triangulum fluxionale P p q ſimile Triangulo P K T, nam cum anguli p P K & K P T rectum ſimul efficiant, & pariter anguli K P T & P T K, æquales ſunt anguli p P K & P T K unde eſt p q ſive K k ad P K ut P p ad T P.

(c) * *Hoc eſt in datâ ratione.* Ratio enim P p ad T p eſt data, quia ſingulæ partes P p ſumuntur æquales, ſunt itaque ſingulæ in eâdem ratione ad radium TP.

(d) * *Ideoque F K × K k ſeu area F K k f ut* $\frac{3 PK \times TK}{TP}$; Cum ratio K k ad P K ſit data, data etiam erit ratio K k ad 3 P K, & hæc ratio manebit etiamnum data ſi conſequens 3 P K per quantitatem conſtantem T P dividatur, erit ergo data ratio K k ad $\frac{3 PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio ſi ambo termini per quantitates æquales F K & T K multiplicentur, ergo ratio K k × F K (ſeu areæ F K k f) ad $\frac{3 PK \times TK}{TP}$ eſt etiam data, hoc eſt, eſt area F K k f ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. 110.

(e) * *Atque ideo etiam ut velocitas* (13. lib. 1.).

(f) * *Vis quâ Lunâ circa terram ad diſtantiam T P tempore ſuo Periodico CADB revolvi poſſet efficeret ut corpus liberè cadendo tempore C T deſcriberet longitudinem* $\frac{1}{2}$ *C T* &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore deſcripti erit æquale circuli Diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret ſi uniformiter acce-

re ſuo periodico *CADB* dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore *CT* cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}$*CT*, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, quâ luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum *Kd* in *TP* demiſſum (g) ſit ipſius *EL* pars tertia, & (h) ipſius *TP* ſeu *ML* in octantibus pars dimidia, vis *EL* in octantibus, (i) ubi maxima

110 acceleraretur per vim centripetam quâ circulus deſcribitur.

Nam ſi ſumatur arcus quam minimus, altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quamminimus deſcriberetur, foret ejus arcus minimi ſinus verſus; ſed ex natura circuli, factum Diametri ducti in ſinum verſum arcûs, eſt æquale quadrato chordæ illius arcus, ſive quadrato arcus ipſius ſi adeo ſit exiguus ut pro ſuâ chordâ ſumi poſſit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem deſcripta, ſunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percurſi ſunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo ſpatium minimum per vim centripetam liberè deſcriptum eſt ad aliud quodvis ſpatium per eamdem vim centrifugam liberè deſcriptum (ideoque etiam facta horum ſpatiorum per Diametrum circuli) ſunt ut quadrata arcuum correſpondentibus temporibus deſcriptorum: ſed prius factum eſt æquale quadrato arcus correſpondentis, ergo & alterum factum erit æquale quadrato arcus correſpondentis, hoc eſt altitudo quæcumque cadendo liberè deſcripta in Diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcus eodem tempore revolvendo uniformiter percurſi.

Quod cum ita ſit, cadat liberè corpus per $\frac{1}{2}$ CT h. e. per radii ſemiſſem, ducaturque hæc longitudo per Diametrum ſeu 2 CT factum CT^2 ſive quadratum ipſius radii æquale erit quadrato arcus eodem tempore deſcripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, ſed velocitas acquiſita liberè cadendo per Radii ſemiſſem $\frac{1}{2}$ CT talis eſt ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquiſitâ duplum ejus altitudinis Radium nempe integrum CT eodem tempore deſcribere poſſet, quæ eſt ipſa longitudo arcus quam corpus uniformiter revolvens deſcripſiſſet eodem tempore, ergo velocitas acquiſita lapſu per $\frac{1}{2}$ CT ea eſt quâ corpus in orbe ſuo revolvitur.

Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ CT percurretur tempore quod erit ad totum tempus Periodicum ut CT ad circumferentiam CADB, nam tempora ſunt ut arcus uniformiter deſcripti, ſed tempus quo corpus per $\frac{1}{2}$ CT labitur eſt æquale tempori quo arcus æqualis CT percurritur ergo eſt illud tempus ad totum tempus Periodicum ut CT ad totam peripheriam CADB.

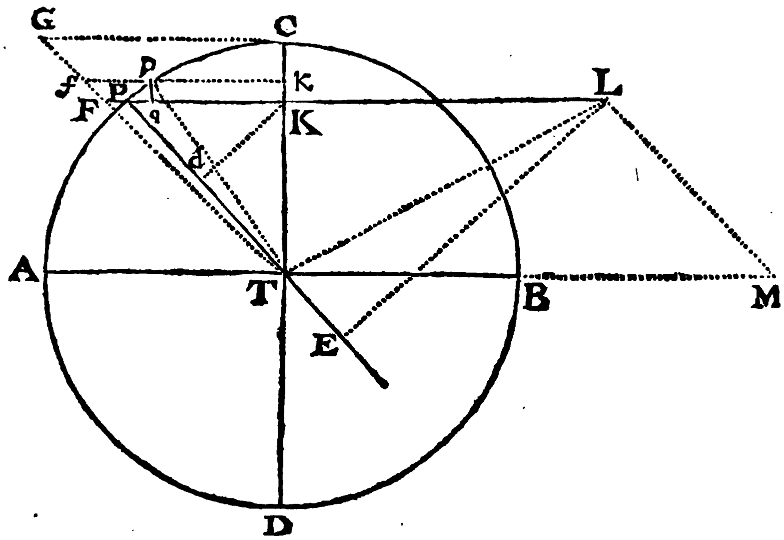
(g) * *Kd ſit ipſius EL pars tertia.* Ob Triangula ſimilia PLE, PKd eſt EL ad Kd ut PL ad PK, ſed (per notam (u)) eſt PK tertia pars lineæ PL, eſt itaque pariter Kd tertia pars lineæ EL.

(h) * *Kd ipſius TP ſeu ML in octantibus pars dimidia*; Nam in octantibus anguli KTd, PKd, KPd ſunt omnes 45 grad. eſt itaque Td = Kd = dP eſt ergo Td ſive Kd ipſius TP pars dimidia in octantibus.

111 (i) * *Ubi maxima eſt.* Ut inveniatur punctum in quod vis EL ſive $\frac{3PK \times TK}{TP}$ eſt maxima, ſit $TP = r$, $TK = x$, $PK = y$ erit $EL = \frac{3yx}{r}$ cujus fluxio eſt $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima eſt ergo EL ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideoque ubi $ydx = -xdy$, ſed cum in circulo ſit

maxima eſt, ſuperabit vim *ML* in (k) ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, quâ luna tempore ſuo periodico circa terram quieſcentem revolvi poſſet, (l) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$

LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.



ſeu 11915, & tempore *CT* velocitatem generare deberet quæ (m) eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem *CPA* velocitatem majorem generaret in ratione *CA* ad *CT* ſeu *TP*.

Expo-

Sit $y = \sqrt{rx - xx}$, & $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ unde ſubſtitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr - xx} = \frac{xx\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ & reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde eſt $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ & $dy = -dx$, & $y = x$; Ideoque in Triangulo PTK angulus T debet eſſe 45 grad. & P debet eſſe in octante Circuli.

(k) * *In ratione 3 ad 2.* Eſt EL ad Kd ut 3 ad 1 (not. g) eſt Kd ad TP ſive ML ut 1 ad 2 (not. h) ergo EL ad ML ut 3 ad 2, ex æquo.

(l) * *Ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$.* Vis EL eſt ad vim ML ut 3 ad 2; vis ML eſt ad vim quâ Lunâ in orbe ſuo circa terram quieſcentem revolvi poſſet tempore ſuo Periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujuſce) ſive ut 100 ad 17872 $\frac{1}{2}$; Ergo compoſitis rationibus vis EL eſt ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad 2×17872 $\frac{1}{2}$ ſive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$ hoc eſt ad 11915, ideoque vis EL eſt $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ.

(m) *Quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris.* Patet ex notâ (*f*) vim quâ Lunâ revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempore

DE MUNDI SYSTEMATE.

Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo (n) $\frac{1}{2} TP \times Pp$ æqualem. Et (o) velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CA$ & triangulum TCG, ſive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. (p) Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, (q) addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſum-

A11, re CT eam ipſam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis Lunaris eſt pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis Lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

(n) * *Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream FK × Kk rectangulo* $\frac{1}{2}$ *TP × Pp æqualem*, vis EL ſemper eſt proportionalis areæ FK × Kk ex demonſtratis, ſed in octantibus ubi ea vis eſt maxima eſt FK ſive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ & $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

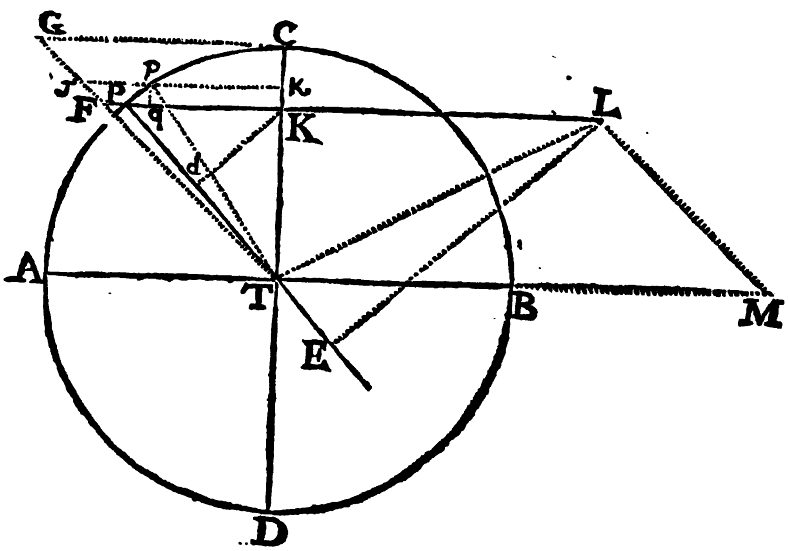
(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis CP generat ad velocitatem quam generant* vires veræ EL *eodem tempore agentes ut* $\frac{1}{2}$ TP × CP *ad aream KCGF*, Velocitates genitæ ſunt ut vires quibus generantur ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque ſupponatur omnes arcus Pp temporibus quamproximè æqualibus deſcribi, ſi ii arcus Pp æquales inter ſe ſumantur (vid. not. a præced.) velocitates genitæ dum arcus Pp percurruntur ſunt ut ipſæ vires ſive ut areæ FKkf, ideoque ſumma velocitatum genitarum tempore CP, ſive dum arcus CP deſcribitur, eſt ut tota area KCGF, ſed vis in octantibus ſive velocitas quæ in octante generatur durante tempore Pp, eſt $\frac{TP \times Pp}{2}$, quia eo in loco is eſt valor areæ FKkf, qui valor eſt ipſe valor areæ PTp, ergo ſi ſingulis momentis Pp ſimilis velocitas generaretur, ſumma velocitatum genitarum tempore CP foret area CTP ſive $\frac{1}{2}$ TP × CP, ergo velocitas quam vis maxima generat eſt ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem CP, ut $\frac{1}{2}$ TP × CP ad KCGF.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri eſt analoga.* Areæ momentum mediocre illud eſt quod Luna dato exiguo tempore verrerct ſi uniformi velocitate toto ſuo tempore ferretur, cumque Luna per vim EL certis in locis plus minuſve acceleretur, areæ momentum, ſeu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore deſcribitur, nunc major nunc minor eſt; ſed cum orbis Lunaris circularis cenſeatur, areæ momenta ſunt ut arcus qui ſunt eorum baſes, cumque iiſdem temporibus illa momenta illique arcus deſcribantur, ſunt ut velocitates quibus deſcribuntur. Hinc pro arearum momentis ipſæ velocitatum rationes aſſumuntur.

(q) * *Addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic aſſumit Newtonus velocitatem mediocrem eam nempe quâ orbita Lunaris tempore ſuo Periodi-

ca

ſumma 11915+50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in ſyzygiâ *A*, ac differentia 11915−50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ tempo- LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.



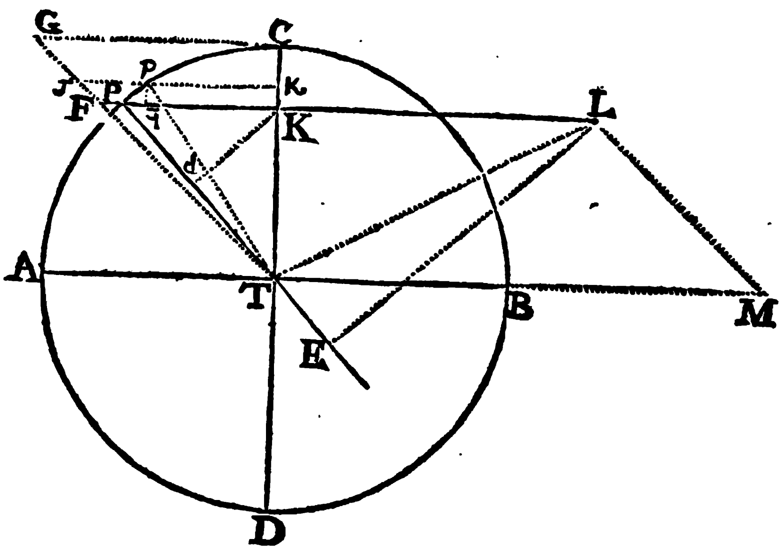
tibus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut

to uniformiter deſcriberetur eſſe mediam proportionalem Arithmeticè inter velocitatem minimam & maximam. Hanc tamen propoſitionem quaſi evidentem aſſumere non licuit, ſi enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quam magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quam magnis, hinc exponenda eſt prius ratio quâ creſcunt illæ velocitates, ut poſſimus aſſerere mediocrem velocitatem Lunæ eſſe mediam Arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur Problemate huic propoſitioni mox ſubjungendo. 111.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ut trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG vel (r) quod perinde eſt, ut quadratum ſinus PK ad quadratum radii TP, id (ſ) eſt, ut Pd ad TP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex hypotheſi quod ſol & terra quieſcunt, & luna tempore ſynodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus ſynodica lunaris verè ſit



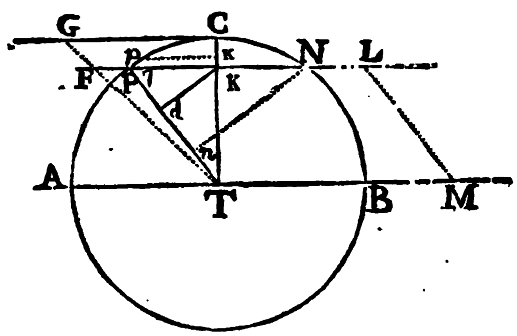
dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{1100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in ſyzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, ſeu 10973 ad 11073;

112. (r) * *Vel quod perinde eſt ut quadratum ſinus PK ad quadratum radii TP* area TCG eſt aream TKF ut quad. TC ad quad. TK & dividendo TCG−TKF (ſive FKCG) ad TCG ut TC^2-TK^2 (ſive PK^2) ad TC^2.

(ſ) * *Id eſt ut Pd ad TP* eſt Pd ad PK ut PK ad TP propter ſimilitudinem Triaogulorum PKd, PTK, ergo per compoſitionem rationum eſt Pd ad TP ut PK^2 ad TP^2.

11073, & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, (t) exiſtente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri 219,46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in (u) circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin (x) variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione.

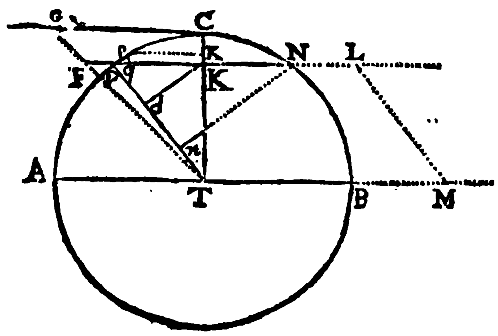


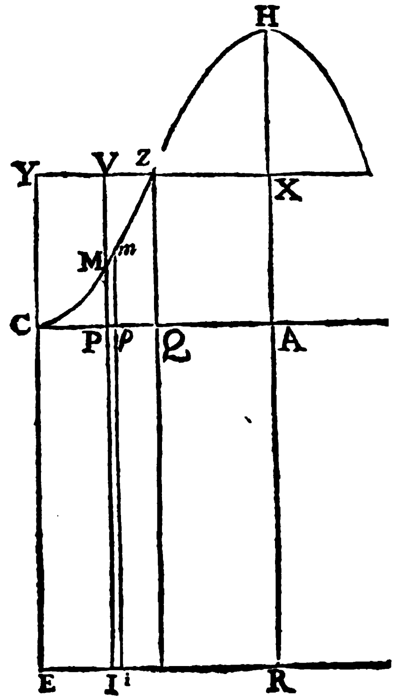
(t) * *Exiſtente videlicet TP æquali* 100, ſequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 eſt ad 100 ut eſt P d ad P T, ſi ergo P T ſit æqnalis numero 100 erit P d æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut ſumma numeri 219.46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ in circulo cujus radius eſt unitas;* Areæ momentum in puncto P eſt ut 10973 + P d, eſt autem P d dimidium ſinus verſus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea P K L ſecat circulum erit arcus P C N duplus diſtantiæ P C à quadraturâ proximâ ductaque N n perpendiculari in radium P T erit P n ſinus verſus duplicatæ illius diſtantiæ, ſed cum N n & K d ſint perpendiculares in eamdem lineam ideoque Parallelæ, & ſit punctum K medium lineæ P N erit etiam d medium lineæ P n; eritque $Pd = \frac{1}{2} Pn$, ſive erit P d dimidium ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, eſt ergo momentum areæ ut ſumma numeri $10973 + \frac{1}{2} Pn$ exiſtente Radio 100, ſeu ut hujus quantitatis duplum $21946 + Pn$ ideoque ſi Radius ſit 1 ut $219{,}46 + Pn$. 112.

(x) * 112. *Sin variatio ibi major ſit* &c. Manente eâdem Hypotheſi, Lunæ orbem eſſe circularem & Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis naſcitur quæ per lineam E L deſignatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna eſſe deberet ſi velocitate ſuâ mediocri moveretur tempore dato C P, & locum in quo reverâ eſt tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex Problemate ſequenti exponere facile erit.

DE MUNDI SYSTEMATE.





PROBLEMA.

112 *Ex hypotheſibus & demonſtratis in Propoſitione hâc XXVI. exponere rationem ſecundum quam deſcribuntur areæ CTPA momenta.*

Deſignet recta CA (in 2da. figurâ) tempus quo arcus CA deſcribitur, erigantur per ſingula puncta P rectæ PM perpendiculares in CA & proportionales velocitati tempore CP per vim EL genitæ; Per ea quæ in hâc Propoſitione demonſtrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus CP ſunt ut Trapezia FKCG correſpondentia, illa vero Trapezia ſunt ut ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, ſive ut ſinus verſus arcus dupli CP, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares PM æquales ſinui verſo arcus 2CP, ultima perpendicularis AH erit æqualis ipſi Diametro AB, quia eſt ſinus verſus dupli quadrantis; ducatur curva CMH per omnium perpendicularium vertices tranſiens, ducatur etiam AR perpendicularis ad CA, ſitque AH ad AR ut velocitas ultimò acquiſita in A ad velocitatem uniformem quâ Lunâ ferretur ſi vis EL, omninò non ageret, abſolvaturque Parallelogrammum AREC, productâque lineâ MP uſque ad lineam RE tota linea IM erit ut velocitas Lunæ tempore CP, & ducta linea quamproxima mpi erit area MPImpi ut area deſcripta tempore Pp, & tota area RECMH repræſentabit totam aream tempore CA deſcriptam; Denique ſecetur AH in X & ducatur XY parallela CA quæ ſecet curvam CMH in Z & ex puncto Z ducatur ordinata ZQ. Liquet quod ſi punctum X ita ſit aſſumptum ut Parallelogrammum XREY ſit æquale mixtilineo HARECMH, erit XR velocitas Lunæ mediocris, & CQ tempus quo Luna à quadraturâ profecta

ad

ad eam velocitatem medioerem perveniet, quod quidem ex ipſâ conſtructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ A H, ita ut hæc velocitas mediocris X R ſit media proportionalis Arithmetica inter R A & R H & præterea quod punctum Q cadet in medio inter A & C ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (ſaltem ſi medium arcus medio temporis reſpondeat quod proximè verum eſt juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area HAPCMH, dicatur v arcus C P & dicatur mv recta C P quæ arcui C P eſt proportionalis (ſaltem quam proximè per not. 110.) & P p ſit $m\,dv$, ſinus rectus P K arcus C P dicatur y, ſinus verò totalis ſit r. Ex notis Trigonometriæ Principiis ſinus verſus dupli arcus C P eſt $\frac{2yy}{r}$, ergo ordinata P M ei æqualis eſt $\frac{2yy}{r}$, & elementum areæ ſive MPpm eſt $\frac{2yy}{r}\,m\,dv$, ſed ex notâ proprietate circuli eſt $\sqrt{rr-yy}$ ad r ut dy ad dv eſt ergo $dv=\frac{r\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2myy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli radio T C deſcripti dicatur C K, z, K k, dz, Elementum P p k K eſt $y\,dz$, ſed eſt T K ($\sqrt{rr-yy}$) ad P K (y) ut P q (dy) ad qp (dz) hinc $dz=\frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ & elementum areæ circuli ſit $\frac{yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ quod Elementum eſt ad Elementum correſpondens areæ H A P C M H ut 1 ad $2m$, hinc tota hæc area eſt ad aream quadrantis T C P A ut $2m$ ad 1, ſive ſi totus arcus C P A dicatur c & recta C P A dicatur mc, area H A P C M H erit mrc. Ergo ſi linea A R quæ deſignat velocitatem uniformem Lunæ cum nulla foret vis E L, dicatur l, area A R E C erit mlc & tota area H A R E C H erit $mlc+mrc$, ſive æqualis Parallelogrammo cujus unum latus foret mc alterum $l+r$, ſed R E ex conſtructione eſt æqualis mc, ergo ſi ſumatur R X $=l+r$ Parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo HARECMH, ideoque erit R X ſive $l+r$ velocitas Lunæ mediocris, ſed erat A H $=2r$, ideoque R H $=l+2r$ eſt ergo RX ($l+r$) media proportionalis Arithmeticè inter R A (l) & R H ($l+2r$), ergo velocitas mediocris Lunæ eſt media proportionalis Arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) & maximam ($l+2r$). 112

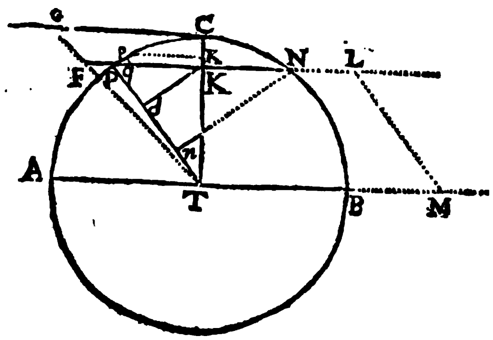
Quoniam verò ordinata Z Q $=$ A X $=r$ eſt ſinus verſus arcus dupli C P, & eſt r ſinus verſus arcus quadrantalis, ergo in hoc caſu C P ejus dimidius eſt octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ eſt æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ ſuperiore q demonſtranda eſſe dixeramus.

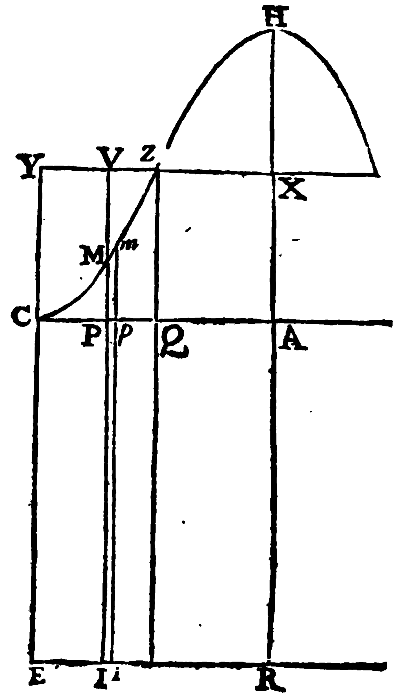
Ex hujus autem Problematis conſtructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ deſcriptam tempore C P, exprimi per aream Y E I V, & ejus valorem eſſe $mlv+mrv$, dum area verè per Lunam deſcripta exprimetur per ſpatium mixtilineum C E I M; ſpatium C E I P eſt mlv, ſpatium verò C P M, eſt ad aream C P K ut $2m$ ad 1; tota area C T P eſt $\frac{rv}{2}$, ſpatium P K T eſt $\frac{y\times KT}{2}$, ergo area C P K eſt $\frac{rv-y\times KT}{2}$, eſt itaque ſpatium CPM $=mrv-my\times KT$ & tota area C E I M eſt $mlv+mrv-my\times KT$; Unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem deſcriptam & aream reverâ deſcriptam eſſe $my\times KT$, quâ deficit area reverâ deſcripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percurſa cenſetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere ſubtrahi ex motu medio à quadraturâ ad ſyzygiam, illam evaneſcere in ſyzygia A, quia illic $my\times KT=0$, à ſyzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ continuatione.

2°. Ut

De Mundi Systemate.





313. 2°. Ut quantitas $mlc + mrc$ eſt ad Rectangulum yK × TK, ita eſt quadrans circuli CPAT ad aream quæ (propter variationem) detrahenda eſt ex areâ CTP motu mediocri deſcriptâ ſive, quoniam CPAT eſt dimidium facti radii in arcum CPA, & ea area detrahenda eſt etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $mlc + mrc$ ad $my \times TK$ ita arcus quadrantalis CPA ſive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l + r}$ ſive $\frac{PK \times TK}{l + r}$.

3°. Quoniam quantitates $lc + rc$, & arcus quadrantalis CPA ſunt quantitates conſtantes, manifeſtum eſt quod variationes in omnibus punctis P, ſunt ut PK×TK, ſive ut factum ſinus arcus CP in ejus Coſinum.

4°. Rectangulum TK×PK eſt maximum ubi punctum P eſt in octante, quod demonſtratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima, eſt in octantibus, unde fluit hoc Paradoxum, ubi vis EL maxima eſt, illic maximè retardatur Luna reſpectu motus ſui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui ſinus ille verſus, qui velocitatem genitam in* ſingulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* Nam velocitas quæ generatur exprimitur per aream CKFG (vide figuram textus) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, & area CKFG illic evadit æqualis areæ PKT, ergo velocitas in octantibus genita eſt ut TK per PK, ſed area quæ variationem illic exprimit eſt etiam ut TK per PK, (per hujuſce notæ corol. 3.) ergo velocitas in octantibus eſt ut ipſa variatio in octantibus, ſed velocitas in octanti-

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipſius diſtantiam à terrâ.

(y) Area, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis momentis deſcribit, eſt ut motus horarius lunæ & quadratum diſtantiæ lunæ à terrâ conjunctim; & propterea diſtantia lunæ à terrâ eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione areæ directè & ſubduplicatâ ratione motus horarii inversè. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciprocè ut ipſius diſtantiâ à terrâ. (z) Tentent aſtronomi quam probè hæc regula cum phænomenis congruat.

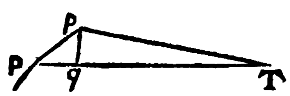
Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri poteſt.

PRO-

octantibus eſt ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ Radii ad ſinum verſum duplicatæ diſtantiæ ejus dati puncti à quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas creſcit ut velocitas in octantibus ideoque etiam ut variatio maxima, *ergo ſinus ille verſus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verum ex actione TM aliam variationis portionem oriri oſtenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut TK×PK per not. 114. mox adjiciendam conſtabit, ergo tota variatio erit ut TK×PK, ſive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas ſi agatur de totâ variatione.

(y) 113. *Area quam Luna ſingulis momentis deſcribit eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ à terrâ.* Deſignet TPp aream deſcriptam à Lunâ quovis



tempuſculo, ſitque Pp arcus curvæ cujuſlibet; centro T radio Tp deſcribatur arcus circularis pq qui pro rectâ perpendiculari in lineam TP aſſumi poteſt ideoque area à Lunâ deſcripta erit ut TP×pq, gradus autem, aut minuta in arcu pq contenta menſurabunt motum angularem Lunæ dato tempore qui æqualis eſt motui horario Lunæ, ideoque longitudo abſoluta ejus arcus pq erit ut ejus radius TP & motus horarius Lunæ conjunctim hinc area TP×pq erit ut TP² & motus horarius Lunæ conjunctim. 113.

(z) * *Tentent Aſtronomi.* Obſervando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus Periodi & ſimul angulum inter Solem & Lunam interceptum ut inde habeatur ejus diſtantia PTC à quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales diſtantiis PT Lunæ à Terrâ, nam, per præced. Prop. area à Lunâ deſcripta eſt ut ſumma numeri 219.46 & ſinus verſi dupli anguli PTC quæ ſi dividatur per motum horarium qui obſervatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut diſtantiæ PT, & inverſè ut Lunæ Diametri apparentes; Quare ſi hi etiam obſervati fuerint, collatio obſervationum cum numeris ſic inventis Regulam Newtonianam illuſtrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis Lunaris accuratiùs quam antehac definiri poteſt.* Or-

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra (c) vim ſolarem $2\,PK$ quâ gravitas acceleratrix lunæ in ſolem ſuperat gravitatem acceleratricem terræ in ſolem vel

113. bis Lunaris figura definiri poteſt per obſervationes Diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis à puncto quodam fixo, ſicque cum diſtantiæ Lunæ ſint his Diametris apparentibus reciprocæ, longitudines diſtantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum ſecari poſſunt & per eas extremitates duci poteſt curva orbi Lunari ſimilis: Sed obſervatio Diametri cujuſlibet corporis lucidi eſt nimis lubrica ut ſatis tuta eſſe poſſit hæc Methodus, facilius tutiuſque obſervabuntur motus horarius Lunæ ejuſque diſtantia à quadraturâ proxima, hinc itaque accuratius cognita ratione diſtantiarum Lunæ à terrâ in datis angulis accuratius definietur quam antehac orbis Lunaris.

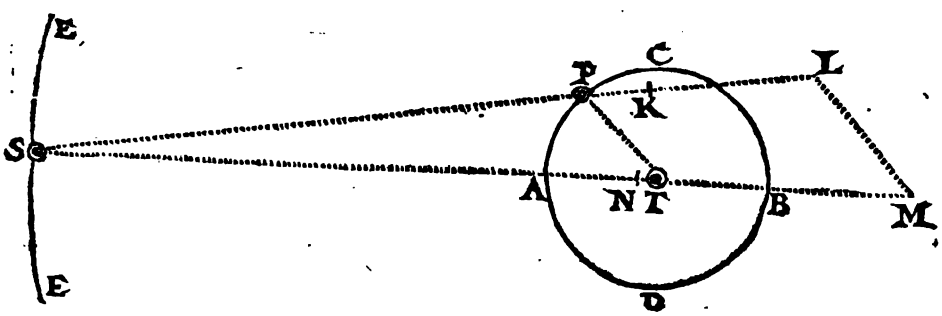
(b) *Curvaturas linearum* &c. Curvatura lineæ eſt ejus deflexio à Tangente, & æſtimari debet per Angulum inter Tangentem curvæ & curvam naſcentem interceptum; illi anguli ſunt ſemper quamminimi, ideoque, juxta principia Trigonometrica, ſuis ſinubus, ſuiſve Tangentibus ſunt proportionales, hinc Newtonus ponit curvaturas linearum eſſe in ultimâ proportione Tangentium angulorum contactus, ſi Tangentes illæ ad æquales radios referantur.

Radii illi æquales ad quos referuntur Tangentes illæ, deſcriberentur per continuationem velocitatis corporis uniformis ſecundum Tangentem curvæ, ideoque quantulicumque ſumantur tempora quibus deſcribentur erunt inversè ut illæ velocitates, Tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur ſunt attractionis effectus ſiquidem ſupponitur illam attractionem agere ſecundum perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus eſt ſemper ut ipſa vis & quadratum temporis per quod agere concipitur ſaltem ſi tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere cenſenda ſit; Ergo illæ Tangentes ſunt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè, & in eâdem ratione ſunt anguli contactus ſive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ſupra vim ſolarem $2\,PK$.* Ex iis quæ in Propoſitione XXV. demonſtrata ſunt, liquet per actionem Solis, Lunam à terrâ diſtrahi ubicumque ſita ſit per vim TM, ad illam verò attrahi per vim LM, vis TM ſive PL eſt ſemper æqualis 3 PK (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) & eſt PL Coſinus anguli ATP qui

vel ab eâ ſuperatur. In (d) quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris KT, quâ luna in terram trahitur. Et hæ (e) attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit

LIBER TERTIUS. PROP. XXVIII. PROBL. IX.



qui Coſinus in ſyzygiis eſt æqualis Radio, ita ut P T ſive L M eo in caſu ſit æqualis P.K, ergo Luna attrahitur ad terram in ſyzygiis per vim gravitatis & per vim L M ſive P K, & diſtrahitur ab ea per vim 2PK, ſupereſt itaque attractioni Lunæ in terram in ſyzygiis exceſſus gravitatis ſupra vim Solarem 2 P K.

(d) *In quadraturis* autem evaneſcit vis T M, attractio ergo Lunæ in terram eſt ſumma ejus gravitatis & vis L M ſive C T ſive K T quia in quadraturis puncta K & C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones ſi* $\frac{AT+CT}{2}$ *dicatur* N &c. Ex Propoſitione XXV. conſtat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe ſuo in mediocri ſua diſtantia N eſſe ad vim ſolarem mediocrem T M ut 178725 ad 1000, ideoque ad vim 2 P K in ſyzygiis æqualem 2 T M ut 178725 ad 2000, ſed diſtantiis AT, CT inæqualibus evadentibus variant iſtæ vires, eſt enim vis gravitatis in diſtantia N ad vim gravitatis in diſtantia A T ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideoque ſi prior exprimatur per 178725 erit poſterior $\frac{178725\,N^2}{AT^2}$, & ſimili ratiocinio vis gravitatis in diſtantia C T erit $\frac{178725\,N^2}{CT^2}$; Vires verò Solares 2 P K, K T, creſcunt ut ipſæ diſtantiæ quare ſi vis 2 P K in diſtantia N ſit 2000 in diſtantiâ A T erit $\frac{2000\,AT}{N}$, & ſi vis T M in quadraturis ſit 1000 in eâ diſtantiâ N, erit ea vis in diſtantia

11ſi

DE MUNDI SYSTEMATE. erit 3000; de quâ, ſi vis mediocris *ML* ſubducatur, manebit vis 2000 quâ luna in ſyzygiis diſtrahitur à terrâ, quamque jam ante nominavi 2 *PK*. Velocitas (f) autem lunæ in ſyzygiis *A* & *B* eſt ad ipſius velocitatem in quadraturis *C* & *D*, ut *CT* ad *AT* & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto deſcribit in ſyzygiis ad momentum ejuſdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut 11073 *CT* ad 10973 *AT*. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior ſemel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\, ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\, ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\, ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\, CTqq \times AT$, i. (h) e. ut $2151969\, AT \times CT \times N - 24081\, AT\ cub.$ ad $2191371\, AT \times CT \times N + 12261\, CT\ cub.$

Quo-

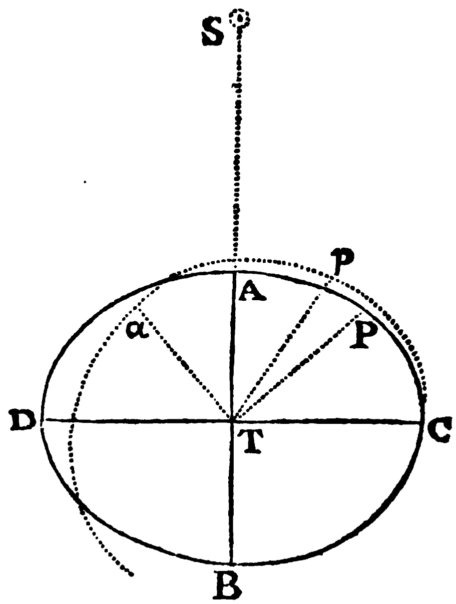
113. tantia CT, $\frac{1000\ CT}{N}$; hinc attractio in ſyzygiis fit $\frac{178725\ N^2}{AT^2} - \frac{2000\ AT}{N}$, & in quadraturis $\frac{178725\ N^2}{CT^2} + \frac{1000\ CT}{N}$, ſive omnia dividendo per N^2 eſt attractio in ſyzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\ AT}{N^2 \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\ CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N eſt medium Arithmeticum inter A T & C T quorum differentia eſt exigua, pro medio Geometrico inter eas quantitates proximè ſumi poteſt, ita ut fit $N^2 = AT \times CT$, quo valore ſubſtituto loco N^2 fit attractio in ſyzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ & reductione facta ad eoſdem denominatores ſunt iſtæ quantitates ut $178725\ N \times CT^2 - 2000\ AT^2 \times CT$ ad $178725\ N \times AT^2 + 1000\ CT^2 \times AT$.

(f) * *Velocitas Lunæ* &c. Quoniam in ſyzygiis & quadraturis arcus quos Luna deſcribit ſunt perpendiculares radiis A T, C T, areæ momenta dato tempore illic deſcripta ſunt ut illi arcus & Radii A T, C T conjunctim, ii arcus dato tempore deſcripti ſunt ut velocitates, ergo velocitates in ſyzygiis & quadraturis ſunt ut arearum deſcriptarum momenta & Radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè & ratio* ſimplex attractionum *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis Lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis* &c.

(h) * *i. e. ut.* Dividendo per AT×CT, numeros ſigno × conjunctos in ſe invicem multiplicando neglectiſque quatuor ultimis productorum cifris.

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus ellipſin $DBCA$, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis major DC quadraturis, minor AB ſyzygiis interjaceat. (i) Cum autem planum ellipſeos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam conſideramus deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omnino deſtituitur: conſideranda erit figura, quam luna in ellipſi illa revolvendo deſcribit in hoc plano, hoc eſt figura Cpa, cujus puncta ſingula p

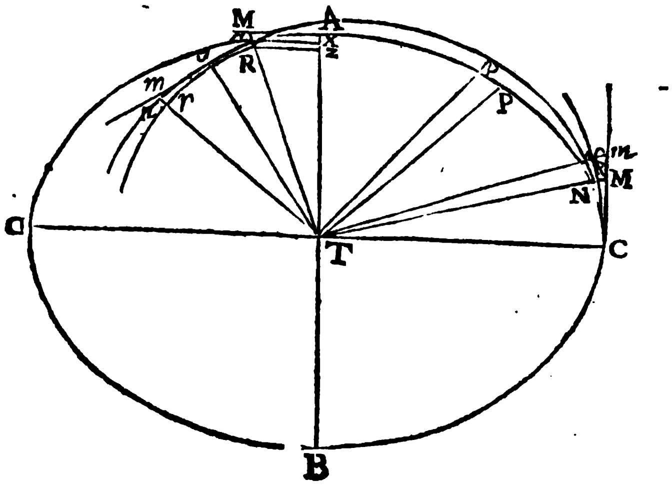


inveniuntur capiendo punctum quodvis P in ellipſi, quod locum lunæ repræſentet, & ducendo Tp æqualem TP, eâ lege ut angulus PTp æqualis ſit motui apparenti ſolis à tempore quadraturæ C confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus CTp ſit ad angulum CTP ut tempus revolutionis ſynodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ ſeu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eâdem ratione ad angulum rectum CTA; & ſit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a apſis ima & C apſis ſumma orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis Cpa in vertice a, & curvaturam circuli centro T intervallo TA deſcripti, ſit ad differentiam inter curva

(i) * *Cum autem planum Ellipſeos hujus motu angulari circa terram revolvatur.* Axis enim minor hujus Ellipſeos ad Solem perpetuò dirigitur, ideoque eodem motu quo ſol circa terram revolvitur axis iſte ſive planum Ellipſeos circa terram fertur.

(l) * *Quod eodem ferè recidit* quia Lunæ motus medius ab ipſius motu vero non multùm diſcrepat.

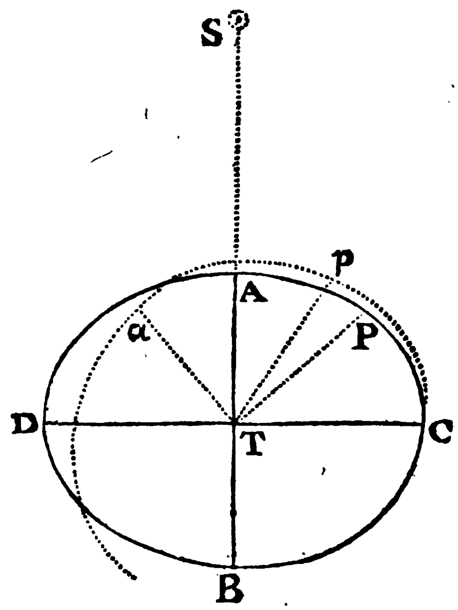
vaturam ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem circuli; in (m) duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp; & (n) quod curvatura ellipſeos in A ſit ad curvaturam circuli illius,



113. (m) * *In duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp.* Centro T intervallo TA deſcribatur circuli arcus ARar, ſit arcus AR ad arcum ar in ratione datâ anguli CTP ad angulum CTp, ducantur Radii TR, Tr & producantur ita ut Tangentibus in A & a ductis occurrant in M & m, occurrant vero Ellipſi in N, & curvæ Cpa in n; erit NR = nr, quia ex conſtructione Tn ſumitur æqualis TN, & radii TR, Tr ſunt æquales; Evaneſcentibus autem arcubus ra & RA curvatura orbis Cpa in a erit ad curvaturam circuli radio TA deſcripti, ut mn ad mr, & ideo differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA deſcripti eſt ad curvaturam ejuſdem circuli ut mr − mn ſive nr aut RN ad mr, ſimili modo patet quod curvatura circuli radio TA deſcripti eſt ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem circuli ut MR ad NR. Ideoque compoſitis rationibus differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA deſcripti, eſt ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in A & curvaturam ejuſdem circuli ut MR ad mr, hoc eſt, (Cor. I. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcus RA ad arcum ra, ſive (per conſt.) in ratione duplicata anguli CTP ad angulum CTp.

(n) * *Et quod curvatura Ellipſeos in A &c.* Curvatura Ellipſeos in A eſt ad curvaturam circuli radio TA deſcripti in ratione MN ad MR; Ducatur verò NX tangenti parallela, & axi occurrens in X, & pariter RZ, erit per proprietatem Ellipſeos $AX \times XB$ ad NX^2 ut TA^2 ad TC, & per proprietatem circuli erit $AZ \times ZB = RZ^2$, ſed quia ſumuntur quantitates naſcentes eſt $AX = MN$, $AZ = MR$, $XB = AB = ZB$ & $NX = RZ$, quibus valoribus ſuo loco ſubſtitutis prima proportio evadit $MN \times AB : MR \times AB :: TA^2 : TC^2$ ideoque eſt MN ad MR, ſive curvatura Ellipſeos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione TA ad TC.

lius, in duplicatâ ratione TA ad TC; & (°) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro T intervallo TC deſcripti, ut TC ad TA; (p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipſeos in C, in duplicatâ ratione TA ad TC; & (q) differentia inter curvaturam ellipſeos in vertice C & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ Cpa in vertice C & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicatâ ratione anguli CTp ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His (r) autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ



(o) * *Curvatura circuli* &c. Nam circulorum curvaturæ ſunt inverſè ut eorum radii (not. 121. lib. 1.).

(p) * *Hujus autem curvatura*, poteſt demonſtrari eo ipſo modo quo demonſtravimus rationem curvaturæ Ellipſeos in A ad curvaturam circuli radio T A deſcripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice* C &c. Demonſtratio ferè eadem eſt ac in notâ (m): Centro C intervallo T C deſcribatur circuli arcus C R r, ſit arcus C R ad arcum C r, in ratione anguli C T P ad angulum C T p ducatur Tangens C M m, & Radii T R M, T r m quorum prior occurrat Ellipſi in N, poſterior curvæ C p a in n, erit N R = n r propter æquales T N, T n per curvæ conſt. & Radios æquales T R, T r; Evaneſcentibus arcubus C N, C n, curvatura Ellipſeos in C eſt ad curvaturam circuli radio T C deſcripti ut M N ad M R, ideoque curvaturarum Ellipſeos & circuli differentia eſt ad curvaturam circuli ut R N ad M R, ſimili modo curvatura circuli eſt ad curvaturam orbis C p a ut m r ad m n, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis C p a & circuli ut m r ad r n: itaque compoſitis rationibus erit curvaturarum Ellipſeos & circuli differentia ad curvaturarum orbis C p a & circuli differentiam ut m r ad M R hoc eſt in ratione duplicata arcus r C ad arcum R C, ſive in ratione duplicatâ anguli C T p ad angulum C T P. 113.

(r) *His autem inter ſe collatis* &c. Ut pateat ordo quo iſtæ rationes componuntur, dicatur *s* tempus revolutionis Synodicæ, & *t* tempus revolutionis Periodicæ, eritque angulus C T P ad angulum C T p ut *t* ad *s*.

guræ Cpa in a ad ipſius curvaturam in C, ut $AT\,cub. + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\,cub. + \frac{16824}{100000} ATq + CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, & $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.

Igitur cum a deſignet ſyzygiam lunæ, & C ipſius quadraturam proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\, CTqq - 2151969\, N \times CT\,cub. + 368676\, N \times AT \times CTq + 36342\, ATq \times CTq - 362047\, N \times ATq \times CT + 2191371\, N \times AT\,cub + 4051{,}4\, ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT ſemiſumma N ſcri-

113. (1) Differentia curvaturarum orbis C p a in a & circuli radio T A deſcripti, eſt ad differentiam curvaturarum Ellipſeos in A & ejuſdem circuli ut tt ad ss (not. m).

(2) Curvatura Ellipſeos in A ad curvaturam circuli radio T A deſcripti ut TA^2 ad TC^2 (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum Ellipſeos in A & circuli eſt ad curvaturam ejuſdem circuli ut $TC^2 - TA^2$ ad TC^2: & per compoſitionem 1^æ^. & 3^æ^. proportionis

(4) Eſt differentia curvaturarum orbis C p a in a & circuli radio T A deſcripti ad curvaturam ejuſdem circuli ut $tt \times \overline{TA^2 - TC^2}$ ad $ss \times TC^2$,

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis C p a in a ad curvaturam circuli radio T A deſcripti ut $ss\, TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$ ad $ss \times TC^2$.

(6) Curvatura circuli radio T A deſcripti, ad curvaturam circuli radio T C deſcripti ut T C ad T A.

(7) Curvatura circuli radio T C deſcripti ad curvaturam Ellipſeos in C ut TA^2 ad TC^2.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio T C deſcripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli & Ellipſeos in C ut TA^2 ad $TC^2 - TA^2$.

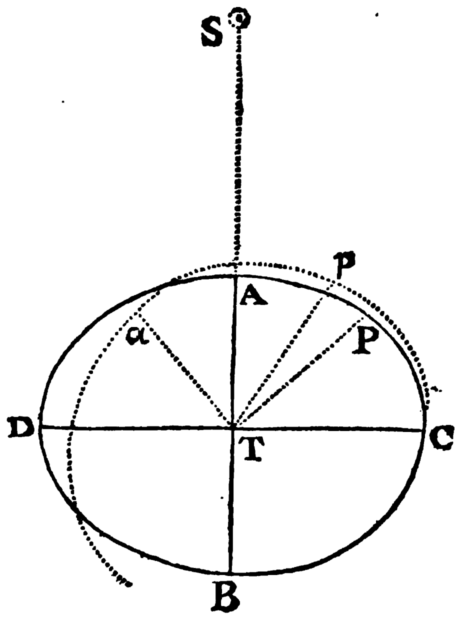
(9) Differentia curvaturarum ellipſeos in C & ejus circuli radio T C deſcripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C & ejuſdem circuli ut ss ad tt; & per compoſitionem 8^æ^. & 9^æ^. proportionis eſt

(10) Curvatura circuli radio TC deſcripti ad differentiam curvaturarum figuræ C p a in C & ejuſdem circuli ut $TA^2 \times s^2$ ad $tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio T C deſcripti ad curvaturam figuræ C p a in C ut $TA \times s^2$ ad $TA^2 \times s^2 + tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo & per compoſitionem 5^æ^. 6^æ^. & hujus 11^æ^. proportionis, eſt curvatura orbis C p a in a, ad ejus curvaturam in C ut $s^2 \times TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2} \times TC$

ſcribo 1; & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: (ſ) quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſolutâ, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde ſemidiameter CT fit 1,00719, & ſemidiameter AT 0,99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Eſt igitur diſtantia lunæ à terrâ in ſyzygiis ad ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſitâ ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.



PRO-

$\times TC \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ diviſa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $s^2 - tt \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $s^2 - tt \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibuſque diviſis per tt & inverſo terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. E. I.

(ſ) *Quibus in æquatione ſcriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\ x^4 - 5082017.44\ x^3 + 148262.14\ x^2 - 12307251.44\ x + 88487.19 = 0$, ſed cum x debeat eſſe quantitas exigua omnes terminos præter duos ultimos negligit, & ex æquatione $12307251.44\ x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$. 113

(t) * *Eſt igitur diſtantia Lunæ à Terrâ* &c. Aſtronomis eſt cognitum, quod ſi diſtantia mediocris Lunæ à Terra incidat in tempus ſyzygiarum, ea diſtantia mediocris minor erit quam ſi incidat in tempus quadraturarum; Clar. Halleius ex obſervationibus Aſtronomicis deduxit diſtantiam mediocrem Lunæ à Terrâ in Syzygiis eſſe ad ipſius diſtantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod ſi vel tantillùm propter obſervationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur facile accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit ſuo calculo.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto deſcribit. Si luna *P* in ellipſi *DBCA* circa terram in centro ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto deſcriberet aream *CTP* tempori proportionalem; eſſet autem ellipſeos ſemidiameter maxima *CT* ad ſemidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii à quadraturâ *C* com-

113. (u) * *Oritur hæc linæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypotheſi quod ſemotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propoſitione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio aſſumitur quæ ad centrum terræ ſpectat & cum gravitate Lunæ verſus terram *sociatur*; itaque, ſumpto novam figuram orbis Lunaris ad Ellipſim poſſe revocari, demonſtrat in Prop. præcedente eam Ellipſim talem eſſe ut axis major ſit ad minorem ut 70 ad *69*; Motus autem Lunæ in tali Ellipſi debet fieri ita ut areæ deſcriptæ circa centrum terræ ſint temporibus proportionales, quia vires quæ aſſumuntur ad id centrum diriguntur; cumque areæ illæ Ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non ſint, ſequitur illos angulos in centro factos temporibus proportionales non eſſe, ideoque aliquid corrigendum eſſe motui medio Lunæ, in quo Anguli in centro terræ facti proportionales temporibus aſſumuntur, ut habeatur Lunæ motus Verus; & hæc correctio conſtituet partem variationis, quæ eſt, in hâc hypotheſi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ & locum ejus verum & hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ* quam aſſumit *orbis Lunaris* per Solis actionem *oritur*.

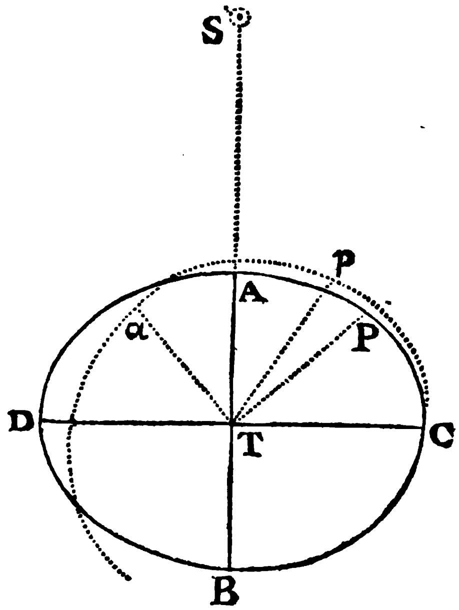
Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam conſideravit Newtonus Prop. XXVI. & quâ fit ut ipſæ areæ à Lunâ deſcriptæ temporibus non ſint proportionales, area itaque tempori proportionalis corrigenda eſt, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per conſtructionem Probl. noſtri n. 110. determinare facillimum erit, quam quidem conſtructionem non dedit Newtonus, quaſi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, & bono aſſumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel ſimilem conſtructionem reſpexerit, ii enim non erant caſus quibus hæc media ſine demonſtratione aſſumi poſſent à Viro ſummè accurato & perſpicace.

(x) * *Foret Arguli Tangens.* Sit C A D B ellipſis quam Luna deſcribit, ita ut areæ circa centrum T ſint temporibus proportionales, deſcribatur circulus eodem centro, radio T C, in ejus circuli circumferentia moveatur Luna motu medio, ſumaturque in eo circulo arcus C Π tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata Π P K, dico quod area Elliptica T C P erit tempori proportionalis hoc eſt quod tota area Elliptica erit ad eum ſectorem T C P ut eſt tempus Periodicum Lunæ ad tempus datum.

Eſt enim tota circuli circumferentia ad arcum C Π, ſive totus circulus ad aream

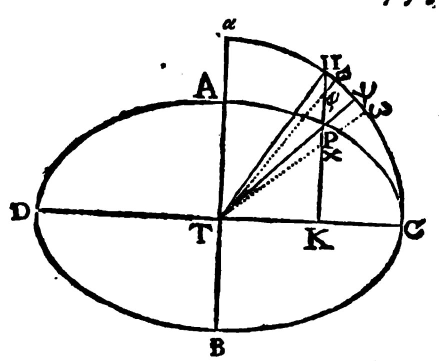
C T

computati, ut ellipſeos ſemidiameter *T A* ad ejuſdem ſemidiametrum *TC* ſeu 69 ad 70. (y) Debet autem deſcriptio areæ *C T P*, in progreſſu lunæ à quadraturâ ad ſyzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygiâ lunæ ſit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in quadraturâ ſit ut quadratum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli diminuatur in ſubduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073.



C T Π, ut tempus Periodicum totum ad tempus datum ex conſtructione, ſed ex notâ circuli & Ellipſeos proprietate, eſt tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, & pariter eſt ſector CTP ad CT Π ut T A ad C T (nam Triangula Rectilinea TPK, T Π K ſunt ut baſes PK, Π K; areæ curvilineæ CPK, C Π K ſunt etiam, ex notâ Ellipſeos & circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti ſectores C T P, C T Π ſunt ut P K ad Π K, quæ ſunt ut T A ad C T,) ergo tota area Elliptica eſt ad aream circuli ut ſector C T P ad C T Π, & alternando, tota area Elliptica ad ſectorem C T P, ut eſt circuli area ad C T Π, ſeu ut eſt Tempus Periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area C T P ſit tempori proportionalis, motus Lunæ qui à terrâ videri debuiſſet ſub angulo C T Π ſi Luna motu medio fuiſſet lata, videbitur ſub angulo C T P, & ſi linea TK pro radio aſſumatur erit K P tangens anguli C T P, &

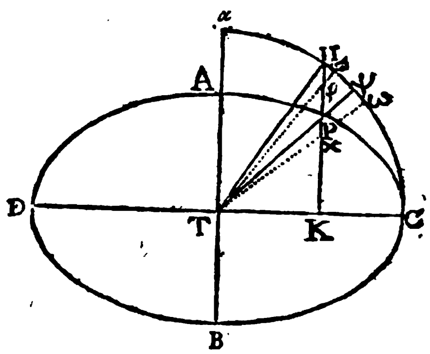


K Π tangens Anguli C T Π, ſed eſt P K ad Π K ut T A ad CT, ergo *tangens anguli CTP eſt ad tangentem anguli motus medii ut T A ad T C ſeu 69 ad 70.* 113.

(y) * *Debet autem deſcriptio areæ &c.* Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. & 113., expoſita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{l+r}$ (per cor. 2. not. 113.) ſumatur ergo in arcu C Π verſus C arcus

11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli CTP jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus CTP in octantibus, ubi motus medius eſt 45^{gr}. invenietur 44^{gr}. 27′. 28″. qui ſubductus de angulo motus medii 45^{gr}. relinquit (z) variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita ſe haberent ſi luna, pergendo à quadraturâ ad ſyzygiam, deſcriberet angulum CTA graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo ſol in conſequentia motu apparente transfertur, luna, priuſquam ſolem aſſequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ ſive (quia in hâc figura Π reſpondet litteræ P in not. 110 aſſumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur ϖT quæ ſecet lineam ΠK in ϕ Triangulum $\Pi\varpi\phi$ ſimile erit Triangulo TKϕ, ſive propter exiguitatem anguli ΠTϖ Triangulum $\Pi\varpi\phi$ ſimile erit Triangulo TKΠ, hinc erit TK ad TΠ (r) ſicut $\Pi\varpi$ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad $\Pi\phi$ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit K$\phi$ $(= \Pi K - \Pi\phi)$ $= \frac{\overline{l+r} \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \phi K$; ſi verò ſumatur TK pro radio, erit ΠK Tangens motus medii & ϕK Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proximè, Tangens PK motus Lunæ in Ellipſi ſpectatæ aut ſaltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, ſit medium Arithmeticum inter $l+2r$ ſive 11073 & l ſive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum ſit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, ſatis accurate fieri dicit ſi ſumatur Tangens PK ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10973, ſive in ſubduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ eſt æqualis rationi 69 ad 68.6877 cum ergo ſit ΠK ad PK ut 70 ad 69, & cum ſit PK ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68.6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68.6877. Q. E. D.



(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum eſſe in octantibus conſtat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris etiam maximam eſſe in octantibus hoc modo patet, producatur TP in Ψ & cum arcus $\Pi\Psi$ vix excedat ſemigradum ubi maximus eſt pro recta ſumatur, erit Triangulus $\Pi\Psi$P ſimilis Triangulo TKP, ſive TKΠ ideoque eſt TΠ ad TK ut ΠP ad $\Pi\Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, ſed quoniam eſt ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad

quitur, deſcribit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris ſynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eſt, in ratione $29^d. 12^h. 44'.$ ad $27^d. 7^h. 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ ſecus eſſet $32'. 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'. 10''$.

Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantiâ ſolis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique ſolis actione in lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In (b) aliis diſtantiis ſolis à ter-

ad ΠP ideoque eſt $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ & arcus $\Pi \Psi$ erit $\frac{\Pi K \times TK}{70\, T\Pi}$, jam autem demonſtratum eſt nota 111. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times TK$ eſt in octantibus, ergo arcus $\Pi \Psi$ ſive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris eſt maxima in Octantibus ſicut & altera portio, ergo Variatio tota eſt maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri poſſint.* Hactenus ſuppoſitum eſt, lineam DTC repræſentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem abſolutè verum non eſt, quippe ſemi-Diameter orbis Lunaris ſub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus DC eſt 20′ circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura eſt circiter 20′ propior conjunctioni quam oppoſitioni, quæ conſideratio hic neglecta eſt.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, ſi vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(ST-TA)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibboſam ut $\frac{1}{(ST+TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{ST-TA}^2 \times \overline{ST+TA}^2$ ſive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, 114.
vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; Hinc exceſſus vis in Lunam novam ſupra vim mediocrem eſt $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; Et exceſſus vis mediocris ſupra vim in Lunam plenam eſt $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem exceſſus differunt, & prior poſteriorem ſuperat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; Verum propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evaneſcit ferè hæc exceſſuum differentia reſpectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti.

(b) *In aliis diſtantiis Solis à Terrâ.* Duplex eſt cauſa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis ſolis mediocris mutatur inversè ut quadrata diſtantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior eſt vel remotior à Terra, Luna é converſo ipſum tardius vel celerius attingit, unde menſis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem menſis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ causâ, ſi ſola conſideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ creſcat, quod quidem ſeparatim demonſtrandum de utrâque variationis portione $\Pi \Psi$ & $\Psi \omega$; Et quidem in octantibus cum Triangulum $\Pi P \Psi$ ſit Rectangulum Iſoſceles, eſt $\Pi \Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, eſt verò $\Pi P = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipſeos

DE MUNDI SYSTEMATE. râ, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus perigæo 37′. 11″, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000. Hac-

114. eſt αT ad AT ut ΠK ad PK & dividendo αT ad αA ut ΠK ad $\Pi P = \frac{\alpha A \times \Pi K}{\alpha T}$ ſed in octante eſt $\Pi K = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $\Pi P = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $\Pi \Psi = \frac{\alpha A}{2}$, eſt autem αA effectus virium Solis Lunam retrahentium à ſuo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo ſi id tempus creſcat manentibus iiſdem viribus ſimiliter agentibus, effectus totus αA erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque ΠΨ creſcit ſecundum quadrata temporum.

Idem demonſtrabitur de portione variationis Ψω quæ pendet ex acceleratione deſcriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. 111. & fig. 3ª. recta CA majus tempus deſignare cenſeatur, & partes Pp tempuſcula in eadem ratione longiora, lineæ PM deſignant velocitates genitas durante momento Pp, ſi ergo id momentum creſcat viribus generatricibus iiſdem manentibus, velocitates genitæ PM creſcent in proportione temporis, & quia PpMm deſignat ſpatiolum illâ velocitate percurſum, creſcuntque & PM & Pp in ratione temporum, creſcet PMmp in ratione duplicatâ temporum, cumque ſingula elementa curvæ in eâ proportione creſcant, & tota area CAH, & ei æqualis CAXY, ejuſque dimidia CQZY in eâdem proportione creſcent; ex quâ ſi detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ ΨTω eſt proportionale creſcet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio Tω, ipſe arcus Ψω creſcet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum ΠΨ creſcat in duplicatâ ratione temporum tum etiam Ψω, ſumma itaque Πω ſive tota variatio creſcet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod ſi ſpectetur imminutio actionis Solis propter auctam diſtantiam variatio maxima decreſcet in ratione triplicatâ diſtantiarum, nam deſignetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, eſt ex conſtructione SK ad TM ut vis Solis ſive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM eſt ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ eſt æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decreſcit ut diſtantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, ſed vi mutatâ ſecundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius oſtendetur utramque variationis maximæ partem ΠΨω & Ψω forè inversè in ratione triplicatâ diſtantiarum Solis; *Hincque in variis Solis à terrâ diſtantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter ſe in ratione duplicatâ durationis menſis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè diſtantiæ ſolis à terrâ.*

(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, ſi prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur *m* diſtantia mediocris Solis, ſit ± *e* exceſſus vel defectus ejus diſtantiæ à mediocri diſtantiâ in loco quovis dato; denique dicatur *s* ſolis motus horarius mediocris, dico quod ſolis motus

Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat à terrâ quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio

LIBER TERTIUS. PROP. XXIX. PROBL. X.

tus horarius in loco quovis ſuæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}^2}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore deſcripta, ejus areæ valor ubivis erit ſemper idem, ſit p q arcus ra-



dio T p deſcriptus, qui ob exiguitatem ſumi poteſt ut ipſum perpendiculum in baſim P T demiſſum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inverſè ut baſis T P, ſed numerus graduum ejus arcus p q eſt directè ut is ipſe arcus & inverſè ut ejus radius T p ſive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q eſt in ratione duplicatâ inverſa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, eſt inverſè ut quadratum radii T P; cum ergo in diſtantiâ mediocri eſt T P $= m$, in quâvis aliâ diſtantiâ eſt T P $= m \pm e$, ergo eſt $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis diſtantiâ T P.

In diſtantiâ mediocri evaneſcit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ ſecundum hypotheſim.

2°. Poſito Lunam ſemper moveri motu ſuo horario mediocri, qui dicatur l, ſitque p ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio menſis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}^2 \times l p}{\overline{m \pm e}^2 l - m^2 s}$ ſive divisâ hâc quantitate per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet menſis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$. 114.

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis menſe Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e}^2}$ ut $360 + x$ ad x, & dividendo $m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Lunâ percurrat 360 gr. tempore p, abſolvet $360^{gr.} + \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ ſive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2 m e l p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ ſive $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas diviſa per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio menſis Synodici in diſtantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In diſtantia mediocri evaneſcente quantitate $\pm e$ menſis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menſes Synodicos in

aliis

DE MUNDI SYSTEMATE.

tio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro regulâ hîc allatâ: ſed exceſſum vel defectum ab aſtronomis per phænomena determinandum relinquo.

114. aliis quibuſve diſtantiis ut $\frac{m^2}{l-s}$ ad $\frac{\overline{m\pm e}^2}{l-s\pm\frac{2el}{m}+\frac{e^2l}{m^2}}$.

3°. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m\pm e}{\overline{l-s\pm\frac{2el}{m}+\frac{e^2l}{m^2}}^2}$: Nam, ex hâc ipsâ Propoſitione variatio maxima eſt directè ut quadratum temporis Synodici & inversè ut cubus diſtantiæ ſive in ratione compoſitâ quantitatum $\frac{\overline{m\pm e}^4}{\overline{l-s\pm\frac{2el}{m}+\frac{e^2l}{m^2}}^2}$ & $\frac{1}{\overline{m\pm e}^3}$ ideoque ut $\frac{m\pm e}{\overline{l-s\pm\frac{2el}{m}+\frac{e^2l}{m^2}}^2}$.

Coroll. In diſtantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ & eam ſuperius determinavit Newtonus ferè 35″ 10‴ ſive 2110‴; Hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ Solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ ad $\frac{m\pm e}{\overline{l-s\pm\frac{2el}{m}+\frac{e^2l}{m^2}}^2}$ ita 2110‴ ad variationem maximam quæſitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l-s}^2}{\overline{l-s\pm\frac{2el}{m}+\frac{e^2l}{m^2}}^2}\times\frac{m\pm e}{m}\times 2110'''$, (ſive accuratius $\times$ 2109‴.8.)

Ratio autem motus horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore Periodico utriuſque inter ſtellas fixas, itaque cum tempus Periodicum Lunæ ſit 27^d. 7^h. 43′ & annus ſidereus Solis 365^d. 6^h. 9′ & velocitates mediocres ſive motus horarii mediocres ſint inversè ut iſta tempora Periodica erit l ad s ut 1.081 ad 0.81 ideoque erit $l-s=1$, & Variationis maximæ expreſſio fiet $\frac{1}{\overline{1\pm\frac{2.162e}{m}+\frac{1.081e^2}{m^2}}^2}\times\frac{m\pm e}{m}\times$ 2109.8‴. Cumque m ſit 1000 & in Apogæo $\frac{m+e}{m}$ ſit 1.016 $\frac{15}{16}$ in Perigæo vero ſit $\frac{m-e}{m}=.983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴ efficiunt in Apogæo 2145.5‴ & in Perigæo 2074‴, ſed cum ſit $e=16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162e}{m}$ evadit .036618875 & $\frac{1.081e}{m^2}$ eſt .00031027. Unde quantitas $1+\frac{2.162e^2}{m}+\frac{1.081e^2}{m^2}$ ſit 1.03665 & $1-\frac{2.162e}{m}+\frac{1.081e^2}{m^2}$ ſit .9637.

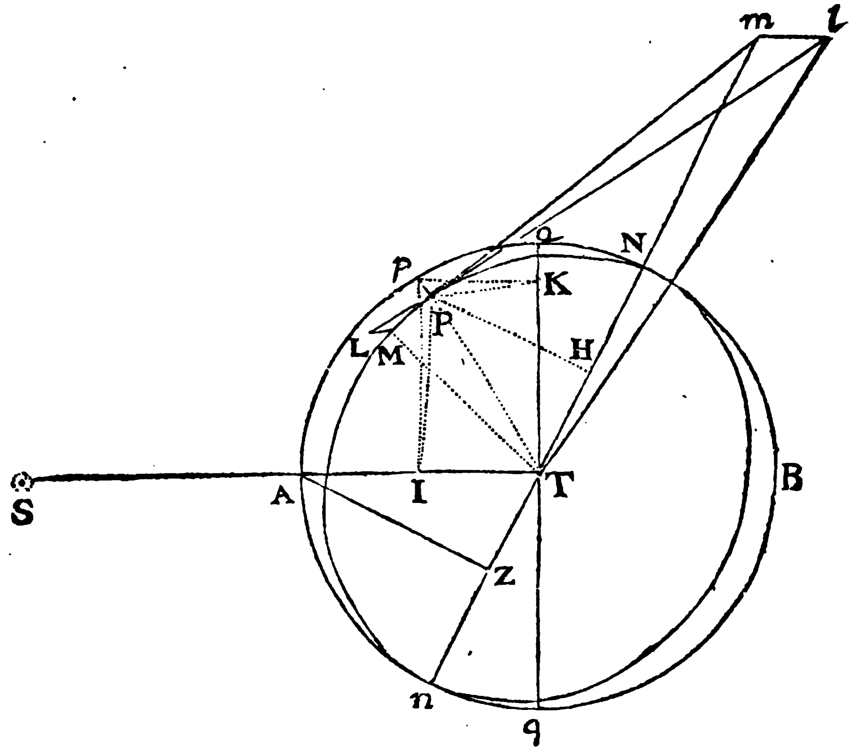
Dividatur ergo bis 2145′.5‴ per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in Apogæo 1994‴ ſive 33″. 14‴, & dividatur bis 2074‴ per .964 quotiens dabit variationem maximam in Perigæo quam proximè 2231 ſive 37″ 11‴.

PRO

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Deſignet S ſolem, T terram, P lunam, NPn orbem lunæ, Npn (d) veſtigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos,

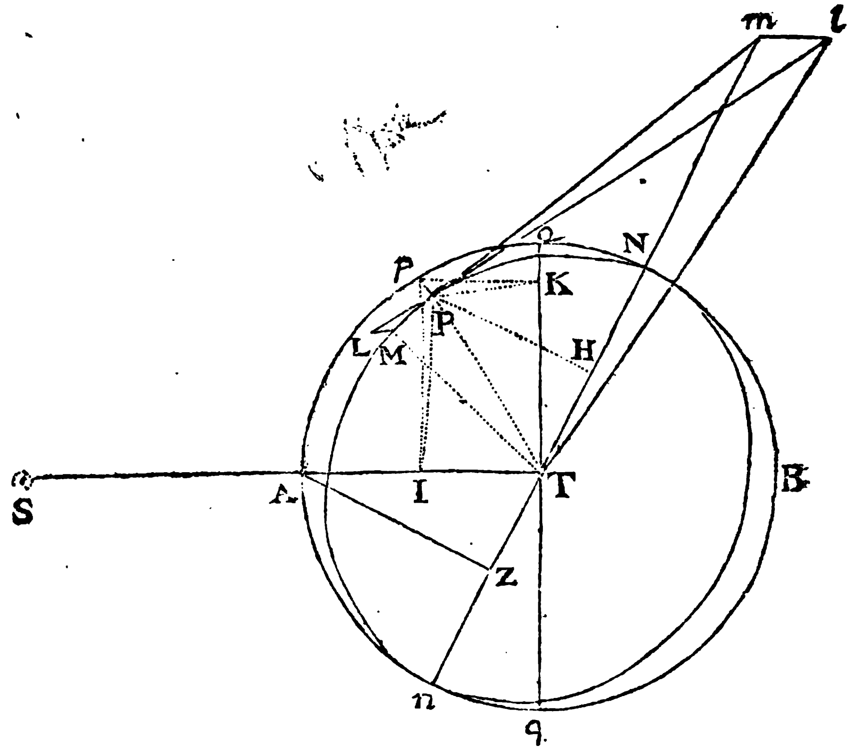


$nTNm$ lineam nodorum infinitè productam; PI, PK perpendicula demiſſa in lineas ST, Qq; Pp perpendiculum demiſſum in planum eclipticæ; A, B ſyzygias lunæ in plano eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam nodorum Nn; Q, q quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam Qq

(d) * *Veſtigium orbis in plano Eclipticæ.* Hoc eſt orbis genitus demittendo ex ſingulis punctis orbitæ Lunaris perpendicula ad planum Eclipticæ. 114

De Mundi Systemate.

Qq quadraturis interjacentem. Vis ſolis ad perturbandum motum (per prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ LM in ſchemate propoſitionis illius, altera lineæ MT proportionalis. Et luna vi priore in terram, poſteriore in ſolem ſecundum lineam rectæ ST à terrâ ad ſolem ductæ parallelam trahitur. Vis prior



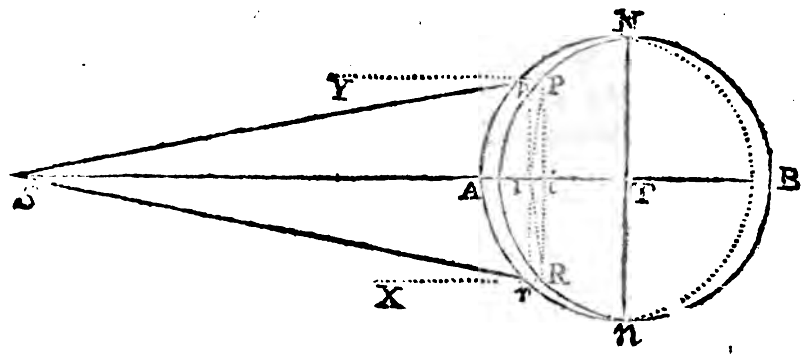
LM agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT quâ planum orbis lunaris perturbatur eadem (e) eſt cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et (f) hæc vis (per prop. xxv.) eſt ad vim

314. (e) * *Eadem eſt cum vi 3 PK* (Prop. XXV. not. u).

(f) * *Et hæc vis eſt ad vim qua Luna in circulo circa terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet.* Vis T M T eſt ad vim M L ut eſt 3 P K ſive 3 I T ad Radium, (Prop. XXVI. not. x); vis M L eſt ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. r). Ergo, ex æquo, & conjunctis rationibus, eſt vis M T ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut eſt 3 I T ad Radium circuli multiplicatum per 178.725.

quâ lunâ in circulo circa terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut 3 IT ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes à lunâ ad ſolem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à terrâ ad ſolem ducitur, (g) propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Deſignet



(g) * *Propterea quod Inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus caſibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, ſint nodi in quadraturis, ſpecteturque Luna in punctis P & R æqualiter à quadraturis N & n diſtantibus & vis obliqua Solis SP, SR in ipſam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam Parallelam lineæ ST, ſecundum directiones PY, RX agentem, alteram huic perpendicularem ſecundum directiones PI, RI; de effectu vis ſecundum directiones PY, RX agentis in hoc Problemate actum eſt; directiones verò PI, RI ſeſe mutuo compenſant; dividatur enim rurſus vis PI, RI in duas vires unam Pi, Ri ſecundum planum orbitæ Lunaris agentem ideoque nodorum poſitionem non turbantem, alteram Pp, Rr ipſi perpendicularem; hæc nodorum poſitionem, planique inclinationem afficiet, ſed cum de plani inclinatione hic non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis Pp, Rr dum admovet puncta P & R ad Eclipticam efficit ut nodis viciniores videantur ſeu ut nodi verſus puncta illa moveri cenſeantur, ideoque actio in punctum P efficit ut nodus N in conſequentia feratur & actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideoque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogreſſivum nodi natum ex vi PY parallela lineæ ST tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogreſſivum natum ex vi RX. 114

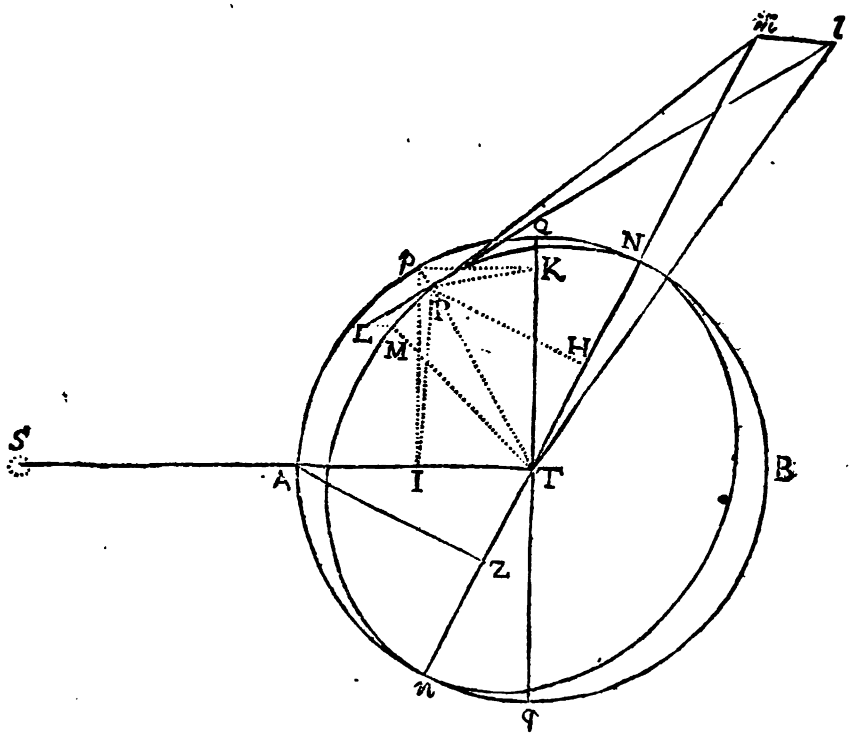
DE MUNDI SYSTEMATE.

Deſignet jam *PM* arcum, quem luna dato tempore quam minimo deſcribit, & *ML* lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfatâ $3IT$, eodem tempore deſcribere poſſet. (h) Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi ſecent planum eclipticæ; inque *Tm* demittatur perpendiculum *PH*. Et quoniam recta *ML* parallela eſt plano eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi *LMPml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula *LMP*, *lmP*. Jam cum *MPm* ſit in plano orbis, in quo luna in loco *P* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *Nn* per orbis illius nodos *N*, *n* ductam. Et quoniam vis quâ dimidium lineolæ *LM* generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco *P* impreſſa eſſet, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet *LP*, atque ideo transferret lunam de plano *MPmT* in planum *LPlT*; motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo *mTl*. Eſt

114. (h) * *Et ML lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi 3IT* deſcriberet tempore quo Luna arcum PM percurreret; Aſſumit utique Newtonus ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3IT quæ exercitæ fuerunt dum arcus PM percurritur *ſimul & ſemel in loco P impreſſas eſſe*, ſicque motum Lunæ ex P motæ, eſſe compoſitum ex velocitate acquiſitâ ſecundum Tangentem, & ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3IT agentem tempore æquali illi quo deſcribitur arcus PM, ita ut Lunâ ſequatur Diagonalem Parallelogrammi cujus unum latus ſit PM alterum vero Parallelum & æquale lineæ LM; cum autem vis 3IT exiguo temporis intervallo ſenſibiliter non mutetur, toto tempore quo deſcriberetur lineola PM ea vis pro uniformi adſumi poteſt, hinc via quæ deſcribitur per velocitatem uniformiter creſcentem ab eâ vi 3IT genitam eſt dimidia ejus viæ quæ deſcriberetur per ultimam velocitatem in fine temporis PM genitam, & uniformem manentem toto tempore PM, quod eâdem ratione probari poteſt ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod ſi quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræſentet locum Lunæ, & locum ejus veriorem fore in medio inter M & L, reſpondemus ſolutionem hujus Problematis ex eâ poſitione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim ſolutio duabus conſtat partibus, priori ſtatuitur ratio motus nodorum in quibuſvis punctis P orbitæ Lunaris, & hæc ratio eadem eſt ſive ubique ſumatur tota ML aut ubique ejus dimidium, dimidia enim ſunt totis proportionalia; In ſecunda ſolutionis parte determinatur quantitas motus nodorum in ſyzygiis ipſis, reſpectu motus Lunæ in ſuâ orbita, & in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ LM, ſed tota hæc ſolutionis pars pendet ex proportione ipſius vis 3IT ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus eſt in hoc calculo ex hâc falsâ ſuppoſitione Lunam in puncto L verſari cum in medio inter L & M collocanda fuiſſet.

Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, (i) ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, ſi (k) mo-



do angulus TMl rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideo-

(i) * *Ut Rectangulam IT × mP.* Linea ML eſt duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3 IT percurritur, vis illa 3 IT dato illo tempore uniformis manere cenſetur, itaque in diverſis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3 IT percurſæ ſunt ut illæ vires 3 IT, ſive ut IT, ergo ML ejus viæ duplum eſt etiam ut IT, & MI × mP eſt ut IT × mP.

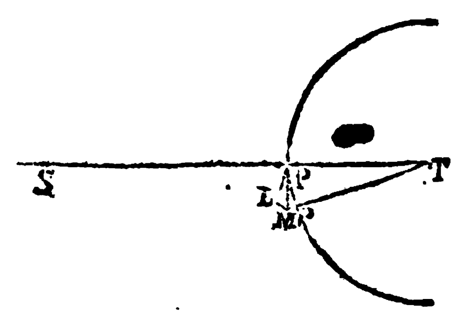
(k) * *Si modo angulus Tml ſit rectus* cum angulus mTl ſit admodum exiguus, ſi angulus Tml ſit rectus, uſurpari poterit recta ml pro arcu circuli cujus radius eſt Tm ideoque (154. lib. 1.) angulus mTl eſt ut $\frac{ml}{Tm}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

que ob datam *TP*, ut *IT*×*PH*. Quod ſi angulus *Tml*, ſeu *STN* obliquus ſit, (l) erit angulus *mTl* adhuc minor, in ratione ſinus anguli *STN* ad radium, ſeu *AZ* ad *AT*. Eſt igitur velocitas nodorum ut *IT*×*PH*×*AZ*, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum *TPI*, *PTN* & *STN*.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in ſyzygiâ exiſtentibus, recti ſint, lineola *ml* abibit in infinitum, & angulus *mTl* evadet angulo *mPl* æqualis. Hoc autem in caſu, angulus *mPl* eſt ad angulum *PTM*, quem luna eodem tempore motu ſuo apparente circa terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus *mPl* æqualis eſt angulo *LPM*, id eſt, angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris 3 *IT*, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; (m) & angulus *PTM* æqualis eſt angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris 3 *IT*, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut ſupra diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo

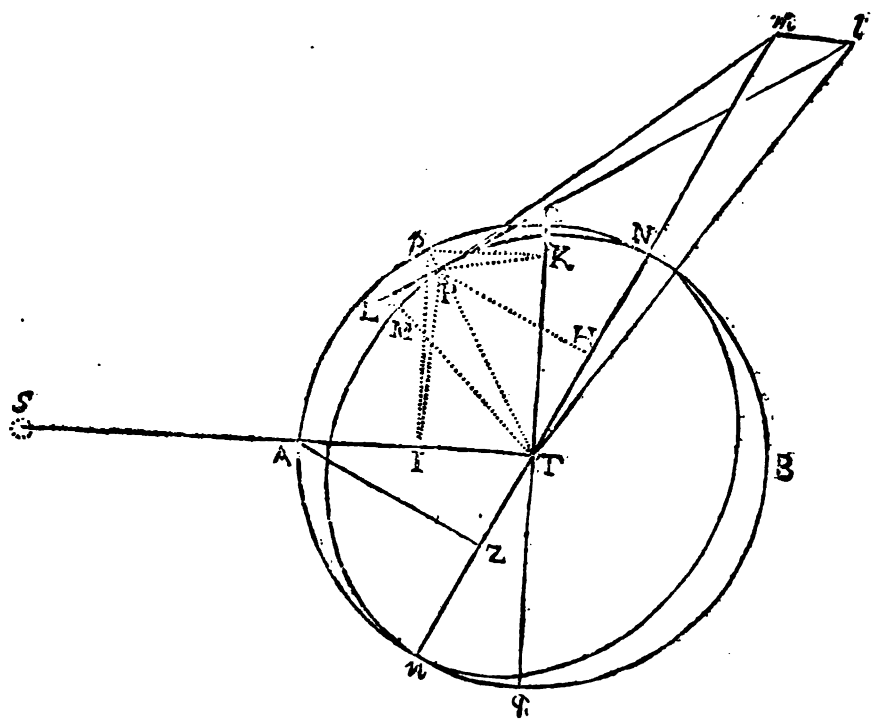
114. (l) * *Erit angulus mTl, in ratione ſinus anguli STN ad radium* in Triangulo T*ml*, eſt ſinus anguli *m*T*l* ad ſinum Anguli T*ml* ut latus *ml* ad latus T*l*; Sed propter exiguitatem lateris *ml* reſpectu lateris T*l*, ratio *ml* ad T*l* eadem ſemper manere cenſetur qualiſcumque ſit angulus T*ml*, manentibus lineis *ml* & T*m*; in angulo enim maximo linea T*l* evadit T*m*+*ml*, in minimo T*m*−*ml*, eſt verò *ml* quantitas evaneſcens reſpectu T*m*, hinc illius incrementi aut decrementi *ml* ratio nulla eſt habenda; Itaque manente quantitate *ml* qualiſcumque ſit angulus T*ml*, ratio *ml* ad T*l* eadem eſt, itaque etiam manet ratio ſinus anguli *m*T*l* ad ſinum anguli T*ml*, ſive etiam, cum anguli minimi, ſint ut eorum ſinus, anguli *m*T*l* in variâ inclinatione lineæ datæ *ml* ad lineam datam T*m* ſunt inter ſe ut ſinus Angulorum T*ml*, eſt ergo angulus *m*T*l*, in quavis magnitudine anguli T*ml* ad eum angulum *m*T*l* quando angulus T*ml* eſt rectus ut ſinus anguli T*ml* (vel, ut ſinus anguli *l*T*n* ipſi æqualis ob parallelas ST, *ml*) ad ſinum anguli recti, hoc eſt ut ſinus anguli STN qui idem eſt cum ſinu anguli ST*n* ad Radium. Q. E. O.



(m) * *Et angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis.* Angulus MP*p* eſt angulus deflexionis de quo nunc agitur Triangula verò MP*p*, MPT ſunt ſimilia ob angulum communem PMT, & angulos rectos TPM & P*p*M, hinc anguli reſidui PTM, MP*p* ſunt æquales.

(n) Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32^{I}.\ 56^{II}.\ 27^{III}.\ 12^{iv}\tfrac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte hora-

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROB. XI.



rius erit ad $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum lunæ à quadraturâ, lunæ à nodo, & nodi à ſole) ad cubum radii.

(n) * *Ergo* &c. Iſti anguli deflexionis debent eſſe ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim caſu, utrâque vis agit perpendiculariter ad Tangentem PM hinc lineolæ Mp, ML per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur Tangentis portio PM, debent eſſe ut ipſæ illæ vires; ex verò lineolæ ſumpto PM pro radio ſunt Tangentes angulorum deflexionis pPM, MPL, & anguli quam minimi ſunt ut ipſorum Tangentes, ergo anguli illi deflexionis ſunt ut vires illas producentes, motus autem horarii lunæ & nodorum ſunt ipſi anguli PTM & mTl, qui ſunt ex demonſtratis æquales angulis deflexionum MPp, MPL, ergo motus horarii ſunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. E. O. 114.

DE MUNDI SYSTEMATE.

(o) Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Co-

114. (o) * *Et quoties ſignum alicujus Anguli de affirmativo* &c. Angulos Q T P & NTP, poſitivos vocat Newtonus, quando punctum P eſt in conſequentia reſpectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc eſt Angulus Q T P eſt poſitivus quoties arcus Q P, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in conſequentia non excedit 180gr. negativus verò cum arcus Q P excedit 180gr.; angulus N T P pariter eſt poſitivus cum arcus N P à nodo aſcendente in conſequentia numeratus non excedit 180gr. negativus verò eſt cum is arcus N P excedit 180gr. Quando enim arcus Q P, N P excedunt 180gr. tunc anguli Q T P, N T P non amplius numerantur ſecundum Lunæ directionem, ſeu ſecundum viam quam Luna eſt emenſa, ſed ſecundum viam quæ ipſi deſcribenda ſupereſt ut ad puncta Q & N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum reſpectu qui ſecundum viam à Lunâ deſcriptam menſurantur.

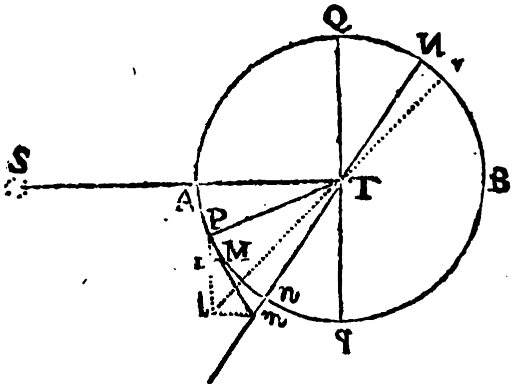
Angulus verò S T N poſitivus dicitur quando arcus A N à loco conjunctionis Lunæ cum Sole uſque ad nodum contra ordinem ſignorum numeratus, eſt minor 180gr., negativus verò dicitur cum excedit 180gr., quia, cum nodi moveantur contra ordinem ſignorum ſive in antecedentia, angulus S T N primo caſu exprimit viam nodi à ſyzygia, ſecundo caſu viam quam emetiri debet ut ad ſyzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod ſi tres illi Anguli Q T P, N T P, S T N ſint poſitivi motus nodorum eſt regreſſivus: 2°. Quod ſi unus eorum ſit negativus reliqui poſitivi motus nodorum eſt progreſſivus. 3°. Quod ſi unus eorum ſit poſitivus duo negativi, motus nodorum eſt regreſſivus. 4°. Denique quod ſi omnes ſint negativi motus nodorum iterum ſit progreſſivus, ſic enim *quoties ſignum alicujus anguli de affirmativo in negativum deque affirmativo in negativum mutatur debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari.*

Art. 1. Si tres Anguli ſint Poſitivi nodorum motus erit regreſſivus.

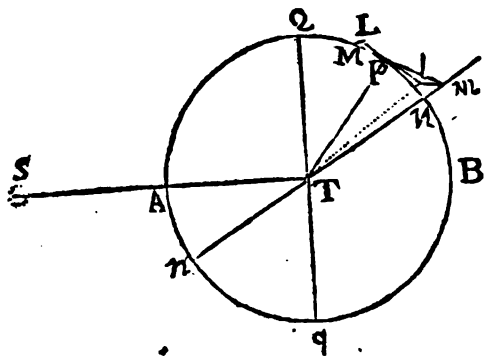
In hoc caſu, Arcus A N contra ordinem ſignorum ſumptus non excedit ſemicirculum ideoque punctum N erit in ſemicirculo A Q B; Præterea arcus Q P ſecundum ordinem ſignorum ſumptus, 180gr. non excedit, erit itaque punctum P in ſemicirculo Q A q; Denique arcus N P ſemicirculo major eſſe non debet, ſed poteſt vel quadrante minor vel quadrante major, ſit N P quadrante minor ut in figurâ Textus, in quâ reliquæ hujus caſus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujuſce propoſitionis conſtructione liquet quod ductâ M L quæ exprimit actionem Solis, productâ M P quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ L P quæ occurrit plano Eclipticæ in l, ita ut m l ſit parallela lineæ M L, cum L ſit verſus Solem reſpectu puncti M & lineæ M P m, L P l ſeſe decuſſent punctum l erit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus A T l major erit quam angulus A T m ergo nodus promotus eſt contra ordinem ſignorum, hoc eſt ejus motus eſt regreſſivus.

Sit

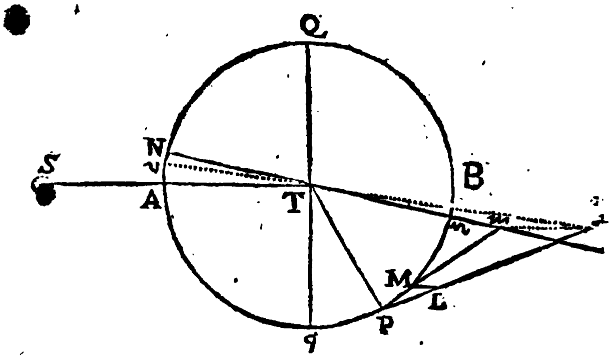


Sit NP quadrante major, tum lineæ PM, PL non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ TN concurrant, ſed antrorſum productæ concurrent cum ejus productione Tn, & quoniam ſeſe non decuſſant, manebit punctum l propius Soli quam punctum m, & angulus ATl minor erit angulo ATm, ideoque productâ lineâ lT in V, angulus ATV complementum ad duos rectos anguli ATl, major erit angulo ATN complemento ad duos rectos anguli ATm, ergo nodus N promotus eſt contra ordinem ſignorum ut prius; Ergo ubicumque ſit punctum P ſi tres anguli QTP, NTP, STN ſint poſitivi motus nodi eſt regreſſivus. 114

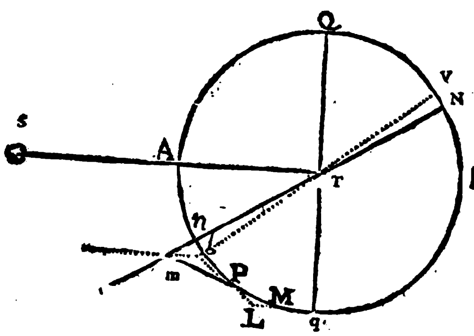
Art. 2. Mutetur horum Angulorum quivis ex poſitivo in negativum manentibus poſitivis angulis duobus reliquis motus nodorum ex regreſſivo progreſſivus fiet.

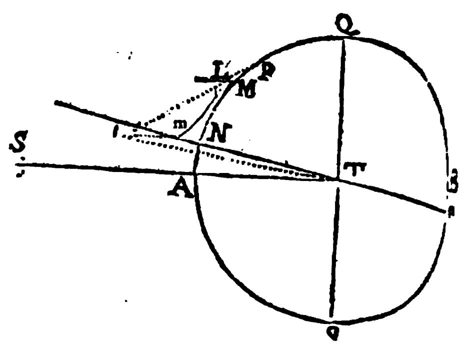


Caſ. 1. Fiat angulus QTP negativus, hoc eſt, punctum P ſit in ſemicirculo QBq, manente poſitivo angulo STN ita ut N ſit in ſemicirculo AQB, & pariter manente poſitivo angulo NTP; obſervandum quod lineolâ ML in ſemicirculo QBq poſitionem habet oppoſitam illi quam habebat in ſemicirculo QAq ut conſtat ex Prop. LXVI. lib. 1. ita ut punctum L ſit à Sole remotius quam punctum M; Itaque ſi PN ſit minor quadrante, lineæ LP retroproducendæ erunt, & punctum l erit propius Soli quam punctum m; ideoque angulus ATl minor erit angulo ATm, ergo (cum diminuatur angulus ATN qui ſumitur contra ordinem ſignorum) nodus ſecundum ordinem ſignorum eſt promotus ejuſque motus progreſſivus eſt.



114. Si verò NP ſit major quadrante antrorſum productis lineis P M, P L punctum l manebit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus A T l major erit angulo A T m, productâ itaque l T in V, angulus l T V anguli A T l complementum minor erit angulo A T N, nodus ergo ab N verſus A in conſequentia proceſſerit itaque motus nodi eſt ut prius progreſſivus.





Caſ. 2. Sit angulus N T P negativus; hoc eſt ſit punctum N in conſequentia reſpectu puncti P, ſit vero Q T P poſitivus hoc eſt ſit punctum P in ſemicirculo Q A q & pariter ſit S T N poſitivus ita ut N ſit in ſemicirculo A Q B, ſi N P (ſecundum conſequentia) ſit minor tribus quadrantibus, P diſtabit à puncto n minus quadrante, ideoque retroproductis lineis M P, L P in m & l, cum L ſit ſoli propius quam M, erit l à ſole remotius quam m, ideoque angulus A T l major erit angulo A T n, & angulus A T V prioris complementum minor erit angulo A T N qui eſt anguli A T m complementum; proceſſit ergo nodus ab N verſus A, motus ergo nodi eſt progreſſivus.

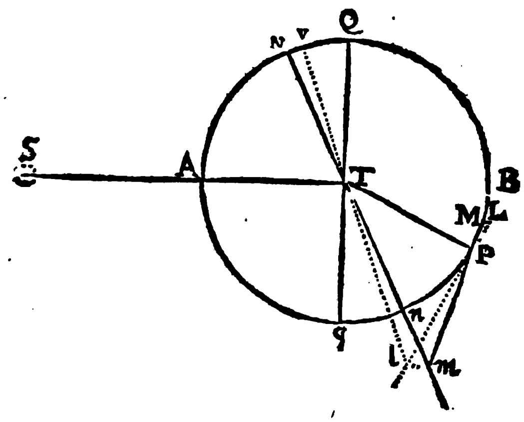
Si N P ſit major tribus quadrantibus, P minus quadrante à puncto N diſtabit, cumque N ſit in conſequentia reſpectu puncti P ut & puncta M & L antrorſum producendæ ſunt lineæ P M, P L ut plano Eclipticæ occurrant in m & l, & cum L ſit Soli vicinius quam M pariter l erit Soli vicinius quam m, hinc angulus A T l minor erit angulo A T N, nodus ergo ab N verſus A proceſſit & motus nodi eſt progreſſivus.

Caſ. 3. Sit angulus S T N negativus poſitivis exiſtentibus angulis Q T P, N T P. Sit N P minor quadrante, retroproducendæ ſunt lineæ P M, P L ideoque l erit remotior à Sole, quam m, & angulus

lus A T I major erit quam A T m; vel A T N, cum ergo N ſit in conſequentia reſpectu puncti A, quia angulus S T N eſt negativus, punctum l magis adhuc in conſequentia proceſſerit, motus ergo nodi erit progreſſivus. Sit NP major quadrante, antrorſum producendæ erunt lineæ P M, P L ut cum Ecliptica concurrant, à parte nodi n ideoque L erit propius Soli quam m, & angulus A T l minor erit angulo A T n; ideoque angulus A T V major erit quam A T N, ergò proceſſit nodus ex N in V, ſecundum conſequentia.

Art. 3. Sint duo ex tribus Angulis Q T P, N T P, S T N negativi, tertius poſitivus, motus nodorum ex progreſſivo regreſſivus fiet.

114.

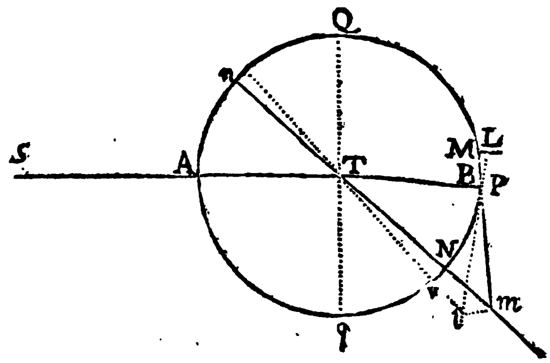


Caſus 1us. Sint Q T P & N T P negativi, ſolus S T N ſit poſitivus, diſtet P à nodo N minus tribus quadrantibus, ſive minus quadrante à puncto n, idque in conſequentia, retro producendæ erunt lineæ P M, P L, ut P M lineæ nodorum occurrat in m, & L P in l vicinius Soli, hinc A T l minor erit A T m & ideo A T V major quam A T N ſed punctum N eſt in antecedentia reſpectu puncti A, ergo V eſt in antecedentia reſpectu puncti N, ergo nodus regreditur; Diſtet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorſum producendæ ſunt lineæ P M, P L ut occurrant lineæ nodorum & l manebit à Sole remotius quam m & angulus A T l major erit angulo A T N regreditur ergo Nodus.

Caſ. 2. Sint Q T P & S T N negativi, ſolus vero N T P poſitivus, ſit N P minor quadrante, retroproductis lineis, cum L ſit remotius à Sole quam M, erit l ob decuſſationem linearum propius Soli & angulus A T l ſive A T V minor angulo A T N, ſed quia hic angulus eſt negativus, complementa ad quatuor rectos erunt ſumenda, & arcus A Q P V major erit arcu A Q P N ergo nodus regreditur,

Sit

DE MUNDI SYSTEMATE.



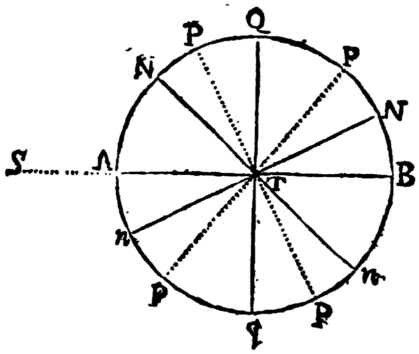
114 Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent Eccliptieæ à parte puncti n, & propter angulum Q T P negativum cum P ſit in ſemicirculo q B Q erit l ut & L remotius à Sole quam m & M, ideo angulus A T n minor eſt angulo A T l & complementum prioris anguli A T N major eſt angulo A T V, ſed A eſt in antecedentia reſpectu puncti N, ergo etiam V eſt in antecedentia reſpectu puncti N regreditur ergo nodus.

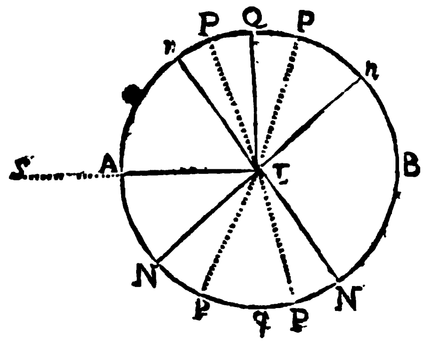
Caſ. 3. Sint S T N & N T P negativi, Q T P vero poſitivus, punctum L eſt ubivis propius Soli quam M, ſi P minus tribus quadrantibus diſtet ab N retro producendæ ſunt lineæ P M, P L, à parte puncti n & erit A T l majus quam A T n, ſed quia S T N eſt negativus, n eſt in ſemicirculo ſuperiori A Q B, & n eſt in antecedentia reſpectu A, ideoque l eſt in antecedentia reſpectu n, ut etiam V reſpectu N, regreditur ergo nodus; ſit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorſum ſunt producendæ, l erit propius ſoli quam m & A T l ſive A T V minor quam A T N, ſed quia A T N eſt negativus, ideoque A eſt in Antecedentia reſpectu puncti N erit etiam V in Antecedentia reſpectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N ſint negativi motus ex regreſſivo progreſſivus fiet; ut Hypotheſis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N & Luna P ſit in quadrante q B; nam cum angulus Q T P ſit negativus, P debet eſſe in ſemicirculo q B Q; cum S T N ſit negativus, N debet eſſe in ſemicirculo A q B, & cum N T P ſit negativus N debet eſſe in conſequentia reſpectu P; ergo, N non poteſt verſari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: Antrorſum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut Eclipticæ occurrant, erit l remotius à Sole quam m, & angulus A T V major angulo A T N, ſed hic angulus eſt negativus, ſive eſt N in conſequentia reſpectu A, erit ergo etiam V in conſequentia reſpectu puncti N, nodus itaque progreditur.

HIS poſitis dico, quod motus nodi progreſſivus evadit dum Luna verſatur inter alterutrum nodum & quadraturam ipſi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, ſi quadraturæ à nodo diſtantia quadrante major non ſit.

Si





Sit enim angulus A T N poſitivus, quoniam Luna ſive punctum P eſt inter puncta Q & N vel q & n ex Hypotheſi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit poſitivus alter negativus; nam ſit N vel n in ſemicirculo Q B q, tum quia P eſt inter Q vel q & N vel n, erit P in eodem ſemicirculo Q B q, ideoque angulus QTP erit negativus, ſed angulus N T P erit poſitivus, nam quia P eſt inter N & Q aut q & n, & Q eſt in conſequentia reſpectu N, erit etiam P in conſequentia reſpectu puncti N, & pariter dum n verſatur in ſemicirculo Q B q, n eſt in conſequentia reſpectu puncti q & arcus N q in conſequentia ſumptus nec non arcus NP ſinguli minores erunt arcu N n ſive minores ſemicirculo, ergo utroque caſu angulus N T P erit poſitivus.

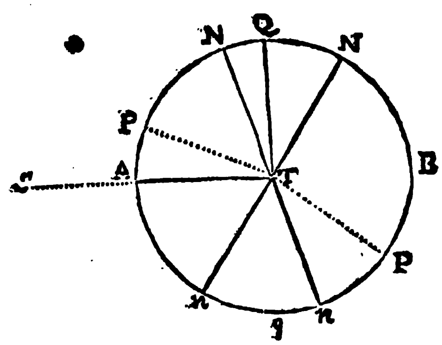
Manente A T N poſitivo ſint N vel n in ſemicirculo Q A q, tum quia P eſt inter Q & N aut n & q, erit etiam P in ſemicirculo Q A q, ideoque angulus QTP erit poſitivus, ſed angulus N T P erit negativus, nam quia Q eſt in antecedentia reſpectu puncti N, P inter Q & N poſitum erit in antecedentia reſpectu N; & in caſu quo P foret inter n & q quia q eſt in hac Hypotheſi in conſequentia reſpectu n, P foret etiam in conſequentia reſpectu n, ideoque plus ſemicirculo à puncto N diſtaret utroque ergo caſu angulus N T P negativus foret.

Sit angulus A T N negativus, ſitque N 114.
in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, & Lunâ P inter N & q vel n & Q, liquet angulum Q T P fore poſitivum; quia eſt P in ſemicirculo Q A q; angulus autem N T P erit etiam poſitivus, nam ſit N in quadrante q A; q eſt in conſequentia reſpectu N, ergo P quod eſt inter N & q eſt etiam in conſequentia reſpectu N; ſit n in quadrante A Q, cum n ſit in conſequentia reſpectu Q, erit etiam in conſequentia reſpectu P, hinc arcus N P in conſequentia minor erit ſemi-circulo, utroque ergo caſu angulus NTP eſt poſitivus.

Itaque ſi angulus ATN ſive STN ſit poſitivus, ubivis ſit N in ſemicirculo AQB & ſi angulus S T N ſit negativus ſed ita ut ſit N in quadrante q A, quando Luna erit poſita inter Nodum utrumvis N vel n, & quadraturam proximam unus è tribus angulis duntaxat erit negativus duo reliqui erunt poſitivi, itaque per articulum 2um, motus nodi progreſſivus erit.

Exiſtente verò angulo S T N negativo, & N in quadrante q B vel n in quadrante B Q Luna verò poſita inter utrumvis nodum & quadraturam proximam reliqui duo anguli Q T P, N T P negativi erunt; liquet enim facile punctum P in hâc hypotheſi verſari in ſemicirculo q B Q ideoque angulum Q T P eſſe negativum, præterea quia q eſt in antecedentia reſpectu N ex hypotheſi, P eſt etiam in antecedentia reſpectu N, & quia Q eſt in conſequentia reſpectu n, erit etiam P in conſequentia reſpectu n, ideoque punctum N plus ſemicirculo à puncto P diſtabit, itaque ſive ſit P inter q & N ſive inter n & Q in ſemicirculo q B Q tres anguli erunt negativi, ſed per-

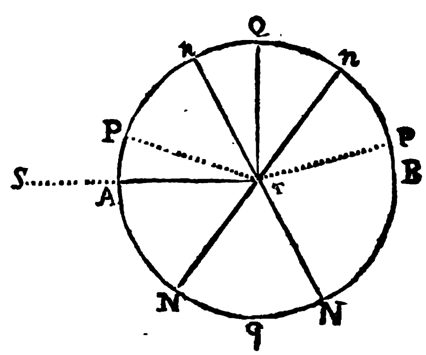
DE MUNDI SYSTEMATE.



114. Art. 4. eò caſu motus nodi eſt progreſſivus; Ergo in omni caſu, ſi Luna ſit inter nodum & quadraturam proximam nodi progrediuntur.

In omnibus aliis caſibus motus nodi eſt regreſſivus; Nam quando omnes anguli ſunt poſitivi, vel quando duo anguli ſunt negativi & tertius poſitivus motus nodi regreſſivus eſt per Art. 1. & 3., alterutrum autem evenire neceſſe eſt cum P non eſt inter nodum & quadraturam proximam; Hoc enim poſito, ſit ut prius angulus STN poſitivus & N in quadrante QTA, & P ubivis inter N & remotiorem quadraturam q, vel inter n & remotiorem quadraturam Q; ſi P ſit inter N & q angulus QTP eſt poſitivus ſiquidem P eſt in ſemicirculo QAq, & quia N eſt nunc inter P & Q, & N eſt in conſequentia reſpectu Q, erit P in conſequentia reſpectu N ergo angulus NTP eſt poſitivus; ſi P ſit inter n & Q angulus QTP eſt negativus, ſed & pariter angulus NTP, nam cum P ſit in conſequentia reſpectu n plus ſemicirculo à puncto N diſtabit.

Sit N ubivis in quadrante BTQ, & P inter Q & n vel inter q & N primo caſu omnes angulos fore poſitivos, altero angulos QTP & NTP fore negativos ut in præcedenti demonſtrabitur.

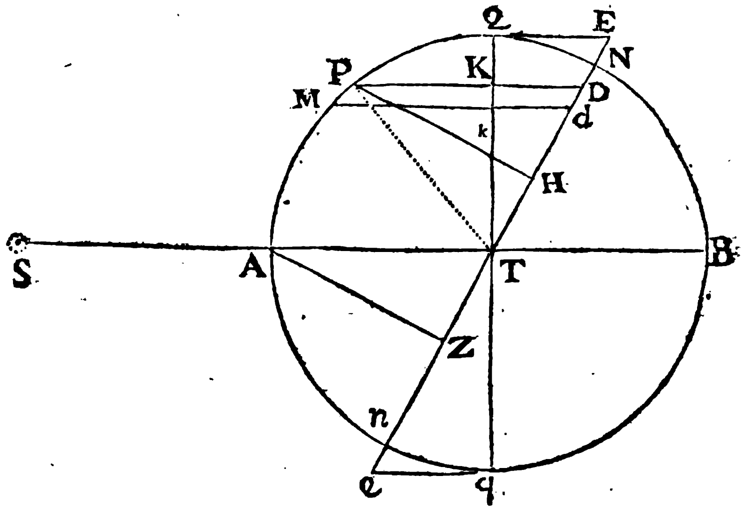


Denique angulus STN ſit negativus, & P non ſit inter quadraturam & nodum ſed alibi ubivis, alteruter ex angulis QTP, NTP poſitivus erit negativus alter; ſit N in quadrante ATq & P in arcu QAN (quadrante major) erit QTP poſitivus & NTP negativus, ſiquidem P eſt in antecedentia reſpectu N, ſit P in arcu qBn erit QTP negativus, ſed NTP poſitivus nam arcus NP in conſequentia ſumptus ſemicirculo minor erit.

Sit N in quadrante qTB, ſi P ſit in arcu nq, angulus QTP poſitivus eſt ſed angulus NTP negativus quia arcus Nn+nP ſemicirculo major eſt, ſi P ſit in arcu NQ angulus QTP eſt quidem negativus, ſed quia P eſt in conſequentia reſpectu N minuſque ſemicirculo diſtat, ergo angulus NTP eſt poſitivus; Hinc ubivis ſit P ſi modo non ſit inter nodum & quadraturam proximam, vel omnes anguli erunt Poſitivi, vel duo ſimul negativi alter verò poſitivus.

Cum ergo arcus inter N vel n & quadraturam proximam, numquam excedat quadrantem, eoque ſit ſæpe minor; è contra verò, arcus inter N vel n & quadratu-

Corol. 1. Hinc ſi à dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam quadraturas jungentem Qq demittantur perpendicula PK, Mk, eademque producantur donec ſecent lineam nodorum Nn in D & d; erit motus horarius nodorum



ut area $MPDd$ & quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres ſinus. Nempe PK ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturâ, PH ſinus diſtantiæ lunæ à nodo, & AZ ſinus diſtantiæ nodi à ſole: & erit velocitas nodi ut con-

draturam remotiorem numquam ſit minor quadrante & ſæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, Nodi regrediuntur & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus nodi feruntur in Antecedentia.

Potuiſſent Articuli 4. ſupra demonſtrati, ex ſolâ vi ſignorum Algebricorum deduci, eamque demonſtrationis ſpeciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium faceſſere potuiſſent horum ſignorum mutationes in angulis ſpectatæ, in quibus cum angulus ad ſemicirculum crevit & maximus fit, mox negativus evadit, quod ſane non eveniſſet ſi viæ deſcriptæ, non verò anguli conſiderati fuiſſent; Juvant Algebricæ illæ conſequentiæ, in retegendis prompte Propoſitionibus iiſque ad generaliſſimas expreſſiones revocandis, ſed in nonnullis quæſtionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per caſuum enumerationem, illæ Algebricæ conſequentiæ, velut ad lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique caſui propria non delineaverimus, facile erit ex iis quæ ſculptæ ſunt, figuras deficientes imaginari aut deſcribere. 114

DE MUNDI SYSTEMATE.

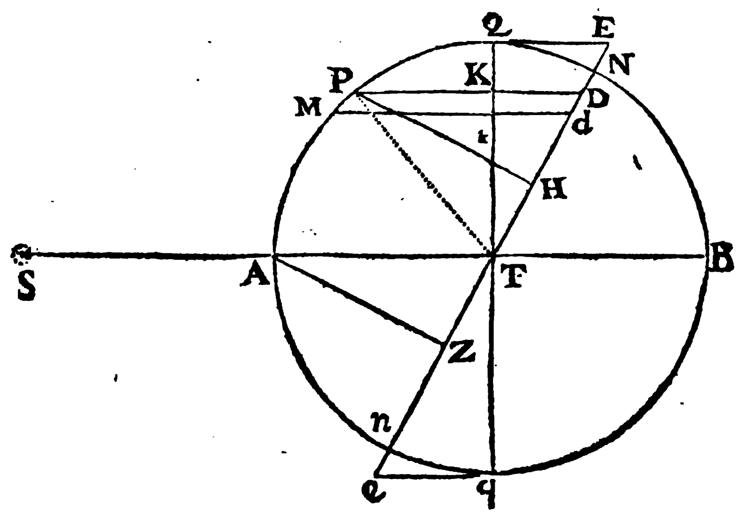
contentum $PK \times PH \times AZ$. Eſt (p) autem PT ad PK ut PM ad Kk, ideoque ob datas PT & PM eſt Kk ipſi PK proportionalis. Eſt & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus $PK \times PH$ eſt ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id eſt, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in ſyzygiis lunæ, ideoque eſt ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}.$ ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii, ſive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam ſi luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum QAq, ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna pergit à Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore luna attingit punctum n, ſumma illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD deſcribit, dein lunâ pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam deſcribet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, ſubduci debet de areâ priore, & cum æqualis ſit areæ QEN, relinquet ſemicirculum $NQAn$. Igitur ſumma omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area $PDdM$, ubi luna verſatur in ſyzygiis, eſt rectangulum ſub arcu PM & radio PT; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quam rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in ſyzygiis lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quam reverâ deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi

114. (p) * *Eſt autem PT ad PK ut PM ad Kk* ex notiſſimâ circuli proprietate Radium eſſe ad ordinatam ut eſt fluxio arcus ad fluxionem abſciſſæ.

ſi uniformiter continuaretur, ſpatium à ſe inæquabili cum motu reverâ confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in ſyzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi nodi in quadraturis verſantur, ſit $33^{II}. 10^{III}. 33^{iv}. 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc caſu erit $16^{II}. 35^{III}. 16^{iv}. 36^{v}$. Et (q) cum motus horarius nodorum ſemper ſit ut *AZ qu.* &

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.



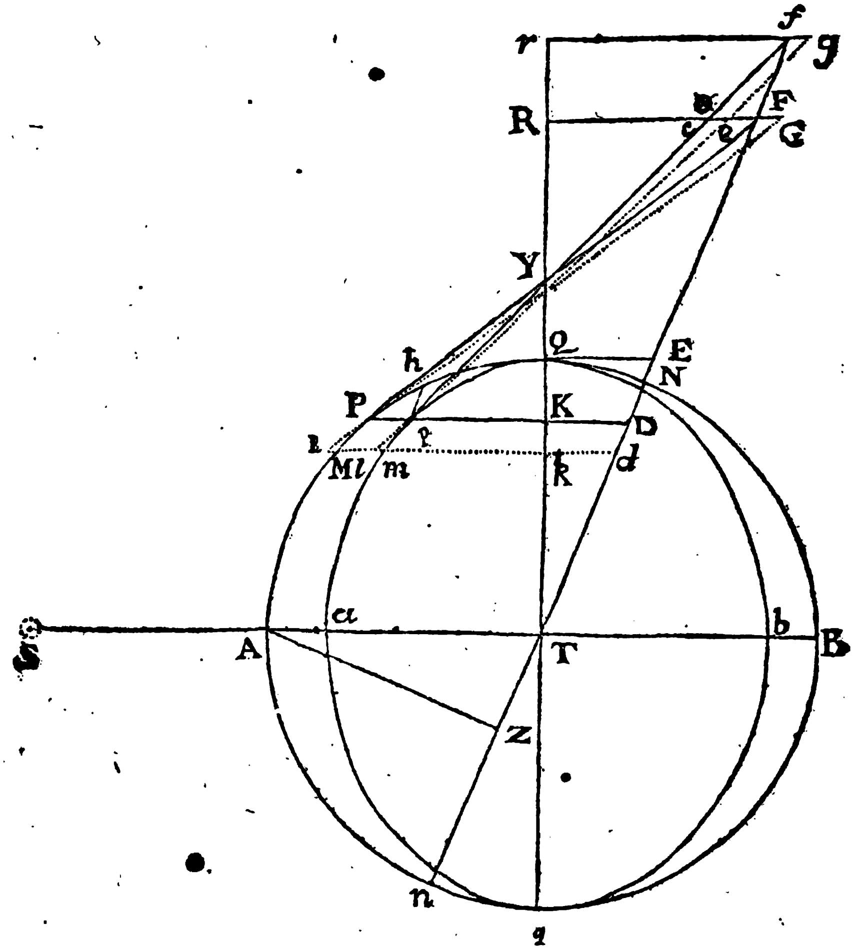
area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in ſyzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id eſt (ob datam aream *PDdM* in ſyzygiis deſcriptam) ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verſantur, erit ad $16^{II}. 35^{III}. 16^{iv}. 36^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

(q) * *Et cum motus horarius nodorum ſit &c*, per Corollarium præcedentem. 114

De Mundi Syſtemate.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico (r).



Deſignet *Qpmaq* ellipſin, axe majore *Qq*, minore *ab* deſcriptam, *QAqB* circulum circumſcriptum, *T* terram in utriuſque centro communi, *S* ſolem, *p* lunam in ellipſi motam, & *pm*

124. (r) * *In orbe Elliptico* illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ Lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujuſce.

pm arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ deſcribit, N & n nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in axem Qq demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ nodorum in D & d. (ſ) Et ſi luna, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipſi ut area $pDdm$ & AZq conjunctim.

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F & pf tangat ellipſin in p & producta occurrat eidem TN in f, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Y; & ſi ML deſignet ſpatium quod luna in circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædictâ $3\,IT$, ſeu $3\,PK$ motu tranſverſo deſcribere poſſet, & ml deſignet ſpatium quod luna in ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3\,IT$ ſeu $3\,pK$, deſcribere poſſet; & producantur LP & lp donec occurrant plano eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta ſecet pf,

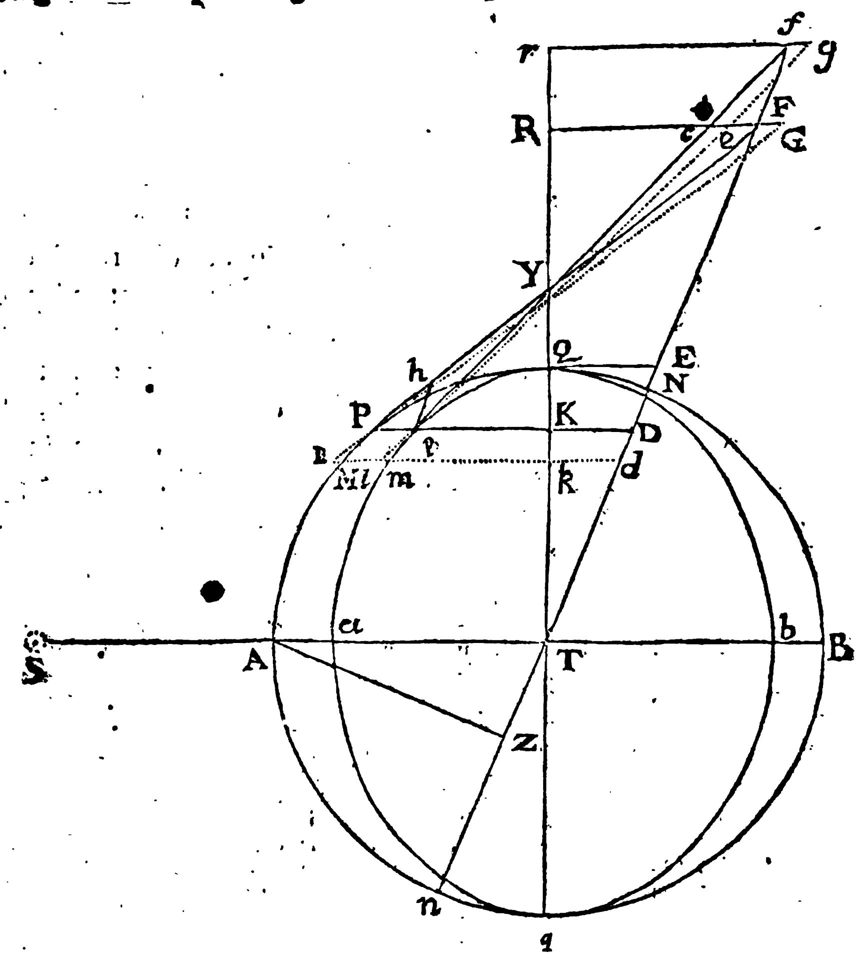
(ſ) * *Et ſi Luna radio ad terram ducto deſcribat aream tempori proportionalem* &c. Liquet ex Propoſ. XXVIII. Lunam hanc Ellipſim de quâ agitur ita non deſcribere ut areæ ſint temporibus proportionales, ſed hæc Hypotheſis ad ſolutionem hujus Problematis erat neceſſaria, ut ſcilicet Luna poſſit fingi verſari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo ſi circulum deſcriberet in ejus extremitate P verſata eſſet, quod tunc tantùm obtineret ſi hæc Ellipſis ita deſcribatur ut areæ ſint proportionales temporibus; Notum enim eſt areas Ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales eſſe arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, ſi quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verùm hæc falſa Hypotheſis corrigitur in eâ ſolutionis hujus Problematis parte quæ poſt Corollarium adjicitur.

(t) * *Conveniant autem hæ Tangentes in axe T Q ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. Quod ſi duæ curvæ communem axem habentes, ſint tales ut ipſarum ordinatæ datam inter ſe rationem ſervent, & in ſummo ordinatarum correſpondentium ducantur Tangentes, illæ Tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; Nam cum ordinatæ datam rationem ſervent (ex Hypoth.) oportet ut ipſarum fluxiones eamdem etiam ſervent rationem ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipſam, eadem ſit in utrâque curvâ. Eſt verò ſemper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abſciſſæ ad ſubtangentem, ergo in hâc Hypotheſi, ratio fluxionis abſciſſæ ad ſubtangentem eſt etiam eadem in utraque curva, ſed fluxio abſciſſæ ipſa eſt eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam ſubtangens eadem eſt, hinc itaque Tangentes in extremitatibus ordinatarum correſpondentium ductæ in eodem puncto axem attingunt quando utriuſque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, conſtantem rationem ſervant: Notum autem eſt, ex not. 247. Lib. I, Quod ſi circulus deſcribatur ſuper axim Ellipſeos, ordinatæ circuli & Ellipſeos erunt inter ſe in ratione datâ axeos communis circulo & Ellipſi ad alterum axem; ſive eſſe PK ad pK ut A T ad a T, hinc ergo Tangentes in punctis P & p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y. 114

De Mundi Systemate.

pg & *TQ* in *c*, *e* & *R* reſpectivè, & *fg* producta ſecet *TQ* in *r*. Quoniam vis 3 *IT* ſeu 3 *PK* in circulo eſt ad vim 3 *IT* ſeu 3 *pK* in ellipſi, ut *PK* ad *pK*, ſeu *AT* ad *aT*; erit ſpatium *ML* vi priore genitum, ad ſpatium *ml* vi poſteriore genitum,



ut *PK* ad *pK*, id eſt, ob ſimiles figuras *PYKp* & *FYRc*, ut *FR* ad *cR*. Eſt autem *ML* ad *FG* (ob ſimilia triangula *PLM*, *PGF*) ut *PL* ad *PG*, hoc eſt (ob parallelas *Lk*, *PK*, *GE*) ut *pl* ad *pe*, id eſt (ob ſimilia triangula *plm*, *cpe*) ut *lm* ad *ce*; & inversè ut *LM* eſt ad *lm*, ſeu *FR* ad *cR*, ita eſt *FG* ad *ce*. Et propterea ſi *fg* eſſet ad *ce* ut *fY* ad *cY*, id eſt, ut *fr* ad *cR* (hoc eſt, ut *fr* ad *FR*

& FR ad cR conjunctim, id eſt, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg ſubtenderent ad terram T, (u) æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propoſitione expoſuimus) ſunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipſi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo fg eſſet ad ce ut fY ad cY, id eſt, ſi fg æqualis eſſet $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob ſimilia triangula fgp, cep, eſt fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & (x) propterea angulus, quem fg reverâ ſubtendit, eſt ad angulum priorem quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus nodorum in ellipſi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg ſeu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id eſt, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, ſeu fp ad fY & cY ad cp, hoc eſt, ſi ph ipſi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FY & FY ad FP; hoc eſt, ut Fh ad FP ſeu Dp ad DP, (y) ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. xxx.) area poſterior & AZq conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & AZq conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipſi. *Q. E. D.*

Co-

(u) * *Atque ideo anguli quos FG & fg ſubtenderent ad terram T æquarentur inter ſe*, nam cum lineæ F G & fg ſint inter ſe Parallelæ & proportionales lineis T F, T f, recta T G producta tranſibit etiam per g, ideoque per eundem angulum videbuntur lineæ F G & f g ex terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem fg reverâ ſubtendit eſt ad angulum priorem ut hæc fg ad priorem fg.* Cum enim linea fg ſit minima, reſpectu lineæ T g linea T g eadem manere cenſenda eſt in utrâque magnitudine lineæ fg hic aſſumpta; ſed in Triangulo utroque T f g, Sinus anguli f eſt ad lineam T g, ut ſinus anguli f T g ad lineam fg; ergo cum maneat angulus f, & linea T g; ratio ſinus anguli f T g ad lineam f g erit data, ſive quia anguli minimi ſunt ut ſui ſinus, erit angulus quem f g reverâ ſubtendit ad angulum quem ficta f g ſubtendebat, ut vera f g ad fictam f g.

(y) * *Ideoque ut area Dpmd ad aream DPMd* nempe propter communem altitudinem K k, nam Trapezia p D d l, P D d L, pro Parallelogrammis aſſumi poſſunt quæ ſunt ut Baſes D p, D P, & altitudines K k conjunctim.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. Quare cum, in datâ nodorum poſitione, ſumma omnium arearum $pDdm$, quo tempore luna pergit à quadraturâ ad locum quemvis m, ſit area $mpQEd$, quæ ad ellipſeos tangentem QE terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, ſit area ellipſeos totius: motus mediocris nodorum in ellipſi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipſis ad circulum; id eſt, ut Ta ad TA, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* ſi capiatur angulus $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipſi ad $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. ut APq ad ATq; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodi à ſole ad quadratum radii.

(z) Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius deſcribit in ſyzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in ſyzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciprocè ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hâc cauſâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. (a) Pergendo autem à quadraturis ad ſyzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturis quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque

114. (z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. 26. hujuſce deducuntur. Vide not. r Prop. 26. & locum ad quem refertur.

(a) * *Pergendo autem à quadraturis.*

que & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Eſt enim (b) motus iſte, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicatâ ratione temporis. Quare (c) motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque (d) decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut

100

(b) * *Eſt enim motus iſte (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicatâ ratione temporis*, motus nodorum generatur per actionem vis Solaris 3 I T quæ uniformis manere cenſetur dum deſcribitur arcus P M, hinc creſcit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expreſſit autem Newtonus motum nodorum fingendo in puncto ipſo P, à Sole ſimul & ſemel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M deſcribitur ab ipſo exercita fuiſſet, & lineam L M eſſe ſpatium quod velocitate ita productâ ipſo eo tempore quo arcus P M percurritur deſcriberetur, hinc itaque conſtat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. & 30. lib. 1.) hæc autem linea L M eſt proportionalis verò effectui actionis Solis (vid. not. h Prop. XXX. hujuſce).

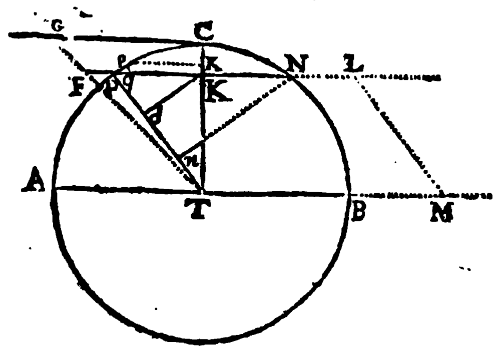
(c) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in ſyzygiis ſive velocitas Lunæ in ſyzygiis eſt ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus P M deſcribet in ſyzygiis eſt ad tempus quo eos arcus P M deſcribere cenſebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in ſyzygiis fit minor quàm adſumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 & 11073. 214.

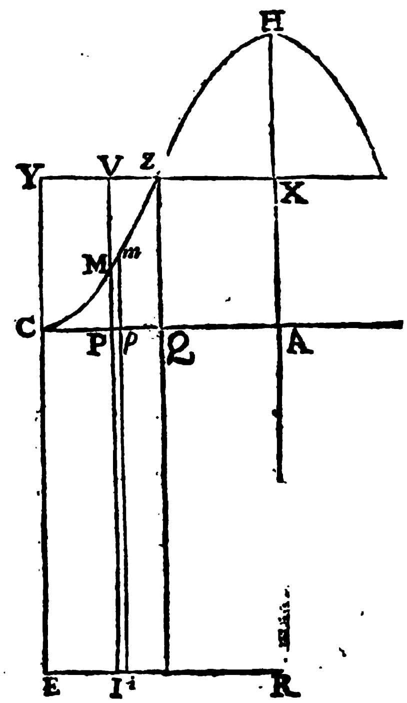
(d) * *Eſtque decrementum ad motum reliquum ut* 100 *ad* 10973, *ad motum totum ut* 100 *ad* 11073. Motus reliquus eſt ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ ſive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; ſive priorem quantitatem ad quadratum evehendo ſecundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2 - 2\times 50\times 11073 + 50^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim reſpectu evaneſcit fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2 - 2\times 50\times 11073$ ad $\overline{11073}^2$, & dividendo per 11073, ut $11073 - 2\times 50$ ad 11073.

Eſt ergo differentia motûs reliqui & motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 ſive 100 ad 11073, ideoque etiam eſt motus decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

DE MUNDI SYSTEMATE.

100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in ſyzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturâ & ſemiſſem quadrati radii ad ſemiſſem quadrati radii conjunctim. Unde





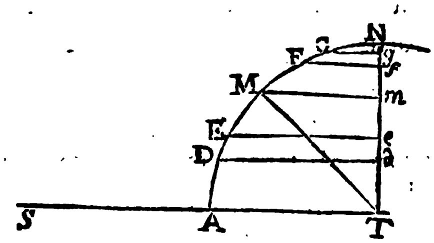
114 (e) * *Decrementum inter octantes & ſyzygias & incrementum inter octantes & quadraturas eſt quam proximè &c.* Reſumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. ſunt dicta, deſignet CP diſtantiam Lunæ à quadraturâ, lineâ IM exprimet ejus velocitatem & IV exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo deſcribitur arcus PM hâc velocitate IM, eſt ad tempus quo velocitate mediocri IV deſcriberetur, ut IV ad IM, ideoque motus nodorum verus foret ad eorum motum ſi Luna mediocri ſuâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ ſive ut IV^2 ad $\overline{IV \pm VM}^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ & neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ diviſiſque terminis per IV ut IV ad $IV \pm 2VM$; & convertendo differentia motus veri nodorum & motus inventi, eſt ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, ſive incrementum

aut

(f) Unde ſi nodi in quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo à ſyzygiâ & quadraturâ iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſub- LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROBL. XII.

aut decrementum motus nodorum eſt ſemper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat ducto in 2 V M & diviſo per J V ± V M, ideoque cum J V ± 2 V M pro conſtanti aſſumi poſſit quia 2 V M ferè evaneſcit reſpectu quantitatis J V, eſt illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat & V M conjunctim; eſt verò V M differentia inter Z Q & M P, & ſunt Z Q & M P ut quadrata ſinuum arcuum C Q & C P, arcus verò C Q eſt 45 gr. ex demonſtratis ad Prop. XXVI. & quadratum ejus ſinus eſt ſemiſſis quadrati radii; C P verò eſt diſtantia Lunæ à quadraturâ; Ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum eſt ut motus nodorum qualis inventus fuerat & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſem quadrati radii conjunctim: In ſyzygiis quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadratura eſt ipſum quadratum radii, unde differentia quadrati ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis quadrati radii, eſt in hoc caſu ipſe ſemiſſis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in ſyzygiis ut ſunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in ſyzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) & ut differentiæ quadratorum ſinuum diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis quadrati radii ad eum ſemiſſem quadrati radii conjunctim. Q. E. O.

(f) * *Unde ſi nodi &c.* Verſentur nodi in Quadraturis, capiantur loca F & E ab octante M hinc inde æqualiter diſtantia, & alia duo D & G à ſyzygiâ A & quadraturâ N diſtantia intervallis D A, G N quæ æqualia ſint inter ſe, & eadem ac intervalla M E, M F, ſumantur decrementa motus nodorum in punctis E & D & ex ſumma eorum decrementorum ſubducatur ſumma incrementorum in punctis G & F, & reſiduum erit ipſum decrementum in ſyzygia A. 114.



Etenim, per præcedentia, decrementa ſive incrementa; ſunt ut motus totus nodorum & differentia quadrati ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſemiſſis radii conjunctim; eſt verò motus totus nodorum, ut contentum ſub ſinubus diſtantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole (per Prop. XXX.) ſinus autem diſtantiæ nodi à Sole, in hoc caſu eſt ipſe Radius, eſtque conſtans pro omnibus incrementis decrementiſque aſſumendis, diſtantia verò Lunæ à nodo eadem eſt ac diſtantia Lunæ à quadraturâ, cum nodi ſint in quadraturis; Ergo motus totus nodorum eſt ut quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, & decrementa ſive incrementa ſunt ut contentum ſub quadrato ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ & ſub differentiâ ejuſdem quadrati & ſemiſſis radii.

Dicatur itaque Radius r, ſinus arcus N G dicatur s, erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2}rr - ss$ ſive $\frac{1}{2}r^2 s^2 - s^4$;

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, obſervandum, quod ſiquidem arcus F M eſt æqualis arcui N G cujus ſinus eſt s, & N F + F M eſt æqualis octanti cujus ſinus eſt $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ & per Principia Trigonometrica, ſinus arcus qui eſt differentia duorum arcuum quorum ſinus ſunt dati, eſt æqualis differentiæ fa-

 ctorum

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam ; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ : uti rationem ineunti facile conſtabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpa-

114. ctorum ſinûs majoris arcus per coſinum minoris & ſinus minoris arcus per coſinum majoris, diviſæ per Radium, hinc ſinus arcus F N eſt æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr-ss} - sr\sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{rr-ss} - s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2} \times \overline{rr-ss-s\sqrt{rr-ss}} + \frac{ss}{2} \times \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}\overline{rr-ss} + s\sqrt{rr-ss} - \frac{ss}{2}$ ſive deletis terminis æqualibus & oppoſitis $\frac{1}{2}\overline{rr-s\sqrt{rr-ss}} \times s\sqrt{rr-ss}$, & multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - r^2 s^2 + s^4$. Ideoque ſumma incrementorum in G & F eſt $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$.

Sinus autem in E & D ſunt coſinus arcuum F & G, ergo quadratum ſinus arcus N E eſt $rr - \frac{1}{2} \times \overline{rr-ss} + s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}ss = \frac{1}{2}rr + s\sqrt{rr-ss}$; Ideoque decrementum motus nodorum in E eſt $\frac{1}{2}\overline{rr+s\sqrt{rr-ss}} \times \frac{1}{2}\overline{rr+s\sqrt{rr-ss}} - \frac{1}{2}rr = \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} + r^2 ss - s^4$.

Quadratum ſinus arcus N D eſt $rr-ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D eſt $\overline{rr-ss} \times \overline{rr-ss} - \frac{1}{2}rr = \frac{1}{2}r^4 - \frac{3}{2}r^2 s^2 + s^4$; Sicque ſumma decrementorum eſt $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$.

Denique in ipsâ ſyzygiâ quadratum ſinus arcus N D eſt rr, ideoque decrementum motus nodorum in ſyzygia eſt $r^2 \times r^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^4$.

Si ergo ex ſumma decrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$ detrahatur ſumma incrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^2 s\sqrt{rr-ss} - \frac{1}{2}r^2 s^2$ decrementorum reſiduum eſt ipſum $\frac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in ſyzygia exprimet. Q. E. D.

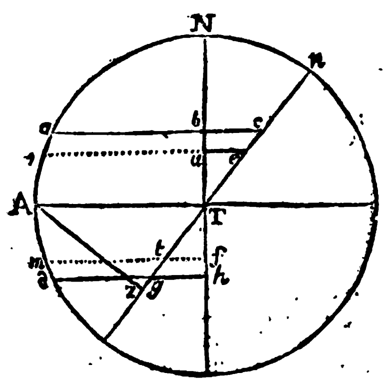
(g) * *Proindeque decrementum mediocre* &c. In toto arcu N A, puncta aſſumantur quam proxima quotquot lubebit quæ quaternatim ſumantur, ita ut quatuor quæ ſimul aſſumuntur ita diſponantur ut duo ab octante æqualiter diſtent hinc inde & alia duo tantumdem à ſyzygia & quadratura diſtent; Decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ ſunt inter ſyzygiam & octantem ſuperat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ ſyzygiâ; ſi itaque motus mediocris aſſumendus ſit, id decrementum quadrifariam dividi debet & de motu mediocri ſingula quarta pars detrahi debet, ſic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis ſimul ſumptis; ille decrementi exceſſus idem eſt pro quibuſvis punctis ita quaternatim ſumptis itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis adjectâ conſideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cum

ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud eſt $17'''. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$ motui horario mediocri ſuperius invento $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$ ſubducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$ motum mediocrem horarium correctum.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROBL. XII.

(h) Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et (i) decrementa motuum, à cau-



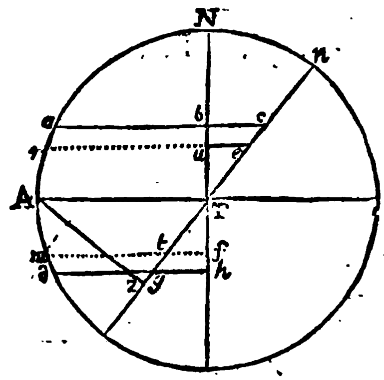
Cum ergo ille exceſſus decrementorum ſuper incrementa ſit ipſum decrementum motus in ſyzygiâ Seorſim conſideratâ, & id decrementum in ſyzygiâ ſeorſim inventum ſit, *decrementum mediocre quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ.*

(h) * *Si nodi verſantur extra quadraturas* putà in locis *n* & *ſpectentur loca bina a* & *d à ſyzygiâ A hinc inde diſtantia* erit motus nodorum in loco *a* ut Elementum *acer* & quadratum lineæ AZ conjunctim (cor. 1. prop. 30.); ſimiliter motus nodorum in loco *d* erit ut elementum *mtgd* & quadratum lineæ AZ conjunctim; ſi verò nodi verſentur in quadraturis erit (ibid.) ſumma motuum in binis locis *a* & *d* ut *abru* + *mfdh*, vel 2*abrv* & quadratum radii AT conjunctim; ſed ob æqualia intervalla Tb, Th ſumma arearum *acer* + *mtgd* = 2*abru*. Quare ſumma motuum nodorum ubi Luna verſatur in locis *a*, *d* nodis exiſtentibus extra quadraturas, erit ad ſummam motuum ubi Luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur ut $2abru \times AZ^2$ ad $2abru \times AT^2$ hoc eſt ut AZ^2 ad AT^2. 1141

(i) * *Et decrementa motuum* in loco *a* quando nodi ſunt extra quadraturas, & quando nodi ſunt in quadraturis, ſunt ut ipſi motus; Nam cum arcus *ar* in utroque caſu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis à tempore mediocri utrinque eadem erit, ac per conſequens error nodi, à loco in quo eo tempore medio-

DE MUNDI SYSTEMATE.

cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad 16″. 16‴. 37^iv. 42^v. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii.



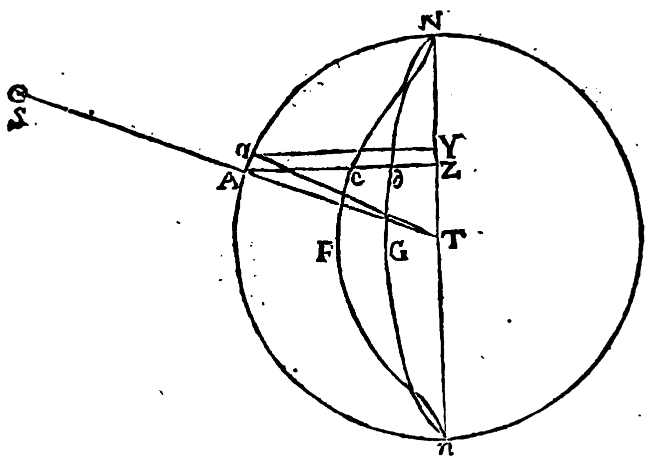
114. mediocri procedere debuiſſet, eſt ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motus nodi in *a* ubi nodi ſunt in quadraturis eſt ad decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas verſantur ut $abru \times AT^2$ ad $acer \times AZ^2$, & pariter decrementum motus nodi in *d* ubi nodi ſunt in quadraturis eſt ad decrementum motus in *d* cum nodi ſunt extra quadraturas, ut $mfhd \times AT^2$ ad $mtgd \times AZ^2$; decrementa autem motus in *a* & *d* æqualia ſunt quando nodi ſunt in quadraturis, ob æquales diſtantias à ſyzygiâ, & $mfhd = abru$; hinc decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas verſantur eſt ad $acer \times AZ^2$ ut decrementum motus in *d* cum nodi extra quadraturas verſantur eſt ad $mtgd \times AZ^2$, & etiam ut decrementum in *a*, aut *d* cum nodi ſunt in quadraturis ad $abru \times AT^2$: Ergo ſumma decrementorum in *a* & *d* cum nodi ſunt extra quadraturas eſt ad $acer + mtgd \times AZ^2$ ut ſumma decrementorum in *a* & *d* cum nodi ſunt in quadraturis ad $2\,abru \times AT^2$, ſed $acer + mtgd = 2\,abru$ per notam præcedentem, ergo, ſumma decrementorum in binis locis à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantibus cum nodi ſunt extra quadraturas eſt ad ſummam decrementorum in iiſdem locis cum nodi ſunt in ſyzygiis, ut AZ^2 ad AT^2, cum ergo ſummæ motuum ipſorum in eâ ſint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipſâ ratione ideoque & motus mediocres; *Eſt itaque &c.*

PRO-

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò ſolem S, per motum terræ, progredi



à nodo; & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem Aa arcus datus quam minimus, quem recta TS ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NAn, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZq, id eſt (ob (1) proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt, ut area $AZYa$. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium

(1) * *Ob proportionales AZ, ZY eſt* enim TA : Aa :: AZ : ZY, ideoque ob conſtantes TA & Aa, quantitates AZ, ZY ubique eamdem habent inter ſe rationem; ducatur utraque in AZ facta AZ×AZ, & ZY×AZ datam rationem ubique habebunt, erit itaque *AZq ut rectangulum ſub AZ & ZY.* 1142

crium ab initio, ut ſumma omnium arearum $aYZA$, id eſt, ut area NAZ. Eſt (m) autem maxima $AZYa$ æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, (n) erat $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab N ad A eſt ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.

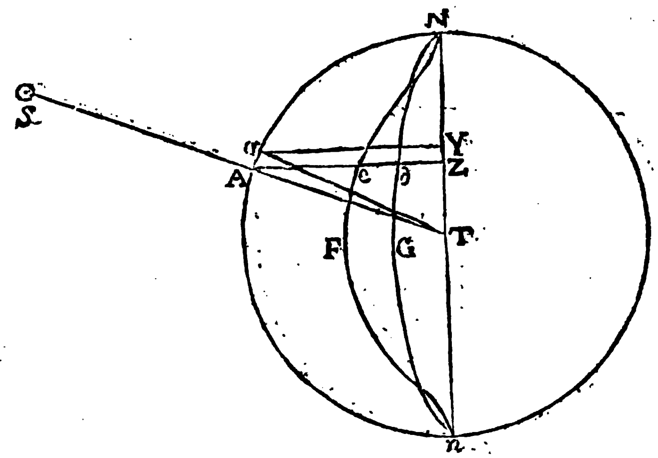
Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut ſol anno toto completo ad nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut ſol citius ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. (o) Cum ſol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}. 38'. 7''. 50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis N ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut AZq ad ATq: erit motus ſolis ad motum nodi in N, ut 360 ATq ad 39,6355 AZq; id

114. (m) * *Eſt autem maxima AZYa &c.* Nam quando TA eſt perpendicularis in Nn, AZ evadit TA & ZY evadit æqualis Aa, ſicque $AZY = AT \times Aa$, in omnibus autem aliis punctis TA eſt major quam AZ, & Aa major quam ZY, maxima itaque AZYa eſt *æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli.*

(n) * *Erat* $16''\ 16'''\ 37^{iv}\ 42^{v}$, is enim erat motus horarius mediocris, cum nodi erant in Quadraturis, per Prop. præced. ideoque in hâc Propoſ. cum SAT eſt perpendicularis in Nn.

(o) * *Cum Sol &c.* Velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi ſunt in quadraturis ut 360^{d}. quæ eſt via ſolis toto anno ad $39.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$ ſeu 39.6355 gradus quos nodus toto anno conficeret, ſi toto anno maximâ ſua celeritate moveretur; Velocitas nodi cum nodi ſunt in quadraturis, eſt ad nodi velocitatem cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut ATq ad AZq per Prop. præced. Ergo ex æquo & compoſitis rationibus, velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi diſtant à Sole arcu AN ut 360 ATq ad 39.6355 AZq; id eſt, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 ATq ad AZq. Sed dividendo 360 per $39^{gr}.\ 38'\ 7''\ 50'''$ prodit numerus 9.0827646 loco hujuſce 9.0827667 collocandus.

id eſt, ut 9,0827646 *ATq* ad *AZq*. Unde ſi circuli totius circumferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo ſol percurrat particulam *Aa*, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus unà cum nodis circa centrum *T* revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 *ATq* ad 9,0827646 *ATq*+*AZq*. Nam tempus eſt recipro-



cè ut velocitas quâ particula percurritur, & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum ſolis & nodi. Igitur ſi tempus, quo ſol ſine motu nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per ſectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum *Aa*, exponatur per ſectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aY* in *Nn* demiſſo) ſi in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis (p) ut ſit rectangulum *dZ* in *ZY* ad ſectoris parti-

(p) * *Ut ſit Rectangulum dZ in ZY ad ſectoris particulam ATa.* Sectoris particula ATa eſt ſemper æqualis dimidio Rectanguli AT in Aa, eſt verò ZY ad Aa ut AZ ad AT, ducantur antecedentes in dZ. & conſequentes in $\frac{1}{2}$ AT erit rectangulum dZ in ZY ad $\frac{1}{2}$ AT × Aa ſive ad ſectoris particulam ATa ut dZ in AZ ad $\frac{1}{2}$ ATq ſive ut dZ in 2AZ ad ATq, ſed ſumitur eſſe dZ in ZY ad ATa ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq ergo etiam dZ in 2AZ eſt ad ATq ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq & viciſſim dZ in 2AZ eſt ad AZq ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq & dividendo duos priores terminos per 2AZ eſt dZ ad $\frac{1}{2}$ AZ ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq.

DE MUNDI SYSTEMATE.] particulam ATa ut AZq ad 9,0827646 $ATq + AZq$, id eſt, ut ſit dZ ad $\frac{1}{2}$ AZ ut ATq ad 9,0827646 $ATq + AZq$; (q) rectangulum dZ in ZY deſignabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et ſi punctum d (r) tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA per-

114. (q) * *Rectangulum dZ in ZY deſignabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum*; Nam, ex ſuperioribus, tempus quo ſol percurrit arcum A a ſine motu nodi, eſt ad tempus quo ſol à nodo diſcedet eo arcu A a ſi (ipſe nodus moveatur) ut 9.0827646 A T q + A Z q ad 9.0827646 A T q; hinc convertendo, differentia eorum temporum eſt ad prius tempus ut A Z q ad 9.0827646 ATq + AZq, ſed, ex hypotheſi, ſectoris particula A T a deſignat prius tempus, ea ergo quantitas d Z × Z Y quæ eſt ad A T a ut A Z q ad 9.0827646 A T q + A Z q *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et ſi punctum d tangit curvam NdGn.* Numerus 360 deſignetur per a numerus 39.6355 dicatur b, ideoque 9.0827646 ſit $\frac{a}{b}$; AT dicatur r, & AZ, y eritque $dZ = \dfrac{\frac{1}{2} r^2 y}{\frac{a}{b} r^2 + y^2} = \dfrac{\frac{1}{2} b r^2 y}{a r^2 + b y^2}$ & in puncto T ubi AZ evadit AT ſive ubi fit $y = r$ eſt $dZ = \dfrac{\frac{1}{2} b r}{a + b} = \dfrac{r}{20.1655292}$; ita ut d Z ad viceſimam radii partem nuſquam aſſurgat.

Eſt autem ex naturâ circuli $TZ = \sqrt{rr - yy}$, & T Z ad A Z ut fluctio ordinatæ A Z ad Z Y, ideoque $ZY = \dfrac{y\,dy}{\sqrt{rr - yy}}$, hinc elementum $dZ \times ZY = \dfrac{\frac{1}{2} b r^2 y^2 dy}{(ar^2 + by^2)\sqrt{rr - yy}}$ & elementum ſegmenti NAZ eſt $\dfrac{y^2 dy}{\sqrt{rr - yy}}$.

Eſt verò $\sqrt{rr - yy}$ æqualis ſeriei $r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5} - \frac{5y^8}{128r^7} - \frac{7y^{10}}{256r^9}$ &c. & $\dfrac{y^2}{\sqrt{rr - yy}}$ æqualis ſerei $\frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c. quæ ſeries parùm convergit quando y accedit ad valorem r unde prudenter eſt adhibenda.

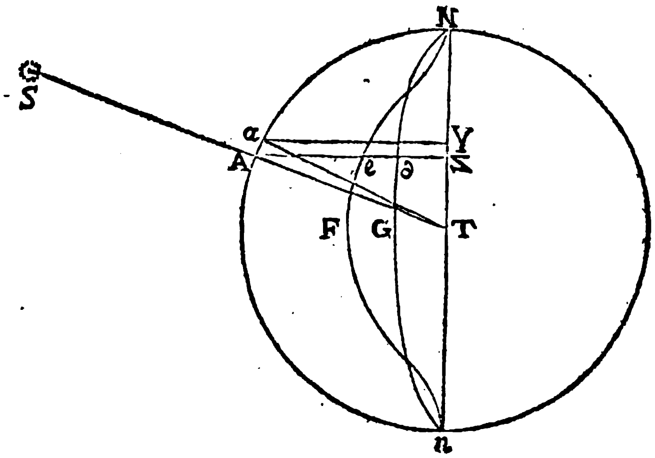
Multiplicetur verò hæc ſeries per dy & fiat integratio, obtinetur ſequens ſeries quæ exprimit ſegmentum NAZ, $\frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9}$ &c. quæ ſeries parum convergit quando $y = r$ ſed tunc ſegmentum NAZ eſt quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2} br^2$ per $ar^2 + by^2$, fit ſeries $\frac{b}{2a} \times 1 - \frac{by^2}{ar^2} + \frac{b^2y^4}{a^2r^4} - \frac{b^3y^6}{a^3r^6} + \frac{b^4y^8}{a^4r^2}$ &c. quæ plurimum convergit propter dignitates creſcentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ eſt circiter $\frac{1}{9}$.

Mul-

percurritur; & propterea exceſſus ſectoris *NAT* ſupra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.



Multiplicetur itaque per hanc ſeriem, ſeries $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ ſuperius inventa & obtinebitur hæc ſeries 115.

$$\frac{b}{2a}\times\frac{y^2}{r}+\frac{y^4}{2r^3}+\frac{3y^6}{8r^5}+\frac{5y^8}{16r^7}+\frac{35y^{10}}{128r^9}+\frac{63y^{12}}{256r^{11}}\ \&c.$$
$$-\frac{b^2}{2a^2}\times\ \frac{y^4}{r^3}+\frac{y^6}{2r^5}+\frac{3y^8}{8r^7}+\frac{5y^{10}}{16r^9}+\frac{35y^{12}}{128r^{11}}\ \&c.$$
$$+\frac{b^3}{2a^3}\times\ \frac{y^6}{r^5}+\frac{y^8}{2r^7}+\frac{3y^{10}}{8r^9}+\frac{5y^{12}}{16r^{11}}\ \&c.$$
$$-\frac{b^4}{2a^4}\times\ - - -\ \frac{y^8}{r^7}+\frac{y^{10}}{2r^9}+\frac{3y^{12}}{8r^{11}}\ \&c.$$

&c.

& multiplicetur hæc ſeries per dy & integretur, fiet ſeries quæ exhibebit valorem areæ N d Z

$$\frac{b}{2a}\times\frac{y^3}{3r}+\frac{y^5}{10r^3}+\frac{3y^7}{56r^5}+\frac{5y^9}{144r^7}+\frac{35y^{11}}{1408r^9}+\frac{63y^{13}}{3308r^{11}}\ \&c.$$
$$-\frac{b^2}{2a^2}\ \ \frac{y^5}{5r^3}+\frac{y^7}{14r^5}+\frac{3y^9}{72r^7}+\frac{5y^{11}}{176r^9}+\frac{35y^{13}}{1664r^{11}}$$
$$+\frac{b^3}{2a^3}\times\ \frac{y^7}{7r^5}+\frac{y^9}{18r^7}+\frac{3y^{11}}{88r^7}+\frac{5y^{13}}{208r^{13}}$$
$$-\frac{b^4}{2a^4}\times\ \frac{y^9}{9r^7}+\frac{y^{11}}{22r^9}+\frac{3y^{13}}{104r^{11}}$$

De Mundi Syſtemate. pore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$

215. Termini variabiles primæ lineæ hujuſce ſeriei, ſeriem ipſam illam conſtituunt quæ eſt valor ſegmenti NAZ, ejus itaque primæ lineæ valor eſt $\frac{b}{2a}$ NAZ.

Si dividantur omnes termini ſecundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, obſervabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correſpondentes primæ lineæ, ut, ſi exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur ς, quantitas eadem quæ in prima linea dividitur per ς, in ſecunda linea dividatur per $\varsigma+2$; ſic termino primo ſecundæ lineæ diviſo per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in prima linea dividitur per 3, in ſecunda per 5, ſicque in omnibus terminis utriuſque lineæ, ut facile conſtabit ex ipſâ origine iſtius ſeriei, & Integrationis lege; hinc ſi ad communem denominatorem reducantur termini utriuſque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\varsigma+2$, numerator ſecundæ in ς, & denominator communis erit $\varsigma\times\varsigma+2$; quare ſubductis terminis ſecundæ lineæ à terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ ſeriei ductos in $\frac{2}{\varsigma+2}$ quod ſeriei convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variabiles ſecundæ lineæ erunt

$$\frac{y^2}{r^2}\times NAZ-\frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^3}{15r}+\frac{2y^5}{70r^3}+\frac{6y^7}{504r^5}+\frac{10y^9}{1584r^7}\ \&c.$$ dicatur ad brevitatem ſeries horum terminorum D & valor verus iſtius ſecundæ lineæ eſt $-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ NAZ $+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times D$.

Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad ſecundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, & ſi dicantur γ exponentes terminorum, differentia terminorum ſecundæ & tertiæ lineæ exprimetur per terminos ſecundæ ſeriei ductos in $\frac{2}{\gamma+2}$, ideoque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4}\times NAZ-\frac{y^4}{r^4}\times D-\frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^5}{35r^3}+\frac{2y^7}{126r^5}+\frac{6y^9}{792r^7}$ dicatur E ſeries horum terminorum & valor verus tertiæ lineæ erit $+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times D-\frac{b^3y^2}{2a^2r^2}E$

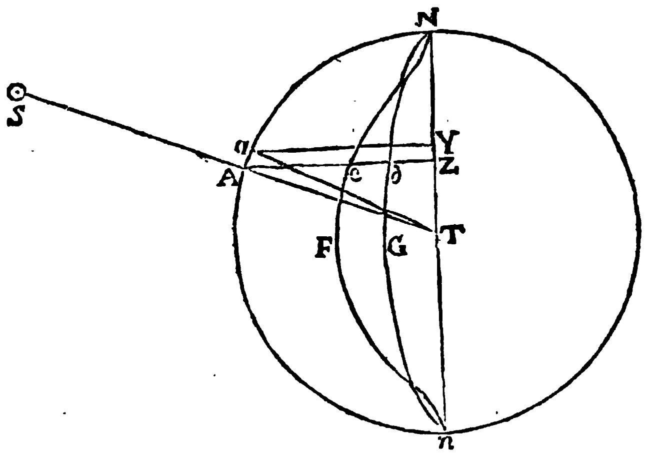
ex quibus facile intelligitur valorem areæ NdZ exprimi poſſe hac ratione:

$$\frac{b}{2a}\times NAZ.$$
$$-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times NAZ+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}D$$
$$+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^2}{2a^3r^4}D-\frac{b^3y^2}{2a^3r^2}E$$
$$-\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\times NAZ+\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}D+\frac{b^4y^4}{2a^4r^4}E+\frac{b^4y^2}{2a^4y^2}F\ \&c.$$

Unde

A a Y Z diminui in eâdem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in *A Z* longitudo *e Z*, quæ ſit ad longitudinem *A Z* ut *A Zq* ad

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROB. XIII.



Unde ſummæ coefficientium quantitatum N A *Z*, D, E, F, qui progreſſiones Geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri poſſunt, ideoque tandem area NdZ 115.
eſt $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}$ D $-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ E $+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}$ F &c.

Cor. 1. Primus terminus ſeriei quæ exprimitur per D eſt $\frac{2}{5}$ primi termini ſeriei quæ exprimit ſegmentum N A Z, & reliqui termini ſeriei D ſunt minores reſpectu reliquorum terminorum ſeriei quæ exprimit id ſegmentum, ergo D minor eſt quam $\frac{2}{5}$ NAZ, & pariter E minor eſt quam $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, & F minor quam $\frac{5y^2}{9r^2}$ &c. hinc valor N d Z major eſſe nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}$ NAZ $+\frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}$ N A Z, $=\frac{b\,\text{NAZ}}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor eſſe poteſt quantitate $\frac{b\,\text{NAZ}}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r=y$ & N A Z eſt quadrans circuli valor areæ N d Z major non eſt quantitate NAZ$\times\frac{b}{a+b}\times\overline{\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}}$, nec minor quam N A Z $\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; ſive major non eſt quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.8068865}$ ſive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

 Cor.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 9,08276 *ATq* + *AZq*. (ſ) Sic enim rectangulum *e Z* in *ZY* erit ad aream *AZYa* ut decrementum temporis, quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, ſi nodus quieſceret: & propterea rectangulum illud reſpondebit decremento motus nodi. Et ſi punctum *e* tangat curvam *NeFn*, area tota *NeZ*, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus *AN* percurritur; & area reliqua *NAe* reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt nodi motus, quo tempore arcus totus *NA* per ſolis & nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam vero area ſemicirculi eſt ad aream figuræ *NeFn*, per methodum ſerierum infinitarum quæſitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui reſpondet circulo toti erat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. & prop-

116. Cor. 3. In caſibus in quibus *y* eſt quam minima, ita ut $ar^2 + by^2$ pro ar^2 ſumi poſſit, valor $\frac{b\,NAZ}{ar^2} \times \frac{1}{2} r^2$ ad verum valorem ſatis accedet fietque valor areæ NdZ $= \frac{1}{18.1655292}$ ſegmenti NAZ, unde habentur velut limites valoris areæ NdZ in variis punctis curvæ.

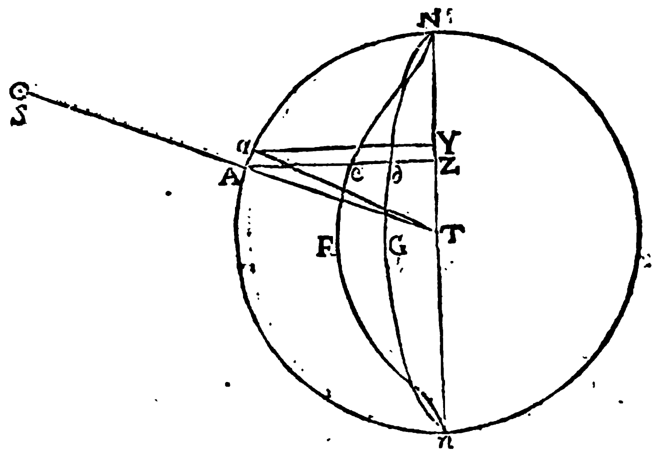
(ſ) * *Sic enim rectangulum e Z in ZY erit ad aream AZYa*, &c. Ex præcedentibus, area AZYa motum nodorum mediocrem exprimit poſito ſolem ſine motu nodi percurrere arcum Aa, ſi itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum ſive ſpatium à nodis percurſum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo ſol percurrit Aa ſine motu nodi, ſit ad tempus quo percurreretur Aa poſito motu nodi ut 9.0827646 AT*q* + AZ*q* ad 9.0827646 AT*q* ſi fiat AZ ad Ae in eâ ratione & utrumque ducatur in ZY, erunt areæ AZ×ZY, ad Ae×ZY ut motus nodorum in Hypotheſi priori ad eorum verum motum; & convertendo erit eZ × ZY ad AZ×ZY ut differentiâ motuum ad motum priorem ſive ut AZ*q* ad 9.0827646 AT*q* + AZ*q*.

(t) 116. * *Jam verò area ſemicirculi eſt ad aream NeFn.* Commodius calculi ducentur ſi prius quæramus aream NAneN inter ſemiperipheriam NAn & curvam Nen contentam, quàm detrahemus ex ſemicirculi area; tumque reſiduum erit area NeFn, quam cum ſemicirculi area conferre licebit.

Sit ergo ut prius $3608 = a$, $39^{o}.6355 = b$, AT $= r$ & ATr & AZ $= y$; erit ex notâ præcedenti 9.0827646 AT*q* + AZ*q* (ſive $\frac{ar^2}{b} + y^2$) ad 9.0827646 AT*q* (ſive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (ſive *y*) ad Ae quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; eſt verò ZY $= \frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc Elementum areæ aAe eſt $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ ſed elementum areæ curvæ NdGn notâ ſuperiore 115 inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(a^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ NAnFN eſt ad elementum areæ NdGn in ratione datâ *a* ad $\frac{1}{2}b$; Unde ſi valor hujus areæ NdGn in notâ *r* inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur & multiplicetur per *a* habebitur valor areæ NAnFN qui itaque prodibit

eſ=

propterea motus, qui figuræ $NeFn$ duplicatæ reſpondet, eſt $1^{gr}. 29'. 58''. 2'''$. Qui de motu priore ſubductus relinquit $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. motum totum nodi reſpectu fixarum inter ſui ipſius conjunctiones cum ſole; & hic motus de ſolis motu



annuo graduum 360 ſubductus, relinquit $341^{gr}. 40'. 54''. 7'''$. motum ſolis inter eaſdem conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum 360^{gr}. ut nodi motus jam inventus $18^{gr}. 19'. 5''. 53'''$. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit 19^{gr}.

18

$\frac{ar^2}{ar^2+by^2} NAZ + \frac{by^2}{ar^2+by^2} D - \frac{b^2y^2}{a^2r^2+by} E + \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2} F$ &c.

Tollatur verò hæc area ex ſegmento NAZ, ſive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2} NAZ$ reſiduum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} NAZ - \frac{by^2}{ar^2+by^2} D + \frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2} E - \frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2} F$ &c.

idque reſiduum eſt area quæſita NeZ; 1164
quod brevius expreſſum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2} \times NAZ - D + \frac{b}{a} E - \frac{b^2}{a^2} F$ &c.

Jam autem ut habeatur ratio ſemicirculi ad aream $NeFn$, ſive quod idem eſt quadrantis circuli ad NFT ejus areæ $NeFn$ dimidium; dicatur c quadrans peripheriæ cujus radius eſt r; ſitque m ad n ut c eſt ad r; valor quadrantis eſt $\frac{rc}{2}$, & cum NAZ eſt quadrans tum

 $y=x$

DE MUNDI SYSTEMATE.

$18'. 1''. 23'''$. Hic eſt motus medius nodorum in anno ſidereo. (u) Idem per tabulas aſtronomicas eſt $19^{gr}. 21' 21''. 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſimâ motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

PRO-

116. $y=r$ ergo valor dimidii areæ NeFn eſt $\frac{b}{a+b}\times\overline{\frac{rc}{2}-D+\frac{b}{a}E-\frac{b^2}{a^2}F+\frac{b^3}{a^3}G\ \&c.}$ ex iis autem quæ in notâ (r) dicta ſunt, valor D (ponendo r loco y) eſt

$$r^2\times\frac{2}{15}+\frac{2}{70}+\frac{6}{504}+\frac{10}{1584}+\frac{70}{18304};$$

qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\,r^2$ Omittantur reliqui termini quantitatis D ut & quantitates E, F de quâ omiſſione poſtea dicemus, & quoniam eſt $r=\frac{nc}{m}$ ideoque $r^2=\frac{nrc}{m}=\frac{2n}{m}\times\frac{rc}{2}$.

Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b}\times\overline{\frac{rc}{2}-\frac{rc}{2}\times\frac{2n}{m}\times .184}$ qui valor eſt ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b}\times\overline{1-\frac{2n}{m}\times .184}$ ad 1, ſubſtituendo autem loco b & a, eorum valores, eſt $\frac{b}{a+b}=.099$; & ex naturâ circuli eſt $2n$ ad m, ſive Diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideoque $\frac{2n}{m}\times .184=1.27\times .184=.23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; Quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ ſive .099 efficit .0758 qui valor eſt ad 1; ut area quæſita ad quadrantem; manebit eadem ratio ſi uterque terminus per 793 ducatur ſed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo eſt area quæſita NeFn ad ſemicirculum ut 60. proximè ad 793. Q. E. I.

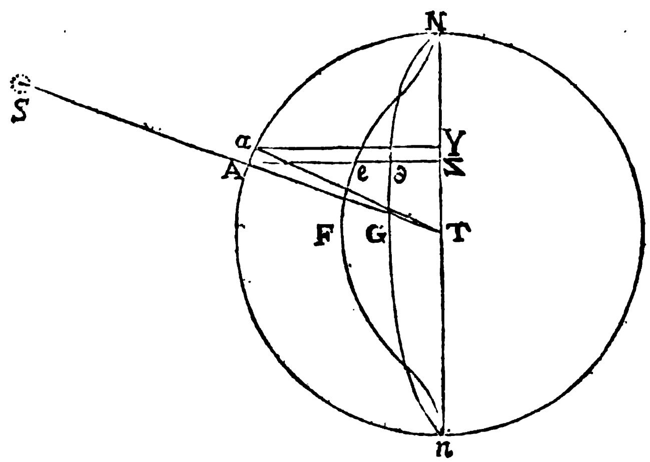
Omiſimus terminos ſeriei D præter quinque priores, & terminos ſerierum E, F &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos ſeriei D, prope æquales fieri terminis ſeriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi ſunt, ſicque mutuò deſtrui reliquæ verò ſeries cum per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur brevi evaneſcunt ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

(u) * *Idem per tabulas Aſtronomicas.* Caſſinus ex antiquis obſervationibus nodorum motum determinat in anno communi $19^{\circ}. 19'. 45''$. quibus additis $49''$ pro motu nodi per $6^{h}. 10' 54'''$ quibus annus ſidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno ſidereo eſt $19^{\circ}. 20'. 34''$., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex obſervationibus deducitur, & is diſſenſus eſt adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana Theoria ex calculo motus nodorum cum obſervationibus collato; imo diſſenſus iſtius cauſas ex orbis Lunæ excentricitate & inclinatione fluere indicat Newtonus, ſed hæc hujus non ſunt loci.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod eſt ut area $NTA - NdZ$, motus iſte eſt ut area NAe, & inde datur. (x) Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem problematis

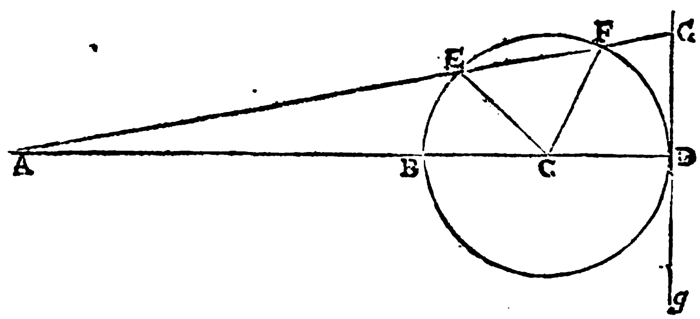


(x) 117. * *Verum ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipſis ſeriebus in notis 115 & 116 adhibitis, quæ cum parum convergant, regreſſum non tantùm difficilem, ſed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus quæ ut intelligantur duas Hypotheſes aſſumere liceat quibus pedetentim ad ipſam conſtructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo Hypotheſis ea ſit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, ſingulis horis retrahi nodum in locum ſuum priorem, ut nonobſtante motu ſuo proprio datum ſervet ſitum ad fixas, interea verò ſolem progredi à nodo: Eâ quippe in Hypotheſi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræſentat totum nodorum mo- 117.
tum integro anno ſidereo, ideoque ſectores N A T repræſentabunt motum medium eo tempore quo Sol diſcedit à nodo arcu N A & ſegmenta N A Z repræſentabunt motum verum eo ipſo tempore, ideoque Triangulum A T Z repræſentabit differentiam motus medii à motu vero, quæ debebit ſubſtrahi à motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, & tertio ut ex ipſâ figurâ liquet; addi autem in ſecundo & quarto: Cum itaque tota area circuli ſive factum totius Peripheriæ in $\frac{1}{2} r$, deſignet totum motum nodorum durante anno ſidereo, repræſentabit A T Z eam æquationem, quæ æquatio cum A Z ſit y & $TZ = \sqrt{rr - yy}$ erit

DE MUNDI SYSTEMATE.

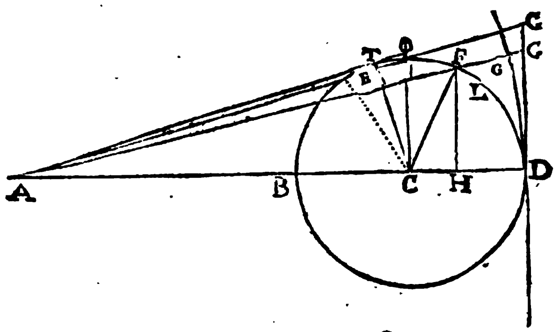
tis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut $19^{gr}. 18'. 1''.$



$23'''$. ad $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$, atque ideo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr}. 31'. 2''. 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr}., 49'. 3''. 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{1}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur

117. eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{rr-yy}$: Dividatur ergo tam circuli valor quam areæ ATZ valor per $\frac{1}{2}r$, erit Peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno ſidereo ad Æquationem quæſitam, ſive primum conſequentem duplicando & ſecundi antecedentis dimidium ſumendo quod proportionem non turbat, erit Peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus ſemeſtris nodi ad Æquationem quæſitam; Sed ex Principiis Trigonometricis, ſinus ejus arcus qui foret duplus arcus NA cujus ſinus eſt y foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Ergo ſi deſcribatur circulus radio quocumque CB, & ſumatur arcus BF duplus, arcus NA, hoc, eſt duplus diſtantiæ Solis à nodo (quæ diſtantia per motus medios Solis & nodi haberi poteſt) erit Peripheria tota ad FH ſinum ejus arcus BF ut motus ſemeſtris nodi ad æquationem quæſitam; ideo producatur DCB in A, ita ut radius AD ſit ad radium CD ut Peripheria tota ad motum ſemeſtrem nodi ſive ut a ad $\frac{1}{4}b$, & centro A radio AD deſcribatur arcus DG & ſumatur ejus arcus longitudo quæ ſit æqualis ſinui FH, numerus graduum ejus arcus DG erit ipſa æquatio quæſita; nam ſi ſumeretur in circulo cujus radius eſt CD arcus DL cujus longitudo eſſet æqualis FH, foret tota Peripheria ſeu 360s. ad numerum graduum in eo arcu DL contentorum ut numerus graduum motus ſemeſtris nodi ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ſive alternando tota Peripheria ad numerum graduum motus ſemeſtris ut numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ; ſed ex conſtru-

piatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad $9^{gr}. 11'. 3''.$) ut tangens DG ad circuli BFD circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus DAG uſurpari poteſt) ad



ſtructione cum longitudo arcus D G ſumatur æqualis ſinui F H, ſive arcui D L, numerus graduum in eo arcu D L contentorum eſt ad numerum graduum in arcu D G contentorum inverse ut eorum circulorum radii, hoc eſt ex conſtructione, ut 360° ad numerum graduum motus ſemeſtris nodi, ergo numerus graduum arcus D G eſt ipſe numerus graduum æquationis quæſitæ; Satis liquet autem arcum D G paucorum graduum eſſe debere, & à lineâ rectâ parum differre, hinc ſi in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius eſt CD, ſumaturque DG in tangente æqualis ipſi ſinui F H, perinde prope erit ac ſi ſumeretur ea longitudo ſecundum arcum circuli radio A D deſcripti, & punctum G ſive in Tangente ſive in arcu ſumatur eodem in loco ocurret quam proximè; ita ut ex hâc conſtructione, angulus G A D cujus arcus D G eſt menſura ſit ipſa æquatio quæſita, ſubſtractiva in 1°. & 3°. quadrante, additiva in 2°. & 4to. & obtinebitur juxta Trigonometriæ Principia, dicendo ut A C, ſive $360^{gr} - 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$, ad C F ſive C B, nempe $9^{d}. 54'. 31'' 57'''$

hoc eſt, ut $a - \frac{1}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$, ſive ut $35 \frac{1}{5}$ ad 1. 117.
Ita ſinus duplæ diſtantiæ Solis à nodo ad Æquationem quæſitam: Maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area ATZ quæ æquationem repræſentat eſt major in octantibus quam in ullo alio loco.

His probè intellectis facile inde ad veriorem computum procedere licebit.

2°. Hyp. In conſtructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer N A n N deſignat annum ſidereum, ſimulque motum nodorum in Hypotheſi quòd Sol ipſe deſcribit id ſpatium quo nodi reverâ ab ipſo diſcedunt; in hâc autem Hypotheſi motus nodorum eſt $19^{gr}. 49' 3''. 55'''$. & in calculis noſtris per quantitatem $\frac{1}{2} b$ fuit expreſſum.

Si autem reverâ arcus A N repræſentet receſſum Solis à nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia N A n N deſcribetur non erit annus ſidereus, ſed tempus elapſum inter ſyzygiam Solis Nodique & ſyzygiam ſequentem Solis cum eodem nodo, cumque uniformi-

 ter

DE MUNDI SYSTEMATE. ad motum medium nodorum addatur ubi nodi tranſeunt à quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tran-

117. ter deſcribatur ea circumferentia ſiquidem ad motus medios ſolis & nodorum refertur, ſectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque ſi totus circulus repræſentet motum nodorum à tempore quo ſol & nodus fuere conjuncti uſque ad ſequentem Solis ſyzygiam cum eodem nodo, ſector A T N repræſentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis & nodi, nodus & Sol arcu N A à ſe mutuo receſsêre.

Tempus autem, inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo, hâc ratione à Newtono determinatur per obſervationes; anno ſidereo dum nempe ſol $360^{gr.}$ emetitur motus nodi per obſervationes Aſtronomicas $19^{gr.}\ 21'.\ 21''.\ 50'''$ deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis & nodi quæ ſimul deſcribuntur quocumque tempore, ideoque via Solis & via nodi inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter ſe ut 360 ad $19^{gr.}\ 21'\ 21''\ 50'''$, ſed illæ duæ viæ ſimul ſumptæ $360^{gr.}$ efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una ſit ad alteram ut $360^{gr.}$ ad $19^{gr.}\ 21'\ 21''\ 50'''$. Hæc ultima pars quæ eſt $18^{gr.}\ 22'.\ 6''$ circiter, erit motus nodi inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur, ſi ex toto circulo N A n N duplum areæ N F n tollatur reſiduum eſt verus motus nodi inter ſyzygias; ſed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times .766}{a+b}$ ad 1. ſive proximè ut $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad 1. In eâdem vero erit ratione duplum areæ N F n (quod eſt quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$. ſita $\frac{1}{2}b$ qui eſt numerus graduum quem area circuli deſignat, ad numerum graduum deſignatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$; Cum ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}b$ deſignet in Prop. XXXII., & duplum areæ N F n deſignet $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}b$ tollatur, reſiduum $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ eſt verus motus nodi inter ſyzygias.

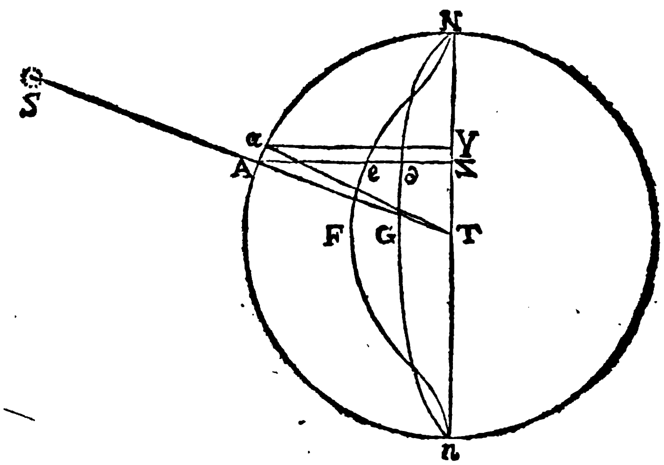
Itaque cum motus medius nodorum ſit ut ſector A T N, & motus verus nodi exprimatur per aream N A e; Æquatio eſt ut A T N − N A e, hoc eſt, cum totus circulus repræſentet motum nodorum inter ſyzygias, eſt $2rc$ ad A T N − N A e ut $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad Æquat. $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (A T N − N A e), ſed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z (omiſſis cæteris terminis qui per D, E &c. multiplicantur ut pote minimis).

Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (NTA − $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z):

Eum autem caſum ſumamus in quo A N eſt peripheriæ octans, quia in primâ Hypotheſi liquet eo in caſu Æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, & eâ ſubſtitutione factâ & loco N T A poſito ejus valore TAZ + NAZ factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (TAZ + $\frac{\frac{1}{2}b\text{NAZ}}{a+\frac{1}{2}b}$) & cum area circuli ſit .785 dum quadratum Diametri eſt 1, & octans circuli N T A ſit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium eſt T A Z in eâdem ratione, eſt N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideo-

tranſeunt à ſyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proximè cum

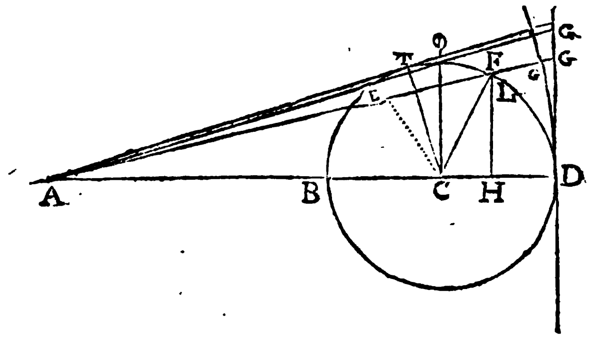
LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.



ideoque dividendo eſt NAZ ad TAZ ut .285 ad .5, & eſt NAZ = .57 TAZ unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc\,(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)$ TAZ Sed in hâc hypotheſi eſt TAZ $=\frac{1}{4}r^2$; hinc æquatio ſit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)r$ & ad hanc proportionem revocatur, $4c$ ſive tota circumferentia eſt ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2\,(a+b)}$ quod eſt dimidium motus nodi inter ſyzygias ut $\frac{a+.78\,b^2}{a+\frac{1}{2}b}r$ ad Æquationem; hoc modo autem conſtruitur quantitas $\frac{a+.78\,b}{a+\frac{1}{2}b}r$, ſive ſimplicius $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, deſcribatur circulus B C D cujus radius B C $=r=\frac{1}{4}b$; producatur C B in A ut ſit A B $=a+\frac{1}{4}b$, ideoque A C $=a+\frac{1}{2}b$ & A D $=a+\frac{3}{4}b$, centro C erigatur per- 117

 pen-

 cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA*



117. pendicularis Φ ad circulum uſque & pariter in extremo Diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec ſecet Tangentem in G, liquet quod A C ſive $a + \frac{1}{2} b$ eſt ad A D ſive $a + \frac{3}{4} b$ ut eſt CΦ ſive r ad D G quæ erit $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + \frac{1}{2} b} r$, ideoque erit tota circumferentia ad dimidium motus inter ſyzygias ut D G ad Æquationem quæſitam: ſive invertendo terminos omnes & alternando ut Newtoni expreſſio habeatur, eſt Æquatio ad motum nodi inter Syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem Æquatio quæſita erit prope æqualis angulo D A G; nam in Triangulo D A G eſt D G ad ſinum anguli D A G ſive ad ipſum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulos pro ſinubus ſumere licet) ut eſt A G vel A D, quod eſt $a + \frac{3}{4} b$, ad ſinum totum ſive ad radium C D quod eſt $\frac{1}{4} b$; ſed ſi $a + \frac{3}{4} b$, & $\frac{1}{4} b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a + \frac{3}{4} b}{a + b}$ ad $\frac{\frac{1}{4} b}{a + b}$ ita a ſive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4} a^2 b + \frac{1}{4} a b^2}{(a + \frac{3}{4} b)(a + b)}$; Diviſione factâ per $a + \frac{3}{4} b$ Quotiens eſt $\frac{\frac{1}{4} a b + \frac{1}{16} b^2}{a + b}$ omiſſis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4} b$, is verò quotiens eſt ipſa quantitas $\frac{\frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} b^2}{2(a + b)}$ quæ exprimit dimidium motus nodi inter ſyzygias; Ergo reſumendo cum ſit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4} b$ ad $\frac{1}{4} b$ ſive ut circumferentia tota ad dimidium motus nodi inter ſyzygias in eâque ratione ſit D G ad Æquationem, ipſe angulus DAG eſt æqualis æquationi.

Idem alio modo conſtabit; In ipsâ Peripheriâ D Φ B D, ſumatur arcus D L æqualis D G, erit ut 360gr. ad dimidium motus nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D deſcribatur arcus & in eo ſumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D ſive $a + \frac{3}{4} b$ ad radium CD ſive $\frac{1}{4} b$; ita numerus graduum arcus DL ad numerum graduum arcus D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus ſunt inverſè ut eorum radii

$NTA-NdZ$, & motum nodi per aream NAe; ut rem perpendenti

radii ſed $a+\frac{3}{4}b$ eſt ad $\frac{1}{4}b$ ut 360gr. ſive a ad dimidium motus nodi ſive ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$; Eſt ergo 360 ad dimidium motus nodi inter ſyzygias ut numerus graduum arcus D L ad numerum graduum arcus D G ſed ita etiam erat numerus graduum arcus D L ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ergo numerus graduum arcus D G eſt ipſa æquatio quæſita, ſed A G ſecabit arcum DG in puncto tali ut arcus inter eam lineam & punctum D interceptus ſit proximè æqualis Tangenti D G, nam in parvis arcubus, Tangentes prope æquantur ſuis arcubus, ergo linea A G ſecabit arcum D G in G quamproximè, ſed arcus D G cujus gradus ſunt ipſa æquatio, eſt menſura anguli DAG, ergo angulus DAG pro æquatione uſurpari poteſt.

Dicit autem Newtonus lineam A B debere eſſe ad lineam A C ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris quando nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut 19gr. 18'. 1''. 23'''. ad 10gr. 49'. 3''. 55'''. In hâc autem conſtructione fecimus AB $= a+\frac{1}{4}b$ & A C $= a+\frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi inter ſyzygias ſit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ dematur ex a habebitur motus Solis inter ſyzygias $\frac{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}b^2}{a+b}$; iſte motus Solis erit ad ejus motum annuum 360gr. ſive a ut motus nodi inter ſyzygias $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2}{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}ab^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit ſemiſſem motus veri mediocris ubi nodi ſunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}aab+\frac{1}{4}abb-\frac{1}{16}b^3$; ſive omiſſo termino $\frac{1}{16}b^3$, diviſis reliquis terminis per ab & duplicatis ut $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$; Ergo in conſtructione noſtra eſt A B ſive $a+\frac{1}{4}b$ ad A C ſive $a+\frac{1}{2}b$ ut motus annuus nodi, ad ſemiſſem ejus quod toto anno deſcriberetur eo motu quem habent nodi in quadraturis; Itaque erit etiam $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$ ſive A B ad A C ut motus medius nodi ad ſemiſſem motus veri in quadraturis ut ſtatuit Newtonus; Obſervandum quidem ex hâc conſtructione æquationem futuram maximam quando linea A G tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum Φ, & ſi à puncto A ducatur tangens A T erit ut A C ad C T ita ſinus totus ad Coſinum anguli B C T, qui angulus, B C T deprehendetur eſſe $88°\frac{1}{2}$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}°$. eſt verus locus medius in quo maxima ſit æquatio, ab Octante adeo parum diſſitus ut in ſequentibus æquationem maximam fieri in Octantibus ſupponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio quæ verè maxima foret ab ea quæ ſit in Octantibus inſenſibiliter differret.

3ª. *Hypoth.* Finximus arcum A N eſſe octantem Peripheriæ, & eo in caſu oſtendimus conſtructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis diſtantiis Solis à nodo paulo minus accurata eſt conſtructio, ſed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$

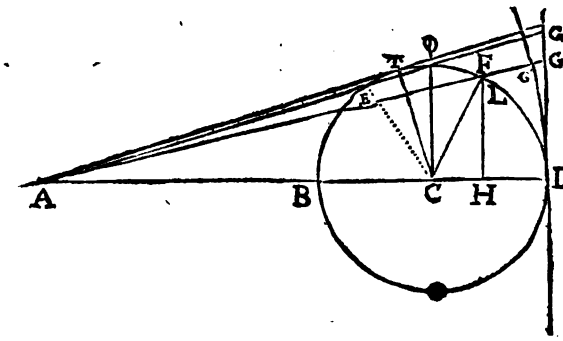
$$(TAZ+NAZ-\frac{ar^2}{ar^2+by^2}NAZ) = \frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}(TAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}NAZ)$$

ſumatur NAZ eſſe ad TAZ ut $r-\sqrt{rr-yy}$ ad $\sqrt{rr-yy}$, quod quidem verum eſt de ſpatio Rectilineo N A Z non vero de curvilineo N A Z, ſed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ er-

De Mundi Systemate.

ti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio ſemeſtris

117. rorem non magnum pariet, ſit æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ TAZ ſive numeratore & denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, ſit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)\frac{4TAZ}{r}$, quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, $4c$ ſive tota circumferentia eſt ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quod eſt dimidium motus nodi inter ſyzygias ut $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+2by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$ ad Æquationem quæſitam.



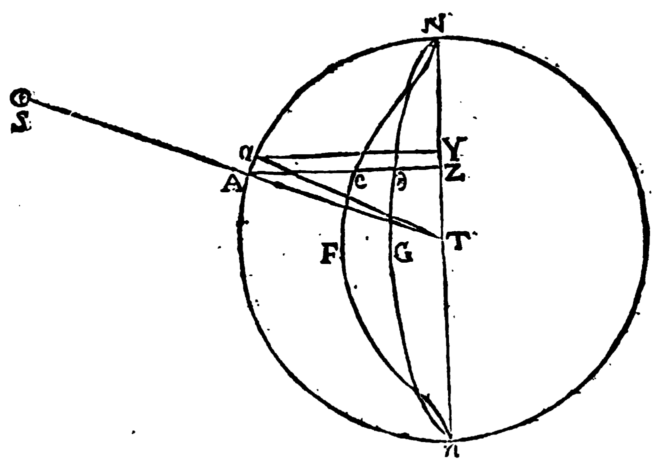
Ut conſtruatur hæc quant. $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus BFD cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$, ideoque $b=4r$, producaturque CB in A ita ut ſit $AB=a+\frac{1}{4}b$, ſumatur arcus BF duplus arcus AN, ductoque perpendiculo FH, & tangente erectâ in D ductâque AFG erit DG prope æqualis quantitati $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$; eſt enim ex conſtructione AH ad AD ut FH ad DG ideoque $DG=\frac{AD}{AH}FH$ eſt autem $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}=\frac{AD}{AH}\times FH$, nam poſitò $4r$ loco b & utroque termino diviſo per r^2, ſit $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}$; Valor mediocris quadrati y^2 eſt $\frac{1}{2}r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}=\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ eſt paulo major quam $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6y^2}{r}=3r$; Præterea

$4y^2$

meſtris motus nodorum. Eſt & (y) æquatio menſtrua, ſed quæ

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROB. XIV.

$\frac{2yy}{r}$ valore ſuo medioci eſt r, eſt etiam $\frac{2yy}{r}$ ſinus verſus arcus dupli ejus cujus ſinus eſt y, ideoque $\frac{2yy}{r}$ eſt accuratè æquale BH unde $a+\frac{4yy}{r}$ eſt $a+r+BH$, ſed $a+r$ per conſtructionem eſt AB, ergo $a+\frac{4yy}{r}$ eſt AH, ideoque $\frac{a+\frac{4yy}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4yy}{r}}=\frac{a+3r}{AH}$ abſque errore ſenſibili, quia ſi $\frac{2yy}{r}$ minus ſit aut majus quam r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, & ea quantitas non eſt magna reſpectu totius AH, manebit idem fractionis valor; ſed $a+3r=AD$ ideoque fractio $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-y^2}}}{ar^2+by^2}$ eſt proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.



Eſt vero accuratè $\frac{4TAZ}{r}=FH$, nam Triangulum $TAZ=\frac{AZ\times TZ}{2}$, eſt $AZ=y$, $TZ=\sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r}=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Sed, ex Principiis Trigonometricis, ſinus arcus dupli ejus cujus ſinus eſt y, eſt $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo ſinus arcus BF qui duplus eſt arcus AN cujus ſinus eſt y eſt $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ſed ſinus arcus BF eſt FH ex conſtructione, ideoque $FH=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}=\frac{4TAZ}{r}$, & quantitas $\frac{AD}{AH}\times FH=\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$.

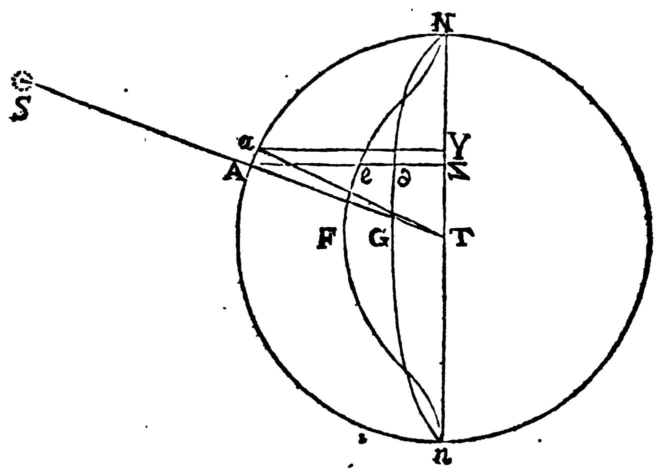
Quibus expoſitis, cætera, nempe angulum DAG pro æquatione ſumi poſſe, lineas AB ad AC ſumendas eſſe ut motus medius nodi ad ſemiſſem ejus motus in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in Hypotheſi ſecundâ.

(y) * *Eſt & æquatio menſtrua*, ex iis quæ

quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; inæqualitas & æquatio menſtrua nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi poſſunt.

Corol. Ex hac & præcedente propoſitione liquet quod nodi in (z) ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur

117. quæ in Prop. XXX. & XXXI. dicta ſunt, liquet quod dum Luna motu menſtruo circa terram fertur, nodi ſatis inæqualiter feruntur, hinc ſi locus nodorum ex eorum motu medio æſtimaretur, locus ille medius à vero nonnihil differret, idque quod eſſet corrigendum ſecundum diverſam Lunæ ipſius diſtantiam à nodo, Æquatio menſtrua meritò diceretur; ſed cum totus motus menſtruus Lunæ non ſit 25ſ. & compenſetur latitudinis error qui ex falsâ nodi poſitione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc Æquationem tradere, ſuo loco autem de eâ compenſatione agetur.



(z) * *Liquet quod nodi in ſyzygiis quieſcunt.* Etenim motus nodorum eſt ut area AZYa dempta area eZY, ubi verò nodi ſunt in ſyzygiis ideoque ubi punctum A incidit in N, evaneſcit linea AZ ac per conſequens area AZYa—eZY nullus itaque eſt nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″ 19‴ 26ⁱᵛ.* Si nodi diſtent 90gr. à Sole, AZ fit æqualis AT, & ZY=Aa, ideoque area AZYa quæ eſt Parallelogrammum ejuſdem altitudinis ac baſeos ac Triangulum ATa eſt ejus duplum, cumque eZ ſit ad AZ ut AZq ad 9.0827646 ATq + AZq ſitque AZ = AT in hoc caſu, ſit eZ = $\frac{AT}{10.08276}$ & area eZY eſt $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ ſive duplum Trianguli ATa diviſum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream AZYa—eZY, eſt in hoc caſu

tur motu horario 16$''$. 19$'''$. 26^{iv}. (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus ſit 18^{gr}. 30$'$. Quæ omnia cum phænomenis cœleſtibus probè quadrant.

Liber Tertius. Prop. XXXIII. Probl. XIV.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum *J. Machin Aſtron. Prof. Greſham.* & *Hen. Pemberton* M. D. ſeorſum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta eſt. Et utriuſque chartæ, quas vidi, duas propoſitiones continebant, & inter ſe in utriſque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

De

caſu ad aream A T a ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, ſed quia tota area N A n N motum annuum deſignat 198^{gr}. 49$'$. 3$''$. 55$'''$. Triangulus A T a motum horarium repræſentans numerum graduum deſignabit qui obtineretur dividendo 198^{gr}. 49$'$. 3$''$. 55$'''$. per numerum horarum in anno ſidereo comprehenſarum & ea diviſione factâ numerus graduum quem repræſentat Triangulus A T a invenietur 8$''$. 8$'''$. 18^{iv}. 51^{v}. ſi itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iſte numerus ad quartum 8$''$. 8$'''$. 18^{iv}. 51^{v}. invenietur 16$''$. 19$'''$. 26^{iv}. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

(a) * *Et quod Æquatio motus nodorum in octantibus ſit* 18^{gr}. 30$'$. Ex ſecundâ hypotheſi notæ 117. Æquatio in Octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli B F D B ad dimidium motus nodi inter ſyzygias quod eſt 9^{gr}. 11$'$. 3$''$. ita $\frac{a + .78\,b}{a + \frac{1}{2}b}\, r$ ad Æquationem quæſitam; eſt autem b ad a ut 1 ad 9 0827646, itaque $a + .78\,b$ eſt ut 9.8627646 & $a + \frac{1}{2}b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{4}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} =$ 1.0292191, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b =$ 98^{gr}. 54$'$. 31$''$. 57$'''$. dat 10^{d}. 11$'$. 54$''$. 15$'''$. 8^{iv}. 11^{v}., ducta iterum in 9^{gr}. 11$'$. 3$''$, dat 938^{gr}. 39$'$. 49$''$. 48$'''$., ſed ſi radius r circuli B F D B exprimatur per numerum 98^{gr}. 54$'$. 31$''$. 57$'''$., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus 621^{gr}. 13$'$. 39$''$. 50$'''$. Diviſo itaque numero 938^{gr}. 39$'$. 49$''$. 48$'''$ per 621^{gr}. 13$'$. 39$''$. 50$'''$. Quotiens ſive Æquatio quæſita eſt 15^{gr}. 30$'$. 18$''$. &c. 117.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut oſtenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates $4c$ & r quæ circumferentiam totam ejuſque radium exhibent, cum enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ ſit 98^{gr}. 54$'$. 31$''$. 57$'''$., cavendum ne $4c$ ſive circumferentia tota, 360^{gr}. aſſumatur, ſed debet aſſumi ejus numeri graduum qui ſit ad 98^{gr}. 54$'$. 31$''$. 57$'''$. ut eſt circumferentia ad Radium.

De hâc autem Æquatione ſemeſtri non agunt De la Hirius & Caſſinus in Tabulis Aſtronomicis, nullius enim uſus eſt ad calculum Eclipſium ad quem potiſſimum accommodantur pleræque Lunares Tabulæ; hanc autem Æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) & in Octantibus diſtantiæ Solis à nodo hanc faciunt 18^{gr}. 39$'$. 46$''$., utrum accuratioribus Tabulis hæc æquatio ad 18^{gr}. 30$'$. 18$''$. magis accederet ignoramus, at, qui pro-

De Mundi Syſtemate.

De Motu Nodorum Lunæ.

Propositio I.

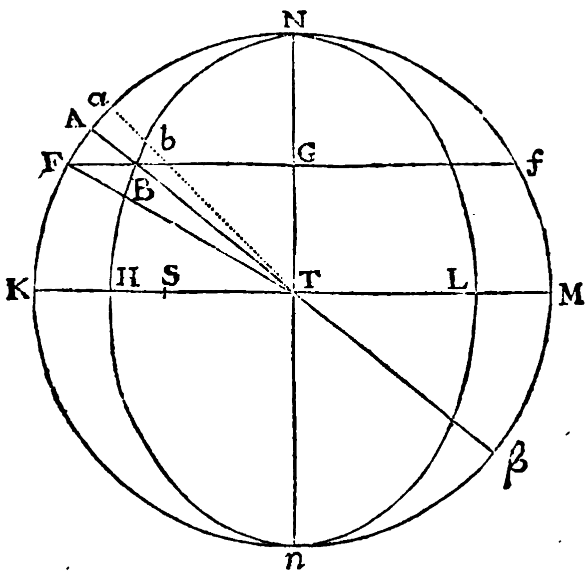
„*Motus ſolis medius à nodo, definitur per medium proportionale geometricum, inter motum ipſius ſolis medium, & motum illum mediocrem quo ſol celerrimè recedit à nodo in quadraturis.*

„Sit T locus ubi terra, Nn linea nodorum lunæ ad tempus „quodvis datum, KTM huic ad rectos angulos ducta, TA „recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari „quâ ſol & nodus à ſe invicem recedunt, ita ut angulus inter „rectam quieſcentem Nn & revolventem TA, ſemper fiat æ„qualis diſtantiæ locorum ſolis & nodi. Jam ſi recta quævis „TK dividatur in partes TS & SK quæ ſint ut motus ſolis „horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in qua„draturis, & ponatur recta TH media proportionalis inter par„tem TS & totam TK, hæc recta inter reliquas proportiona„lis erit motui medio ſolis à nodo.

„Deſcribatur enim circulus $NKnM$ centro T & radio TK, „eodemque centro & ſemiaxibus TH & TN deſcribatur ellip„ſis $NHnL$, & in tempore quo ſol à nodo recedit per ar„cum Na, ſi ducatur recta Tba, area ſectoris NTa exponet „ſummam motuum nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur „arcus aA quam minimus quem recta Tba præfatâ lege revol„vens in datâ temporis particulâ uniformiter deſcribit, & ſector „quam minimus TAa erit ut ſumma velocitatum quâ ſol & „nodus tum temporis ſeorſim feruntur. Solis autem velocitas „ferè uniformis eſt, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam „indu-

217. bè norunt quam difficile ſit obſervationes loci Nodi accuratiſſimas habere extrà Eclipſes, & quantùm parvus error in latitudine Lunæ & in verâ inclinatione orbitæ aſſignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc diſcrimen 9' obeſſe, quominus dici poſſit æquationem ita inventam cum Phænomenis cœleſtibus probè quadrare, & facile ſuſpicabuntur errorem hunc obſervationi potius quam calculo eſſe tribuendum.

„inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hu„jus ſummæ nempe velocitas nodi in mediocri ſuâ quantitate, „augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatâ ratione ſinus diſtan„tiæ ejus à ſole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3^{tii}. Princip. & „cum maxima eſt in quadraturis ad ſolem in *K*, (b) eandem „rationem obtinet ad ſolis velocitatem ac ea quam habet *SK*



„ad *TS* hoc eſt (c) ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH* „vel) (d) rectangulum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellip„ſis *NBH* dividit ſectorem *ATa* ſummæ harum duarum ve„locitatum exponentem, in duas partes *ABba* & *BTb* ipſis „velocitatibus proportionales. Producatur enim *BT* ad circu„lum in *β*, & à puncto *B* demittatur ad axem majorem per„pen-

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per conſtructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH—ad TH quadratum.* Eſt ex conſtructione TK ad TH ut TH ad TS, eſt ergo TK^2 ad TH^2 ut TK ad TS, & dividendo $TK^2 - TH^2$ ad TH^2 ut TK—TS ſive SK ad TS.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH vel rectangulum KHM.* Eſt enim $TK^2 - TH^2 = KH \times HM$, per 5^{am}. Lib. 2^{i}. Elem. Euclidis. 117.

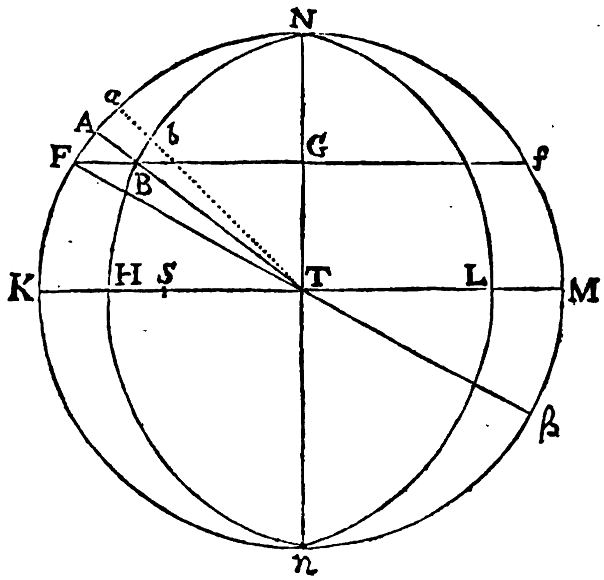
„pendicularis BG, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis F & f, & (e) quoniam ſpatium $ABba$ eſt ad ſecto„rem TBb ut rectangulum $AB\beta$ ad BT quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex TA & TB „ob rectam $A\beta$ æqualiter & inæqualiter ſectam in T & B.) „Hæc igitur ratio ubi ſpatium $ABba$ maximum eſt in K, ea„dem erit ac ratio rectanguli KHM ad HT quadratum, ſed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis ſector ATa dividitur in partes velo„citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. KHM eſt ad HT „quadr. ut FBf ad BG quad. (g) & rectangulum $AB\beta$ æqua„tur rectangulo FBf. Erit igitur areola $ABba$ ubi maxima „eſt ad reliquum ſectorem TBb, ut rectang. $AB\beta$ ad BG „qua-

317 (e) * *Et quoniam ſpatium ABba &c.* Sector TAa eſt ad ſectorem TBb ut AT^2 ad BT^2, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt ſenſibiliter ſector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB deſcripti). Dividendo autem eſt $TAa - TBb$ ſive ABba ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; eſt verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2i. Lib. El.) ergo *ABba ad TBb ut ABβ ad BT quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM eſt ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, eſt KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, ſed (per 5am. Lib. 2i. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum $AB\beta = FBf$* (per 35. 3i. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi poteſt, area ABba ubi maxima eſt, eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad BG^2 ergo ubi maxima eſt ABba eſt $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area ABba eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad BT^2, ergo illis in locis eſt $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, eſt ergo area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ ſive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur eſt ubique idem, eſt area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ ſive ut BT^2 ad BG^2, ſed in Triangulo BTG eſt BT ad BG ut ſinus anguli recti G ad ſinum anguli BTG per Principia Trigonom. & diſtantia Solis à nodo ubi area ABba eſt maxima, nempe in K, menſuratur per angulum rectum, & ubi eſt in loco quovis A per angulum BTG, ergo area ABba ubi maxima eſt, eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut quadrata ſinuum diſtantiæ Solis à nodo in utrovis loco, ſed in eâ ſunt ratione motus nodorum in iis diſtántiis; Ergo ut eſt area ABba ubi maxima eſt ad motum nodi in eo loco, ita eſt area ABba in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, ſed ubi area ABba maxima eſt, eſt ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, eſt etiam in quovis loco area ABba ad motum nodi ut area BTb ad

„quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut *ABβ* re„ctang. ad *BT* quadratum; & propterea areola *ABba* in lo„co *A* minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra„tione *BG* ad *BT* hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ „ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum *ABba* „nempe ſpatium *ABN* erit ut motus nodi in tempore quo ſol „digreditur à nodo per arcum *NA*. Et ſpatium reliquum nem-



„pe ſector ellipticus *NTB* erit ut motus ſolis medius in eodem „tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius, „is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit, „motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium, „ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta *TK* ad re„ctam *TH* mediam ſcilicet proportionalem inter *TK* & *TS*; vel „quod eodem redit ut media proportionalis *TH* ad rectam *TS*.

Pro-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique ABba ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium ABba &c.* 117.

PROPOSITIO II.

„*Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

„Sit angulus A diſtantia ſolis à loco nodi medio, ſive motus „medius ſolis à nodo. Tum ſi capiatur angulus B cujus tangens „ſit ad tangentem anguli A ut TH ad TK, hoc eſt in ſubdu„plicatâ ratione motus mediocris horarii ſolis ad motum me„diocrem horarium ſolis à nodo in quadraturis verſante; erit „idem angulus B diſtantia ſolis à loco nodi vero. Nam jun„gatur FT & ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris (h) erit „angulus FTN diſtantia ſolis à loco nodi medio, angulus au„tem ATN diſtantia à loco vero, & tangentes horum angu„lorum ſunt inter ſe ut TK ad TH.

„*Coroll.* Hinc angulus FTA eſt æquatio nodorum lunæ, „(i) ſinuſque hujus anguli ubi maximus eſt in octantibus, eſt „ad

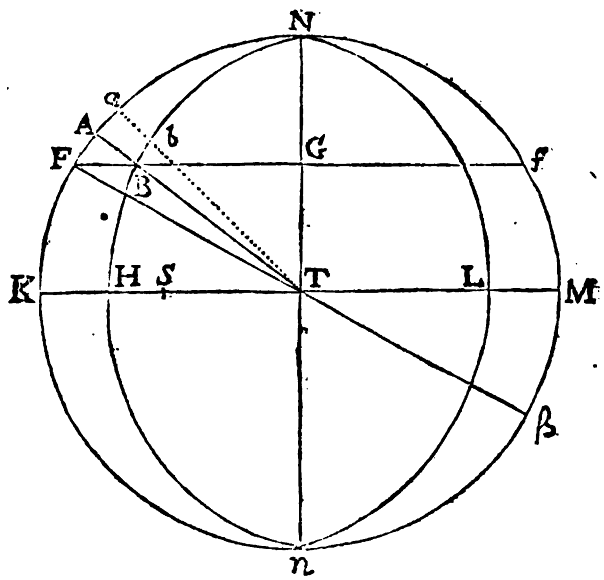
117. (h) * *Erit angulus FTN diſtantia Solis à loco nodi medio.* Cum circulus NKnM repræſentet totum motum Solis à nodo inter ſyzygias proximas cum eodem nodo, ſectores ejus circuli ut F T N repræſentabunt motum medium Solis à Nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter ſyzygias cum eodem nodo, ut erit is ſector aſſumptus ad totum circulum.

Ducatur verò F G quæ occurrat Ellipſi in B, cumque ſectores Elliptici B T N repræſentent Solis motum qui uniformis ſupponitur, ii ſectores B T N ſunt proportionales tempori; ſed ſector Ellipticus B T N erit, ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, ad totam Ellipſim ut ſector circularis FTN ad totum circulum, ideoque tempus quo Solis motus repræſentabitur per B T N erit idem ac tempus quo Sol à nodis receſſerit motu medio repræſentato per F T N, ſed dum Sol deſcribit ſectorem B T N, vero motu recedit à nodo ſectore N T A, per dem. prop. ſuper. ergo ſector F T N repræſentat medium motum Solis à nodo eo tempore quo verus ejus à nodo motus repræſentari debet per N T A, ergo medius motus eſt ad verum ut angulus T N ad angulum A T N, Tangentes autem horum angulorum, ſumendo T G pro radio, ſunt F G & B G, & F G eſt ad B G ut K T ad K H ex naturâ circuli & Ellipſeos.

(i) * *Sinuſque hujus anguli in octantibus eſt ad Radium ut KH ad TK+TH.* Ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus hujus anguli F T A qui eſt æquatio nodorum Lunæ ad ſinum anguli T F G, qui in hoc caſu eſt 45$^{gr.}$ (cujus ergo ſinus eſt $TA\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut eſt F B ad B T, ſive omnes terminos quadrando; eſt quad. ſinus Æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 ſive tollendo fractionem, eſt quadr. ſinus Æquationis quæſitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2BT^2$, ſed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ & in octantibus eſt $TG = FG$ ſive $BG + BF$ cujus quad. eſt $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ & $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus Radix quadrata (negligendo BF^2) eſt

„ad radium ut KH ad $TK+TH$. Sinus autem hujus æqua- „tionis in loco (k) quovis alio A eſt ad ſinum maximum, ut „ſinus ſummæ angulorum $FTN+ATN$ ad radium: hoc eſt „ferè ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis à loco nodi medio (nempe „$2FTN$) ad radium.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROB. XIV.



Scholium.

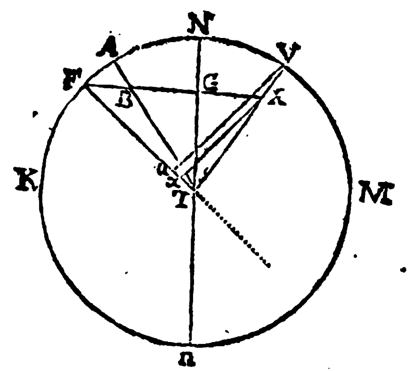
„Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit „$16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. hoc eſt in anno toto ſiderco $39^{\circ}.\ 38'$. „$7''$.

eſt $2BG+BF=FG+BG$: Ergo tandem cum ſit quad. ſinus Æquationis quæſitæ ad TA^2 ut eſt FB^2 ad $2BT^2$; Radices quadratas omnium terminorum ſumendo eſt ſinus Æquationis ad TA ſive ad Radium ut eſt FB ad $FG+BG$, ſed eſt BF ad $FG+BG$ ut KH ad $TK+TH$; hinc tandem, ſinus Æquationis maximæ eſt ad radium ut KH ad $TK+TH$.

(k) * *Sinus autem Æquationis in loco quovis alio &c.* Ut hoc commodè demonſtretur hoc Lemma adhibendum eſt.

I I n.

„7''. 50'''. erit (1) *TH* ad *TK* in ſubduplicatâ ratione nu-„meri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc eſt ut „18,



817. In circulo quovis N K n M ſumatur arcus N F ejuſque ſinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ ſecet hunc ſinum in B, dico quod ſinus ſummæ angulorum F T N, A T N erit ad T G Coſinum anguli aſſumpti F T N, ut ſumma linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N ſumatur arcus N V = N A, ducatur T V & producatur F G quæ occurrat radio T V in X, ductoque radio F T eoque producto ſi opus eſt, ducantur, in ipſum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex conſtructione, lineam B T eſſe æqualem lineæ X T, lineam G X eſſe æqualem lineæ BG, ideoque totam FX eſſe æqualem ſummæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u eſſe ſinum arcus F V qui eſt ſumma arcuum N F & N V ſive NA, & propter Triangula FXx, FTG ſimilia, ob angulum F communem & rectos x & G eſt TF ad TG ut FX ad Xx, & propter Triangula ſimilia u V T, xXT eſſe V u ad T V ſive T F ut X x ad TX ſive B T; unde ex perturbato ordine ſit V u ad T G ut F X ſive FG+BG ad B T; Eſt itaque $BT = \frac{(FG+BG)TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur ſinum æquationis in quovis loco eſſe ad ſinum æquationis maximæ ut ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ad radium; nam ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus Æquationis quæſitæ ſive ſinus anguli FTB ad ſinum anguli F (qui eſt TG Coſinus nempe anguli F T N) ut eſt BF ad B T hoc eſt, ut eſt B F ad $\frac{(FG+BG)TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque conſequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet ſinus æquationis quæſitæ ad V u qui eſt ſinus ſummæ angulorum FTN+ATN ut B F ad F G + B G, ſed ex notâ præcedenti eſt B F ad B F + B G ut K H ad T K + T H, & eſt K H ad T K + T H ut ſinus æquationis maximæ ad Radium, hinc tandem, ſinus æquationis cujuſvis ad ſinum ſummæ angulorum F T N + A T N, ut ſinus æquationis maximæ ad Radium.

(1) * *Erit TH ad TK in ſubduplicatâ*

„18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea *TH* ad *HK* ut „18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus ſolis in anno ſidereo ad „motum nodi medium 19°. 18′. 1″. 23‴$\frac{2}{3}$. LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.

„At ſi motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis „ſit 360°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in theoriâ lunæ „adhibitis deducitur: motus medius nodorum in anno ſidereo „erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et *TH* erit ad *HK* ut 360gr. „ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde „motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet „16″. 18‴. 48iv. Et æquatio nodorum maxima in octanti„bus 1°. 29′ 57″.

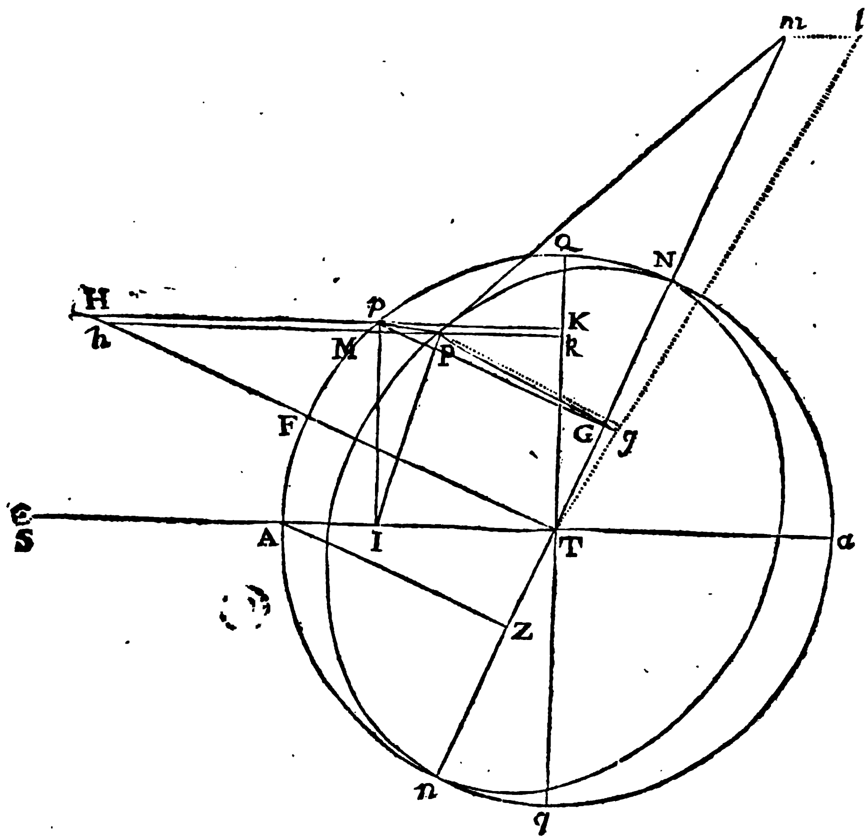
ratione &c. Eſt TS ad SK ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc eſt, ut 360. ad 39gr. 38′. 7″. 50‴. ſive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo eſt TS ad TK ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo TH media proportionalis inter TS & TK, *eſt ad TK in ſubduplicatâ ratione &c.* Reliqua hujus ſcholii ſimilibus calculis deducuntur, qui faciliores ſunt quàm ut plenius explicentur. 1172

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* ſyzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in



plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, *pG* & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ,

ticæ, ubi luna verſatur in P; & angulus Pgp inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Eſt (m) autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) ſit ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (ſeu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 3^{vi}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *Q E I.* LIBER TERTIUS. PROP. XXXIV. PROBL. XV.

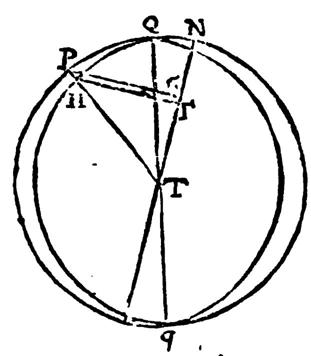
Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod ſi orbis ille ellipticus ſit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Co-

(m) *Eſt autem angulus* G P g *ad angulum.* In Triangulo P G g, ſinus anguli GPg eſt ad lineam Gg, ut ſinus anguli PGg ad P g (ſive P G, nam P g & P G quam minimum differunt) ſi verò P G aſſumatur pro radio, ſinus anguli P G g eſt P p, ergo ſinus anguli G P g eſt ad G g ut P p ad P G.

In Triangulo G T g, eſt G g ad ſinum anguli G T g ut T g ſive T G ipſi proximè æqualis ad ſinum Anguli Recti in G qui eſt radius pro quo P G hic aſſumitur ergo ex æquo, ſinus Anguli G P g eſt ad ſinum anguli G T g ut T G ad P G & P p ad P G conjunctim, & quia ſinus parvorum Angulorum ſunt ut ipſi Anguli, eſt *angulus* G P g *ad angulum* &c.

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex propoſitionis demonſtratione liquet quod variatio inclinationis eſt ad motum nodorum ut P p ad P G (ſive ut ſinus inclinationis plani ad Radium) & ut P G ad T G; ſumatur Π in Ellipſi ad eamdem diſtantiam à nodo ac P in circulo, ratio P G ad T G eadem erit ac ratio Π Γ ad T Γ, per conſtructionem. cum autem hic agatur de quantitate mediocri ſumatur eamdem eſſe plani inclinationem ſive agatur de Plano Elliptico ſive de plano circulari; Ergo variatio Inclinationis erit ſemper ut motus nodorum ſive agatur de plano Elliptico ſive de plano circulari; ſed motus nodo- 1173

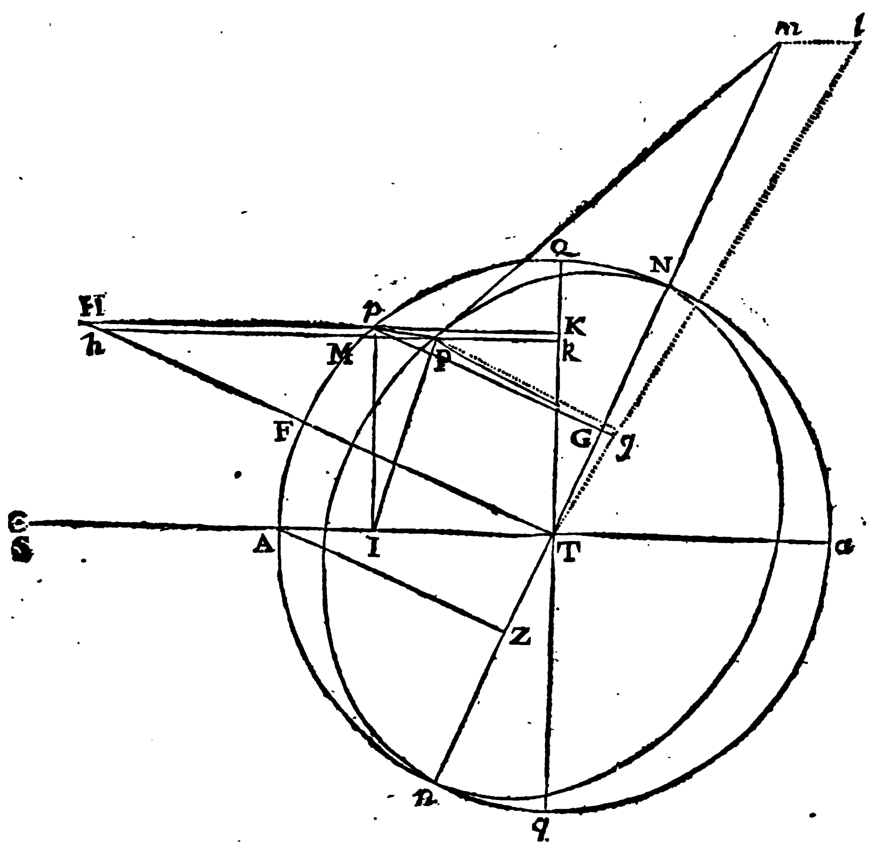


rum mediocris in orbe circulari eſt ad ejus motum in orbe Elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H



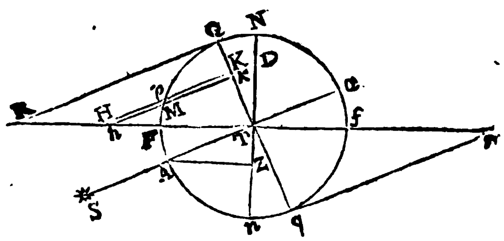
& h: (o) erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc

117. (o) * *Erit IT ad AT ut Kk ad Mp.* Eſt, ex naturâ circuli, ordinata pK cui æqualis eſt IT ad Radium AT, ut fluxio abſciſſæ Kk ad fluxionem arcus Mp, *&* *TG ad Hp ut TZ ad AT* producatur HpK ita ut occurrat lineæ Nn in D, propter Parallelas, HD, AT & HT, AZ per conſtructionem, eſt DT ad HD ut TZ ad AT, eſt pariter eamdem ob rationem DG ad pD ut TZ ad AT, quare ſumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriuſque rationis eſt *TG ad Hp ut TZ ad AT.*

eſt, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi terra & nodi ſingulis horis completis retraherentur à locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$, ut (p) aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (q) id eſt, ut circulus totus $QAqa$ ductus

(p) * *Ut aggregatum omnium arearum Hp Mh ſub ſignis propriis conjunctarum* ſcilicet prout linea MH ſumitur in eamdem partem ac linea MK aut in partem oppoſitam; priore caſu area HpMh ſigno affirmativo eſt afficienda, poſteriore negativo.



(q) * *Id eſt, ut circulus totus QAqa* &c. Liquet ex ipsâ constructione quod dum punctum p movetur ab F uſque ad q, areæ HpMH conſtituunt aream poſitivam FAnqrfTF, dum ex q ad f procedit areæ HpMh conſtituunt aream negativam qrf, quæ ex priori detractâ relinquit ſemicirculum Fnf.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q areæ HpMh efficiunt aream poſitivam faNQRFTf & dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam QRF, quæ ex priori detractâ relinquit ſemicirculum fNF.

Itaque omnes areæ HpMh ſub ſignis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum QAqa.

Cæterum obſervandum Variationem inclina-

ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (r) hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex quâ per menſem uniformiter continuata variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq$ ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4\,AT$, id eſt (cum Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4\,AT$ ut (ſ) ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodorum à ſole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol.

117 clinationis eſſe poſitivam aut negativam, hoc eſt creſcere aut decreſcere ſecundum ſigna quantitatis $AZ \times TZ$ de quibus in Coroll. proximo dicemus.

(r) * *Ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub.* Si in hac ratione loco circuli $QAqa$, ponatur ejus valor qui eſt circumferentia $QAqa$ ductâ in dimidium radii ſeu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $QAqa \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2 & dividatur per AT, non mutabitur ratio & fiet *ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ quad.*

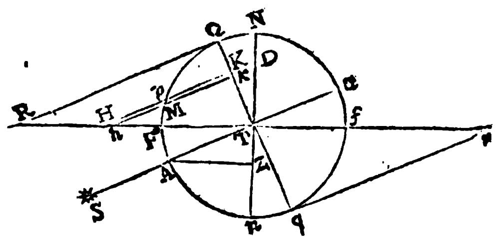
(ſ) *Ut ſinus duplicati anguli.* Ex Trigonometriæ elementis ſinus duplicati anguli ATn ſive ATN, cujus ſinus eſt AZ & Coſinus TZ, eſt $\frac{2\,AZ \times TZ}{AT}$ ſive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$.

Quando autem duplum anguli ATN excedit ſemicirculum ſive quando angulus ATN eſt rectus, ſignum ſinus dupli anguli ATN, ſit negativum ex poſitivo; quando angulus ATN excedit 180gr. ſignum ſinus ejus dupli iterum ſit poſitivus, ſicque deinceps.

Poſitivum autem ſignum deſignat angulum Planum per variationem minui, negativum verò ſignum eum angulum augeri ſignificat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, creſcit verò dum nodus à quadraturâ Q ad oppoſitionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppoſitione ad primam quadraturam q tendit, & denique augetur dum à quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut Inclinationis angulus ſit minimus cum nodi in quadraturis Q & q verſantur, maximus

Corol. 4. Quoniam inclinationis horariæ variatio, ubi nodi in

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIV. PROBL. XV.



ximus verò cum nodi ſunt in ſyzygiis A & a; Quæ Lex ab Aſtronomis eſt obſervata ſed paulò accuratius oſtendendum id ſequi reverâ ex hâc Propoſitione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A & ultimam quadraturam Q, ductâque FTf perpendiculari in lineam nodorum, dum Lunâ movebitur ex N ad F inclinationis variatio deſignabitur per aream NAFTh, cumque Luna tum verſetur inter Nodum & remotiorem quadraturam motus nodi erit regreſſivus, ideoque cum linea ϒT fiat ſemper remotior à Lunâ quam linea NT (punctum ϒ quod hic exaratum non eſt deſignat novum locum in quem Nodus adſcendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam Tϒ relatus minor erit quam ſi ad TN referretur, area ergo NAFTh deſignabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, ſed producta linea ϒT, ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq exiſtenti quam productio lineæ NT, ideoque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ Tϒ relatus major erit quam ſi ad lineam Tn referretur, ſed hoc in caſu area FRq deſignat inclinationis variationem, ergo area FAq deſignat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regreſſivus & ex N in ϒ migrat, & lineæ ϒT productio remotior eſt à Lunâ in areâ nf verſante quam productio lineæ NT ideo angulus inclinationis minor erit quam ſi ad lineam Tn referretur ea verò variationis mutatio deſignatur per aream Hnaf quæ ideo imminutionem anguli inclinationis deſignat.

Ab f ad Q creſcit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam Tϒ, totum itaque illud variationis incrementum deſignatur per aream Qfr ſed à Q ad n, cum motus nodi fiat progreſſivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl, minuitur is angulus totaque imminutio deſignatur per aream NhrQ.

Reſumantur hæc omnia, deprehenditur, imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas NAFh, qnHR, Hnaf & NhrQ, quarum prima & ultima efficiunt QAFTr, duæ mediæ aream qafFR.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq & Qfr, quarum hæc detracta ex area QAFTr relinquit ſemicirculum QAFf, prior detracta ex areæ qafTR relinquit ſemicirculum qafF ideoque circulus totus QAqa deſignat imminutionem anguli inclinationis cum nodus verſatur in quovis puncto N quadrantis AQ.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N eſt in quadrante Qa, ex iis deprehendetur circulum QAqa deſignare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante aq verſetur, omnia eodem modo procedent ac in primo caſu, mutatis ſolummodo litteris majuſculis in minores, ideoque etiam oſtendetur circulum QAqa imminutionem anguli inclinationis deſignare; & pariter ubi nodus erit in quadrante qA caſus hic ad ſecundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum Nodus procedit ab A ad Q, tumque eſt minima, ſiquidem inde creſcere incipit uſquè ad a, ubi eſt maxima, ſiquidem inde decreſcit uſque ad q, ubi iterum eſt minima indeque creſcit uſque ad A ubi iterum maxima eſt.

117

DE MUNDI SYSTEMATE.

in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id (t) eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ductis in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc ſitu nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$, ſeu $5878''.$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc (u) eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit $5^{gr}.$ $1'$,

121. (t) * *Id eſt.* Ubi nodi verſantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A Z, abit in radium A T. Quarè $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ eſt ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. Sivè ut $IT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}$ A T, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T.

(u) 121. * *Hoc eſt ut diameter.* Sit T I vel $pK = y$, radius $QT = 1$, erit $TK = \sqrt{1-yy}$, ex naturâ circuli, & $TK = TG$ quia in hoc caſu recta n N, coincidit cum Q q, cum nempe nodi verſentur in quadraturis; ac proindè ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, id eſt $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1-y^2}$ Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus ſinubus diſtantiæ duplicatæ, multiplicari debet ſinus variabilis $2y \times \sqrt{1-y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc eſt, per $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæſitæ $= 2ydy$, ſumptiſque fluentibus, prodit area tota $= y^2$, factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit à quadraturâ ad ſyzigiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur ſumma totidem diametrorum multiplicandus eſt quadrans circuli per totam diametrum. Hinc ſi radius dicatur r peripheria p, erit ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, quo tempore Luna tranſit à quadraturâ ad ſyzigiam ad ſummam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, ſivè ut $2r$ ad p, hoc eſt, ut diameter ad circumferentiam.

Si

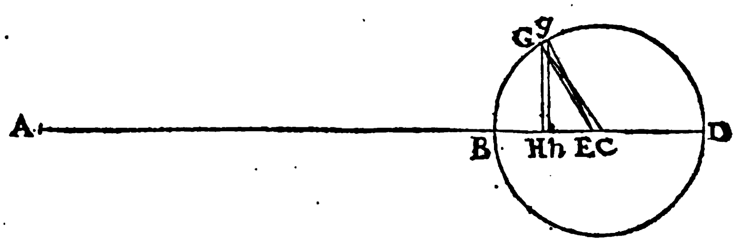
1′, ut $7 \times \frac{874}{10000}$, ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex ſummâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, eſt 163″, ſeu 2′. 43″.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit AD ſinus inclinationis maximæ, & AB ſinus inclinationis minimæ. Biſecetur BD in C, & centro C, intervallo BC, deſcribatur circulus BGD. In AC capiatur CE in eâ



ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$: & ſi dato tempore conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus inclinationis quæſitæ.

Nam

Si *autem inclinatio ſit* 5°. 1′. Erit ſinus Pp, huic inclinationi reſpondens, ad radium PG, ut 874 ad 10000 (ex vulgaribus ſinuum tabulis). Eſt autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quarè ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ eſt ad ſummam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo exiſtente in quadraturâ dum Luna à quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum à conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rurſum dum ad opoſitionem vadit augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compenſatis incrementis & decrementis ut nulla ſenſibilis superſit inclinationis mutatio, quâtenus ſcilicet nodus reverâ immotus in puncto Q ſupponitur. 121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BHD$ (x) $+ HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2\,BH \times BE = BEq + 2\,EC \times BH = 2\,EC \times AB + 2\,EC \times BH = 2\,EC \times AH$. Ideoque cum $2\,EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt (y) autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$, ſeu $GH \times GE$; id eſt ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed (z) AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hâc demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem, & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut (a) contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH ad radium

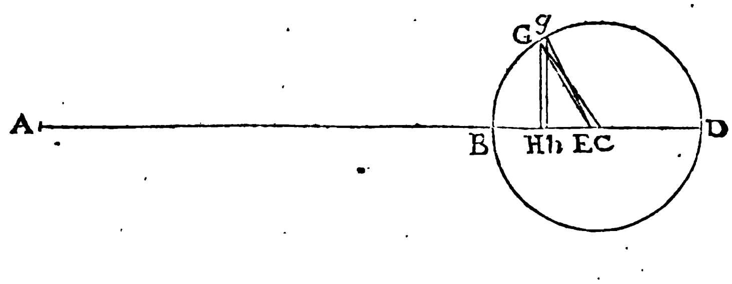
221. (x) * $= BHD + HEq$. (Prop. 5. Lib. 2. elem.) $= HBD + HEq - BHq$ (per prop. 3. lib. 2. elem.) $= HBD + BEq - 2\,BH \times BE$ (Prop. 7. ejuſdem Lib.) $= BEq + 2\,EC \times BH$ (ob $BD = 2\,EC + 2\,BE$). Eſt autem (per conſtr.) $BB^2 = 2\,EC \times BA$; quare $BEq + 2\,EC \times BH = 2\,EC \times AB + 2\,EC \times BH$.

(y) * *Eſt autem Hh ad Gg.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed AH.* (Per conſtr.)

(a) * *Ut contentum ſub inclinationis ſinu AH, & ſinu anguli recti BEG*, hoc eſt, ut contentum ſub mediocris inclinationis ſinu AH (quia in hoc caſu AH = AC) & radio *ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH, ad radium quadruplicatum.*

radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr}. 8' \frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ *B D* reſpondens, ad variationem illam horariam ut (b) diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt, ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *B G D* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$ LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.



quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *B D* ad $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *B D* prodibit $16', 23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil (c) mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur

(b) * *Ut Diameter B D ad arcum Gg.* Nam, in hâc conſtructione, variatio tota ſinuum differentiæ B D reſpondens per Diametrum B D exprimitur, & H h eſt incrementum ſinus inclinationis tempore quod per G g deſignatur, ſive horæ tempore; ſed ubi punctum H cadit in centro C, & punctum G in medio ſemicirculi, tunc eſt G g = H h; Ergo, eſt Diameter B D ad arcum Gg ut variatio tota ad variationem horariam in Octantibus; ſed ut ſunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit à quadraturâ ad ſyzygiam ad unam horam, ita ſemicircumferentia B G D ad G g, eſt ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$, ideoque variatio tota eſt ad vatiationem horariam in octantibus ut BD ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$ ſive ut B D ad BGD & $2079\frac{7}{10}{}^h$. ad 1^h. conjunctim. 121

(c) * *Nil mutatur ex vario ſitu Lunæ:* Nam ex demonſtratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria eſt ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* ſed nodis verſantibus in ſyzygiis fit $AZ = 0$ quare quantitas

Ppp 2 IT ×

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu $2'.\ 43''$; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris *BD* in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit $17'.\ 43''$. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit $17'.\ 45''$: ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit $5^{gr}.\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna (d) in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat *AB* ad *AD* ut ſinus graduum $4.\ 59'.\ 35''$ ad ſinum graduum $5.\ 17.\ 20''$, & capiatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit *AH* ſinus inclinationis quæſitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat 90^{gr}. à

121. $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ fit etiam o, evaneſcit itaque hoc in caſu horaria variatio, ideoque in vario ſitu Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio: Et quidem idem citra calculum patet ex ipſâ rei naturâ, nam verſantibus in ſyzygiis, ſive ſole exiſtente in lineâ nodorum, ſol eſt in eo plano in quo jacet linea nodorum, ſed linea nodorum eſt in plano orbitæ Lunaris, ergo ſol in ipſâ orbitâ Lunari productâ poſitus cenſeri poteſt, ac per conſequens qualiſcumque ſit ejus actio in Lunam, ipſam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur.* Nam dum Luna ab unâ ſyzygiâ ad eamdem ſyzygiam redit, tota variatio menſtrua eſt ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut ex Cor. 3°. Prop, præcedentis conſtat ut Inclinationis ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodi à Sole ad quadruplum quadratum radii, ſed per hujus Probl. conſtructionem in ea ratione eſt AH, ſi modo AB ſit ut ſinus minimæ inclinationis & AD ſinus maximæ, ſed $48^{r}.\ 59'.\ 35''$ eſt minimus inclinationis Angulus ubi Luna eſt in ſyzygiis & $58^{r}.\ 17'.\ 20''$ eſt maximus. *Ergo fiat A B ad A D ut ſinus graduum* $48^{r}.\ 59'.\ 35''$ &c.

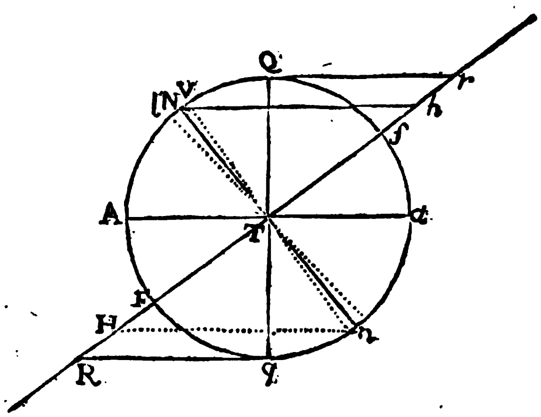
(e) *Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio ubi Luna diſtat,* 90^{gr}. *à nodis.* Minima inclinatio ubi Luna diſtat 90^{gr}. à nodis eſt ubi nodi ſunt in quadraturis, nonageſimus autem à nodis gradus incidit in ipſam ſyzygiam itaque minima inclinatio eadem eſt ac in præcedenti caſu; maxima vero inclinatio eſt cum nodi ſunt in ipſis ſyzygiis, & nonageſimus à nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, ſed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario ſitu Lunæ, itaque eadem eſt ſive Luna in ſyzygiis ſive in quadraturis verſetur, eadem ergo eſt iterum maxima inclinatio ac in caſu præcedenti, ideoque in hoc caſu A.B & A D eadem aſſumenda ſunt ac in caſu præcedenti: Reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonageſimum à nodo gradum brevior ſit tempore ejus reditus ad ſyzygiam ſive

à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in (f) calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Scho-

ſive menſe ſynodico, ſiquidem menſe Periodico etiam brevior eſt, tamen hic caſus ad fictionem Corollarii ſecundi magis accedit, in quo nempe ſupponitur nodum toto menſe ſenſibilem viam non eſſe emenſum, quod quidem accuratius dicetur ſi aſſumatur reditus Lunæ ad eumdem ſitum reſpectu nodi; hic ergo eadem conſtructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, poſitâ inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, & aſſumptâ diſtantiâ Lunæ à nodo, hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ creſcit à nodo ad gradum à nodo nonageſimum, inde decreſcit accedendo ad alterum nodum &c. Procedat ergo Luna à nodo N ad punctum F 90gr. à nodo diſſitum, motus medius nodi eſt major motu vero, toto eo intervallo, ut ſuperius (ad Prop. XXXII.) oſtenſum eſt, ergo aſſumpta mediocri diſtantia à nodo quæ verâ major eſt & mediocri inclinatione quæ convenit illi menſi, latitudo major invenietur quam debuiſſet, ſed quoniam in caſu iſtius figuræ minuitur Angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, & is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cum Luna eſt in F circiter, quia area NFh eſt ferè ſemicirculo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quam is qui per inclinationem mediocrem ſupponitur, unde latitudo vera major evadit quam ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motus mediocris loco motus veri aſſumitur invenitur latitudo major vera, ſed ex eo quod inclinatio mediocris aſſumitur loco veræ, invenitur latitudo minor vera; inæqualitates itaque menſtruæ quam variatio inclinationis & motus nodorum admittunt, ſeſe mutuo compenſant in calculo latitudinis. Cæteri caſus eamdem compenſationem ſuppeditant, v. gr. dum Luna ex F in q movetur motus verus nodi eſt minor motu vero, hinc Luna eſt reverâ remotior à nodo quam ſtatuitur per motum medium nodi, ideoque latitudo major ſupponitur quam eſt (quia in ſecundo quadrante à nodo quò proprior eſt Luna à nodo aſcedente N, ideoque eo remotior à deſ- 221.



cendente n, eò ejus latitudo eſt major) ſed cum orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem augetur is Angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideoque aſſumendo eam inclinationem mediocrem minor obtinetur latitudo quam reverâ eſt, ergo, propter inæqualitatem motus nodi latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur eſt major vera, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri eſt minor verâ, compenſantur ergo errores &c.

De Mundi Systemate.

Scholium. (g)

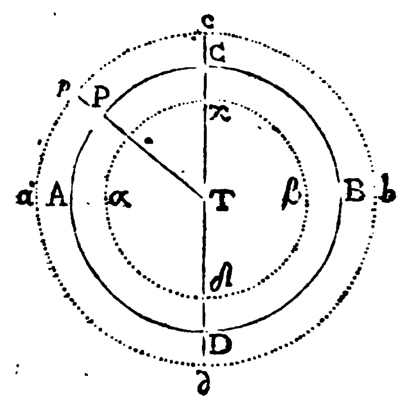
121. (gg) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex Æquationibus Lunaribus ad calculos revocari poſſint, ſed dolendum eſt illum non aperuiſſe vias quibus uſus eſt ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare ſumus conati & Methodos aperuimus quibus ex Gravitatis Theoria eas Æquationes deducere liceat, quantum fieri potuit iiſdem uſi ſumus Methodis quas Newtono familiares fuiſſet conſtat & ad ejus ſolutiones proximè nos acceſſiſſe percipient Viri Docti cum paucis duntaxat ſecundis ab ipſius numeris diſcedat calculus noſter & ejus conſequentiæ planæ ſint ſimiles iis quas ex ſuis Principiis Newtonus derivavit, utrum aliis Methodis res feliciùs abſolvi potuerit, viderint Doctiores, ſperamus tamen hos calculos, ut legitimis Principiis nixos, Lectoribus noſtris gratos fore, & forte eos juvare ut melius quid excogitent: Cæterum hoc Scholium in quinque Paragraphos commodè diſtribui poteſt; In primo Newtonus Indicat calculum ejus Æquationis Lunæ quæ Æquatio Solaris prima dicitur: In ſecundo, tradit Æquationes Solares motus nodorum & Apogæi Lunæ; In Tertio illam Æquationis Solaris correctionem tradit quæ ab Excentricitate orbitæ Lunaris pendet; In quarto aliam adhuc correctionem Æquationis Solaris addit quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ; In quinto denique agit de Æquationibus motûs Lunæ & ejus Apogæi quæ pendent ex ſitu Apogæi Lunæ reſpectu Solis.

Ut autem hæc omnia & potiſſimum ea quæ Æquationem Solarem Lunæ ſpectant, & quæ primo, tertio & quarto Paragrapho à Newtono indicantur meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex Theoriâ gravitatis inſtituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum cenſuimus.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus Æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in Hypotheſi orbem Lunæ eſſe circularem, poſtea in Hypotheſi Orbem Lunæ eſſe Ellipticum. Denique in Orbe Lunari ad Ecclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo ADBC circa corpus T à quo retineatur per vim decreſcentem ſecundum quadrata diſtan-



tiarum; accedat autem vis quædam conſtans quæ retrahat perpetuo corpus P à corpore centrali T, ſed quæ ſit exigua reſpectu vis ejus corporis T; Et deſcribatur circulus a d b c in tali diſtantiâ ut reſiduum vis quam exerceret corpus T in eâ diſtantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) ſit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi Radiorum T p, T P; Dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oſcilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo diſcedens, ita ut ejus motus aſſumi poſſit quaſi fieret in eo circulo.

Nam fingatur eam vim extraneam non eſſe

eſſe conſtantem, ſed talem ut, poſt diſceſſum corporis P à circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, reſiduum vis quam exercet corpus T in diſtantia ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) ſit ſemper inversè ut cubi diſtantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P ſpiralem Logarithmicam deſcribat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto ſemper manet idem; Verùm quoniam ab initio vis illa Extranea fuit conſtans, liquet quod priuſquam corpus P circulum a d b c attigerit ea vis plus imminuebat vim centralem quam ut decreſcat ſecundùm cubos diſtantiarum auctarum, ideoque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto ſemper creſcere debuerunt, ſed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decreſcentium ratio ad rationem inverſam cubi diſtantiarum; Perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, & angulus curvæ cum Radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia ſemper crevit is Angulus à tempore quo corpus P circulum A D B C deſcribebat in quo angulus radii cum curva rectus eſt; ideo P ultra circulum a d b c perget; cum autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis conſtantis vim Centralem minus minuet quam ſecundum cubum diſtantiarum, itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quam ſi Logarithmica ſpiralis deſcriberetur & tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulmu a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major eſt quam ut circulus deſcribi poſſit quod ſic demonſtrari poteſt; Areæ æqualibus temporibus deſcriptæ durante toto hoc corporis P motu ſunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T conſtanter diriguntur (ex Hyp.), ideoque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore deſcriptus foret ipſa baſis areæ deſcriptæ cujus altitudo eſt diſtantia à Centro ſeu ipſe radius, & is arcus debet eſſe ad arcum qui eodem tempore deſcriptus fuiſſet a corpore P ſi in circulo A D B C moveri perſeveraſſet, nullaque vis extranea acceſſiſſet inversè ut radii; ſagittæ autem eorum arcuum (quæ ſunt ſemper ut quadrata arcuum diviſa per Radios) forent inversè ut Cubi radiorum, ſed vis centralis ultra circulum adbc, minus decreſcit quam ſecundum cubum diſtantiarum, ergo ſagitta arcus deſcripti quæ eſt ejus vis centralis effectus, major eſt ſagittâ quæ foret ſecundum rationem inverſam cubi diſtantiarum, ergo ea ſagitta quæ per vim centralem producitur major eſt illa quæ obtineretur ſi circulus in eo loco deſcriberetur; Ergo corpus P à Tangente magis diſcedit verſus centrum quam ſi circulum deſcriberet, ergo ejus via acutum angulum cum Radio efficere incipit, ſicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decreſcentibus; Cum autem infra eum circulum tranſiverit angulus quem facit curva cum Radio iterum augetur donec is angulus rectus evadat, inde vero fiet obtuſus quia vis centralis illic minor eſt quam ut corpus P in circulo moveri pergat, redit ergo corpus P verſus circulum a d b c idque perpetuâ oſcillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in Logarithmicâ ſpirali cum hoc motu: Sed quò minor eſt vis illa data quæ ex centrali detrahitur eò illæ alternæ oſcillationes minus à circulo a d b c recedent, quare ſi vis ea exigua ſupponatur reſpectu vis Centralis corporis T, ſupponi etiam poteſt motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. E. D.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

Cor. 1. Si vis illa extranea & conſtans perpetuo traheret corpus P verſus T, iiſdem argumentis oſtendetur quod ſi deſcribatur circulus interior $\alpha\delta\beta\kappa$ in tali diſtantiâ à centro T, ut vis corporis T ad eam diſtantiam aucta per vim illam extraneam ſit ad vim in circulo ADBC inversè ut cubi Radiorum circolorum ADBC, $\alpha\delta\beta\kappa$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\delta\beta\kappa$ oſcillatur, & ſi ea vis extranea ſit exigua cenſeri poteſt quod corpus P in eo ipſo circulo $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur.

Cor. 2. Et ſi vis illa extranea conſtans non foret ſed creſceret ſecundum aliquam dignitatem poſitivam diſtantiarum, iiſdem omninò ratiociniis oſtendi poſſet quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur, eveniet ſolummodo ut radius T p paulum diverſus ſumi debeat ab eo qui inveniretur ſi vis ea extranea conſtans foret.

Schol. Aliis Methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari poſſe non negamus & quidem unam aut alteram Methodum ab hâc diverſam eumdem in finem in ſequentibus proponemus.

THE-

De Mundi Syſtemate.

III.

THEOR. II.

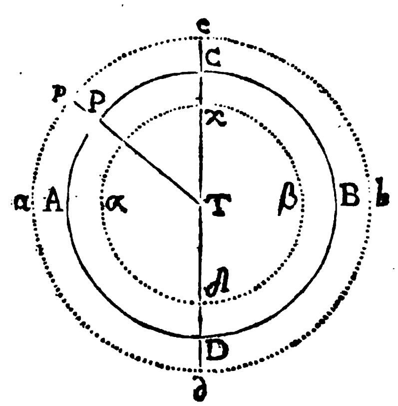
Poſitis iis quæ in primo Theoremate ſupponuntur, dicatur r Radius circuli ADBC, ſit ρ radius circuli a d b c, vel $\alpha\delta\beta\kappa$, ſit p Radiorum r & ρ differentia; Vis corporis T in diſtantia r dicatur V & in eadem diſtantia vis extranea dicatur Y quæ ereſcat ut diſtantiæ à centro T & quæ poſitiva cenſeatur ſi diſtrahat corpus P à centro, negativa verò ſi illud attrahat ad centrum, dico quod Radius ρ erit ſemper æqualis quantitati $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$, ſive quantitati $r \times \overline{1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}+\frac{16Y^3}{V^3}}$ &c. & omiſſis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evaneſcentibus, eſt ille radius $\rho = Y \times \overline{1+\frac{Y}{V}}$.

Nam vis corporis T in diſtantia ρ erit $\frac{rr}{\rho\rho}V$ vis extranea erit $\frac{\rho}{r}$Y ex hypoth., ideoque vis quâ circulus adbc (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) deſcribitur eſt $\frac{rr}{\rho\rho}V-\frac{\rho}{r}Y$, ſed hæc vis debet eſſe ad vim V quâ circulus A B C D deſcribitur inverſè ut cubi Radiorum, ſive ut $\frac{1}{\rho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præc.) ergo eſt $\frac{V}{\rho^3}=\frac{V}{r\rho^2}-\frac{Y\rho}{r^4}$, ſive reductis terminis ad eumdem denominatorem eſt $\rho^4 Y = r^3 V \times \overline{\rho - r} = \pm r^3 pV$. Loco ρ ſcribatur $r \pm p$ fiet $r^4 Y \pm 4r^3 pY + 6r^2 p^2 Y \pm 4rp^3 Y + p^4 Y = \pm r^3 pV$, ſive deletis terminis ubi p ſuperat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua eſt fit $r^4 Y \pm 4r^3 pY = \pm r^3 pV$, ſive $\pm pV \mp 4pY = rY$, unde obtinetur $\pm p = \frac{rY}{V-4Y}$; ideoque ρ, quod eſt $r \pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in ſeriem redactus eſt $r \times \overline{1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}}$ &c. ſive $r \times \overline{1+\frac{2Y}{V}}$.

THEOR. III.

Dicatur M Tempus Periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus Tempus Periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) erit $M \times \overline{1+\frac{2Y}{V}}$.

Dem. Tempus Periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) propter vim extraneam Y detractam vel ad-



ditam eſt ad Tempus Periodicum ejus corporis P cum revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut eſt quadratum radii ρ ad quadratum radii r; Nam quia vis Y eſt ſemper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, ſi tandem ejus via in circulum a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\kappa\delta$) mutetur, tempus quo deſcribetur peripheria a d b c (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) erit ad tempus quo deſcribebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) ad totam aream circuli A D B C ideoque ut quadrata radiorum ρ & r, ſive (per Theor. præced.) ut $\frac{\overline{V-3Y}^2}{\overline{V-4Y}^2}rr$ ad rr, ideoque ut $\frac{\overline{V-3Y}^2}{\overline{V-4Y}^2}$ ad 1. ſed hâc fractione in

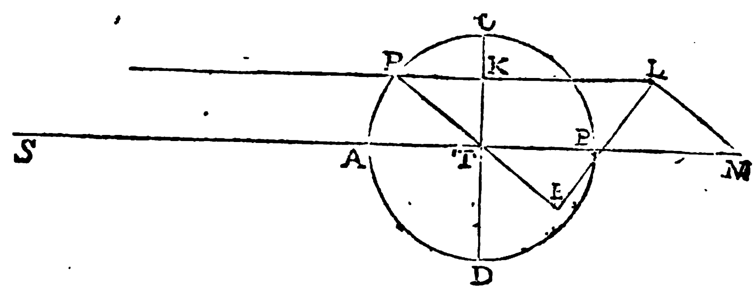
ſeriem

ſeriem reſoluta ea evadit $1 + \frac{Y}{V} + \frac{4Y^2}{V^2}$ &c. &c. quæ ſeries valde convergit propter exiguitatem iſtius fractionis $\frac{Y}{V}$ & illius quadratum eſt $1 + \frac{2Y}{V} + \frac{9Y^2}{V^2} + \frac{40Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1 + \frac{2Y}{V} +$ &c. ita M ad $M \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ quod eſt tempus quo deſcribetur Peripheria a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$.

THEOR. IV.

Sit T terra, P Luna, A D B C circulus quem Luna deſcribit; ſit S T diſtantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in terram in mediocri illa diſtantia, Sol ſupponatur immotus; diſtantia Lunæ à Terrâ P T dicatur r & ea non obſtante actione Solis in Lunam eadem manere cenſeatur; Sit C P diſtantia Lunæ à quadraturâ proxima quæ dicatur u, ſit ejus ſinus y, ſit ejus Coſinus z, Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam ſecundùm directionem radii P T, eſt ubivis $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

1.2.I.

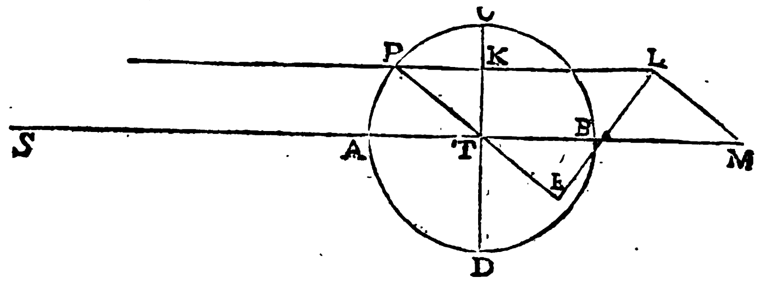


Nam, ſecundùm conſtructionem Prop. L X V I. Lib. I. Princ., repræſentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam S T vel S K, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræſentetur per lineam S L, & hæc vis cenſeatur compoſita ex duabus S M & L M, quarum L M ſit Parallela radio P T, cum autem linea S M ſit æqualis lineæ $ST \pm TM$, & terra trahatur per vim S T non ſecus ac Luna, ſitus reſpectivus Lunæ ac Terræ per eam vim ST non mutatur, ideo ſola ea pars vis SM quæ exprimitur per T M conſideranda venit; Præterea ex naturâ gravitatis, eſt S K ad S L ut eſt $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{\overline{SK \mp PK}^2}$ ſive ut eſt $SK^2 \mp 2SK \times PK + PK^2$ ad SK^2, aut omiſſo termino PK^2 ut $SK \mp 2PK$ ad S K, ſive quoniam 2PK eſt exiguum reſpetu lineæ SK ut SK ad $SK \pm 2PK$ eſt ergo SL ſive $SK \pm KL = SK \pm 2PK$ & $KL = 2PK$, cum autem linea P L ſit proxime parallela lineæ S M, & ex conſtructione P T ſit parallela L M, eſt T M proxime æqualis lineæ P L, & eſt $PL = PK + 2KL = 3PK$; Ex puncto L ducatur perpendiculum in radium P T (productum ſi neceſſe ſit) & vis T M, ſeu vis ipſi æqualis P L reſoluta intelligatur in vim P E & vim L E, vis L E radio P T ſit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE ſecundùm directionem radii agat, ſicque punctum P à centro T diſtrahat, altera autem pars quæ per L M repræſentatur ſecundum directionem radii agens punctum P verſus centrum trahit; Ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam ſecundum directionem radii P T eſt differentia virium P E & L M.

Jam vero ob Parallelas S L, S M & T P, L M eſt $LM = TP = r$, & cum P K ſit proxime perpendicularis in lineam T C

DE MUNDI SYSTEMATE.

321.

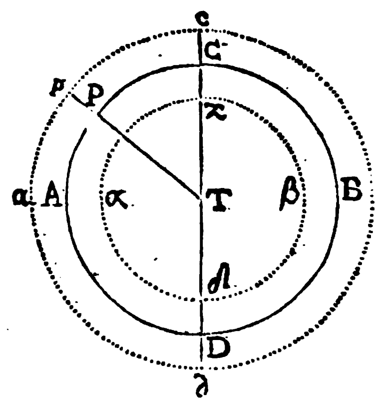


erit P K ſinus arcus P C qui ſinus dictus eſt y, ideoque $PL = 3PK = 3y$, cum autem Triangula P K T, P E L ſint ſimilia, eſt P T (r) ad P K (y) ut P L ($3y$) ad P E quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ & differentia virium P E & L M eſt $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia poſitiva eſt cum $\frac{3yy}{r}$ ſuperat r, tuncque Lunam à centro diſtrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minus efficit quam r, tuncque Lunam ad centrum attrahit, cum ergo linea S T ſive a repræſentet totam vim Solis in terram, eaque vis dicatur F, & quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræſentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit ſecundùm directionem P T, fiat ut a ad $\frac{3yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Q. E. O.

Coroll. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, $\alpha\delta\beta\kappa$ cujus radius ſit ϱ, Dico, quod, manente diſtantia Lunæ à quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam creſcet ut illæ diſtantiæ ϱ, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, nam cum arcus p c ejuſdem numeri graduum cenſeatur ac arcus P C ſinus eorum erunt ut radii, ideoque ſinus arcus p c erit $\frac{\varrho}{r} y$, Demonſtrabitur vero iiſdem plane argumentis quibus in Theoremata uſi ſumus quod, ſi Luna in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ moveretur, ea pars vis Solis quæ ſecundum directionem radii P T exercetur erit

$$\frac{F}{a} \times 3\frac{\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2}}{\varrho} - \varrho = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho^2 y^2 - r^2\varrho^2}{r^2\varrho} =$$

$$\frac{F}{a} \times \frac{3\varrho y^2 - r^2\varrho}{r^2} = \frac{\varrho}{r}\frac{F}{a} \times \frac{3y^2}{r} - r.$$



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poteſt, ſi concipiatur Lunam ex ſuâ orbita A D B C in aliam transferri, cujus ſingulæ particulæ quamminimæ ſint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in ſingulo circulo agens ſublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur ſit ad vim centralem Terræ in circulo A D B C citra Solis actionem agentem, inverſè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli A D B C.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos creſcat vel decreſcat, ſitque

pub-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo poſt minima fit ſicque gradatim creſcat, ſi conſtans cenſeatur per tempuſculum aliquod, breviſſime tranſibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cum vis Solis creſcat quantitate quam minima, ea vis cenſeatur conſtans per alterum tempuſculum, tranſibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento conſentaneum, ſicque ſemper, ideoque in ſingulis particulis arcus C P Luna cenſeri poteſt delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

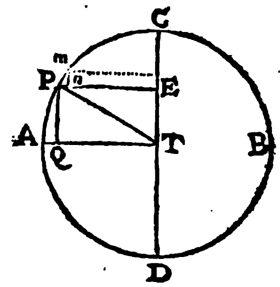
THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. ſuppoſita ſunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius eſt r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam ſecundum directionem P T & in datâ diſtantiâ C P à quadraturâ C, quæ diſtantia C P dicatur u, dicatur M tempus Periodicum Lunæ in circulo ADBC citrà Solis actionem, arcus exiguus à puncto P aſſumptus dicatur du, dico quod tempus quo ſimilis arcus deſcribetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis eſt tranſlata erit $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c.

Nam ſi vis Y quæ in punctum P à Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur & ſingula quæ dicatur d Y maneret conſtans durante unicâ revolutione Lunæ, ſicque gradatim Lunam in circulum a d b c transferret, tempus Periodicum in ſingulo circulo excederet tempus Periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2dY}{V}$. Hinc tandem tempus Periodicum quo circulus a d b c deſcriberetur foret $M \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c. per Theor. III. & tempus quo arcus ſimilis arcui du deſcriberetur in eo circulo, foret ad hoc tempus Periodicum ut du ad c, foret itaque $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$, ſed ſingulæ particulæ orbitæ quam Luna deſcribit propter adjunctionem vis Solis ſpectari poſſunt quaſi pertinerent ad circulos congruos vi Soli in illis punctis agenti, per Theor. V. Ergo, tempus inventum eſt illud ipſum, quo durante, Luna deſcribet arcum ſimilem arcui du in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum ydu, zdu, y^2du, z^2ydu, zy^2du, yz^2du, y^3du, y^4du &c. factarum ex Elemento arcus & dignitatibus ejus ſinus y, vel ejus Coſinus z.



Ex naturâ circuli Triangulum PTE eſt ſimile Triangulo fluxionali P m n; ideoque eſt PT (r) ad Pm (du) ut PE (y) ad P n (dz), ut TE (z) ad m n (dy), hinc eſt $du = \frac{rdz}{y} = \frac{rdy}{z}$; Hinc fit Primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis du dimenſionem habet imparis numeri, poſſint integrari; nam loco elementi du, ponatur ejus valor $\frac{rdz}{y}$ ſi y ſit imparis dimenſionis, vel $\frac{rdy}{z}$ ſi z ſit imparis dimenſionis, ea ſubſtitutione fiet ut pares evadant dimenſiones y vel z quæ prius impares erant, & quia in primo caſu habetur fluxio dz, loco y^2 ſubſtituatur $r^2 - z^2$, ſicque omnes factores ducentes dz, erunt aut r aut z, ideoque quantitas propoſita erit abſolutè integrabilis, in altero caſu cum habeatur fluxio dy, ut tollantur factores z cujus dimenſiones ſunt pares, loco z^2 ſubſtituatur $r^2 - y^2$, ſicque omnes factores ducentes dy erunt aut r aut y ideoque habebuntur termini abſolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis du ſint pares, & quidam primo ſit z^2du vel y^2du; Integralis horum Elementorum eſt $r \times$ CPQT vel $r \times$ CPE, nam eſt $z^2du = rzdy$, & zdy eſt fluxio areæ CPQT; eſt $y^2du =$

 $rydz$,

$r\,y\,dz$, & $y\,dz$ eſt fluxio areæ CPE; itaque quando P ex C pervenit in A & abſolvit quadrantem Integralis $z^2 du$ vel $y^2 du$ eſt $r \times \frac{rc}{8}$.

221. Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis du numero pari qualicumque, ſemper reduci poterunt ita ut quantitas propoſita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, puta y, altera variabili excluſa ponendo loco z^2 quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis $y^{2m} du$, ut ea ad impares dimenſiones revocetur ſpectetur ut $y^{2m-1} \times y\,du$; Eſt autem juxta Methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times y\,du = y^{2m-1} \int y\,du - \int . \int y\,du \times \overline{2m-1} \times y^{2m-2} dy$, ſed $y\,du = \frac{r\,y\,dz}{y} = r\,dz$, & Integralis quantitatis dz ſumptæ à puncto C eſt $r - z$, hinc $\int y\,du = rr - rz$, qua ſubſtituta in valore Integralis $\int y^{2m-1} \times y\,du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} rz - rr \int \overline{2m-1} \times y^{2m-2} dy + \int . rz \times \overline{2m-1} \times y^{2m-2} dy$, ſive (quia $rr \int \overline{2m-1} \times y^{2m-2} dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) eſt $\int . y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int \times \overline{2m-1} \times rz \times y^{2m-2} dy$ (ſive quia $r\,dy = z\,du$) $= -rzy^{2m-1} + \int . \overline{2m-1} \times z^2 y^{2m-1} du$ (& loco z^2 ſubſtituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + \overline{2m-1} \int . r^2 y^{2m-2} du - \overline{2m-1} \int y^{2m} du$. Et tranſpoſitione facta eſt $2m \int y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int \overline{2m-1} \times r^2 \int y^{2m-2} du$, & tandem $\int . y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2 \int y^{2m-2} du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; Hinc cum habeatur Integralis quantitatis $y^2 du$; ſi quæratur Integralis $y^4 du$ ea obtinebitur per hanc formulam, ſiquidem in eo caſu eſt $y^{2m-2} du = y^2 du$, & ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m} du$, quæ iſto in caſu eſt $y^4 du$; Simili modo ex integrali quantitatis $y^4 du$ habebitur Integralis quantitatis $y^6 du$ &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evaneſcit, quia illic eſt $z = o$. habetur ergo $\int y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2} du$; In eo ergo caſu ſi quæratur integralis quantitatis $y^4 du$, fiat $m = 2$ erit $\int . y^4 du = \frac{3}{4} r^2 \int y^2 du$, ſed $\int . y^2 du = \frac{r^2 c}{8}$ ideoque $\int . y^4 du = \frac{3 r^4 c}{4 \times 8}$; Si quæratur Integralis quantitatis $y^6 du$ fiat $m = 3$ & erit $\int y^6 du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4 du =$ ſed $\int . y^4 du = \frac{3 r^4 c}{4 . 8.}$ ideoque $\int . y^6 du \frac{3 . 5 r^6 c}{4 . 6 . 8}$.

Cor. 1. Si in primo caſu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores ſunt imparis dimenſionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, Integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia coſinus z ex T incipit & arcus u ex puncto C, unde dz negativum eſſe debet; erit ergo $\int r^n z^m dz = C - \frac{r^n z^{m+1}}{m+1}$, ut hæc conſtans C obtineatur, obſervandum quod ubi u eſt o, ideoque evaneſcit hoc elementum tunc eſt $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{n+m+1}$; v. gr. ſit $\int . rz^3 dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^5$.

Cor. 2. Si è contra arcus u ex puncto A inciperet, Integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur completa non erit, & eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario eſt indicata.

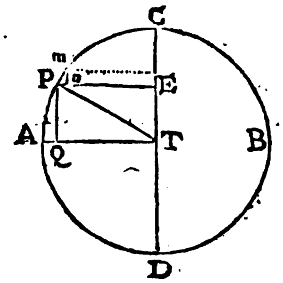
Cor. 3. In ſecundo caſu, ſi u ex puncto A incipiat erit $\int . y\,dz =$ APET & $\int z\,dy$ eſt area APQ, ut liquet ex ipſa figura.

Cor. 4. Denique ſi u ex puncto A incipiat & ambo factores ſint uterque dimenſionis paris, elementum non eſt reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis ſolutione factum eſt, ſed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y ſubſtituatur & vice verſa; Liquet enim quod z eſt ſinus reſpectu arcus AP, & y ejus Coſinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem abſolvit.

Conſ-



Conſtat ex Theor. VI. Quod ſi Sol ſit immotus, & Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo deſcribitur arcus du, (quodque debet eſſe $\frac{Mdu}{c}$ poſito M tempore Periodico Lunæ, & c Peripheriâ quam percurrit) evadat $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideo cum tempore $\frac{Mdu}{c}$ iſte arcus du deſcribi debuiſſet hoc tempore $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$. arcus $\frac{2Y}{V} du$ deſcriberetur, hæc eſt ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in ſingulo puncto P orbitæ Lunaris vis Y eſt $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ (per Theor. IV.) ergo Elementum retardationis Lunæ eſt du. $\frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$, cujus Integralis ſecundum Lemma præcedens eſt $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r4c}{8r} - \frac{1}{4}rc$, ſive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8}rc$, cum P pervenit in A, cumque idem ſit Solis effectus in ſingulo quadrante tota retardatio Lunæ eſt $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8}rc$ ſive $\frac{Frc}{Va}$, dum Luna revolutionem abſolvit, reſpectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus ſuus, & loco menſis Periodici M, menſis Synodicus μ intelligatur, & cenſeatur quod proxime verum eſt menſem ſynodicum qui reſpondet menſi Periodico in circulo a d b c peracto, eſſe ad eum menſem Periodicum ut μ ad M, ideoque eum menſem Synodicum eſſe $\mu \times 1 + \frac{2Y}{V}$ omnia procedent ut prius & erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore ſynodico. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI. 121.

Scrupulus eſſe poteſt, utrum in hac expreſſione, quantitas c deſignet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emenſus eſt menſe ſynodico; ſed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuiſſe de veris quadrantibus circuli, ideoque hic c deſignare peripheriam ipſam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{Va}$ ſit retardatio abſoluta Lunæ tempore ſynodico.

Verum alia certior correctio eſt adhibenda; Conſtat ex Propoſitione XXVI. hujuſce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem Radio orbitæ Lunaris perpendicularem, ita ut, velocitas Lunæ in Quadraturis ſit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73r$ ad $109.73r + \frac{yy}{r}$, hinc tempus quo deſcribitur arcus du brevius ſit in proportione velocitatum; ideoque cum id tempus fuerit $\frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, ſit $\frac{109.73r}{109.73r + \frac{yy}{r}} \times \frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$. ſive fractionem ad ſeries reducendo $1 - \frac{yy}{109.73rr} \times \frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; Quantitas autem hæc $\frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis ſecundùm directionem radii exercitam, & de acceleratione ad hanc partem pertinente actum eſt in XXVIa Prop.; & hinc ſit ut menſis ſynodicus medius ſit brevior eo qui debuiſſet eſſe in proportione numeri 10973 ad 11023, & inæqualitates inde natæ in variis partibus menſis ſynodici in variatione continentur;

De Mundi Syſtemate.

121. altera pars $\frac{\mu du}{c}\times\frac{2Y}{V}$ pendet ab actione Solis ſecundum radium orbitæ Lunaris exercitam, & de hac ſola iſto calculo agitur, ideoque cum ex iſta oriatur retardatio $\frac{2Y}{V}du$, & tempus $\frac{\mu du}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1-\frac{yy}{109.73r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus du deſcribi debuiſſet erit ſolummodo $\frac{2Ydu}{V}-\frac{2Yyydu}{109.73r^2V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$ evadet hoc Elementum $du\times\frac{2F}{Va}\times\frac{3yy}{r}-r-\frac{3y^4}{109.73r^3}+\frac{yy}{109.73r}$ cujus Integralis pro quadrante juxta Lemma I. eſt $\frac{2F}{Va}\times\frac{3r^2c}{8r}-\frac{1}{4}rc-\frac{3\times3r^4c}{4\times8\times109.73r^3}+\frac{r^2c}{8\times109.73}$ ſive $\frac{2Frc}{Va}\times\frac{1}{8}-\frac{5}{4.8.109.73}$ & quadruplicatum pro tota revolutione fit $\frac{Frc}{Va}\times\frac{433.92}{438.92}$.

Coroll. Conſtat ex Cor. 2do. Prop. IV. Lib. I. Princ. Quod vires centrales ſunt inter ſe directè ut radii & inverſè ut temporum Periodicorum quadrata: hinc, ſi ſit A annus ſidereus, & M menſis Periodicus ſidereus ſepoſitâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{AA}$ ad $\frac{r}{MM}$, ſive $\frac{F}{V}=\frac{aMM}{rAA}$ ſubſtituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{Frc}{Va}\times\frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante menſe ſynodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2}\times\frac{433.92}{438.92}c$, & ſi non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ Lunaris ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2}c$.

PROBL. II.

Dato tempore ſynodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod obſervari debuiſſet, ſi abeſſet actio Solis in Lunam ſecundùm radium orbitæ Lunaris exercitam.

Sit S menſis ſynodicus apparens, A annus ſidereus, inde (ex nota proportione menſis ſynodici ad Periodicum) invenietur menſem Periodicum apparentem eſſe $\frac{AS}{A+S}$, & quoniam hoc tempore Periodico Luna deſcriberet peripheriam c deducetur quod tempore ſynodico S deſcribet arcum $\frac{A+S}{A}c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore Periodico M deſcribere debuiſſet Peripheriam c, &, eadem in Hypotheſi, tempore S deſcripſiſſet aream $\frac{Sc}{M}$ hinc ergo retardatio abſoluta quam patitur tempore S eſt $\frac{Sc}{M}-\frac{A+S}{A}c=\frac{AS-AM-MS}{AM}c$. Sed per Corollarium præcedentis problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2}\times\frac{433.92}{438.92}c$ hinc obtinetur hæc æquatio $AS-AM-MS=\frac{433.92M^3}{438.92A}$, loco M ſcribatur XA, loco S ſcribatur EA, & fiet hæc æquatio $A^2E-A^2X-A^2EX=\frac{433.92A^3X^3}{438.92A}$ ſive $E=X+EX+\frac{433.92}{438.92}X^3$, ſed menſis ſynodicus medius eſt .08084896 A hinc E = .0804896 & æquatio fit $.08084896=1.08084896X+\frac{433.92}{438.92}X^3$, loco X ſubſtituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082129 + 1.09726905 R, unde habetur .00002767 = 1.09726905 R, hinc obtinetur R = .0000252 & M = .0744252 A.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis à Terra diſtantia, ita ut loco a dicatur X, dico quod, cæteris manentibus, Retardatio Lunæ durante Tempore ſynodico, cum Ter-

Terra diſtabit à Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92\,c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. Retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ ſed in aliâ à Sole diſtantia loco a ponatur X, & præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decreſcit enim vis Solis F ut quadrata diſtantiarum, hac ergo ſubſtitutione facta retardatio Lunæ fit $\frac{a^2 Frc}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; Tum vero loco $\frac{F}{V}$ ſubſtituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ & habebitur expreſſio Theorematis hujuſce.

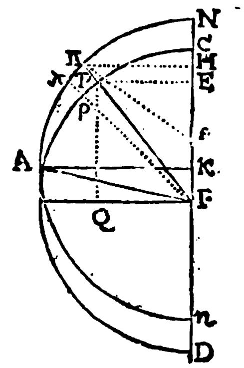
LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur $2a$ deſcribatur Ellipſis, ſit e ejus excentricitas eaque parva ſit, axis minor ſit $2b$, erit $b^2 = a - e^2$; Ex foco ut Centro radio a deſcribatur circulus, & ducantur à foco lineæ ſecantes circulum in P & Ellipſim in Π, linea FΠ dicatur X, ſinus anguli A F P ſit y, Coſinus z, Dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$.

Ducatur ex Π, ΠH perpendicularis ad Axem, & propter Triangulorum F P E, F Π H ſimilitudinem erit F P ad F Π ut PE ad ΠH & ut F E ad FH, hoc eſt $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: Sit f alter focus Ellipſeos ex eo ducatur linea fΠ, ex natura Ellipſeos eſt $f\Pi = 2a - x$ ſed $f\Pi^2 = \Pi H^2 + fH^2$ & $\Pi H = \frac{y}{a} x$, & $fH = FH - Ff$ vel $Ff - FH$ vel $Ff + FH$, & eſt $Ff = 2e$ & $FH = \frac{z}{a} x$ hinc $\Pi H^2 + fH^2 = \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = f\Pi^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, eſt autem $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} x^2$ $x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = 4a^2 - 4ax$, & dividendo per 4 & transponendo eſt $ax \mp \frac{ez}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; Unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$. Q. E O.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

122



Cor. Hic valor x in ſeries reſolutus eſt $\frac{b^2}{a} \times 1 \pm \frac{ez}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$ &c. ſumptis ſignis ſuperioribus quando E cadit in eàdem parte ac centrum, & ſumptis ſignis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non eſt centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ ad dignitates ſuperiores evehatur termini in quibus e plurium dimenſionum poterunt omitti, propter ſuppoſitionem excentricitatem exiguam eſſe, & quidem ſi agatur de Solis excentricitate ea non aſſurgit ad duas centeſimas radii, & excentricitas Lunæ non aſſurgit ad ſeptem centeſimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore ſynodico S, $\frac{433.92c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp ez^3}{b^6}$, poſitis a pro ſemi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, & b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum

Ter-

De Mundi Syſtemate. III. Terra deſcribit circa Solem arcum quamminimum datum.

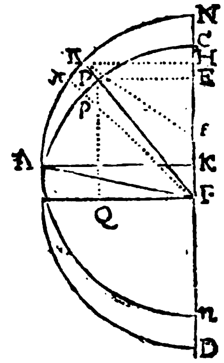
Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n Ellipſis quam terra deſcribit, ſit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π & ei quam proxima F p π quæ ſecet in circulo C A D arcum P p, & quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur è Sole, deſcripſiſſe arcum P p.

Sit ut prius A tempus annuum, a Ellipſeos ſemi-axis major, k circumferentia eo radio deſcripta ex foco F, ſit e excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ ſemi-axis minor, area ſemi-circuli $\frac{ak}{4}$, quæ eſt ad aream ſemi-Ellipſeos ut eſt a ad b, hinc area ſemi-Ellipſeos eſt $\frac{bk}{4}$.

Dicatur arcus A P, u, arcus P p ſit du, radio F Π ſive X deſcribatur arculus ex π in F Π, is erit ad du ut eſt F Π ſive X ad a, ergo is arculus erit $\frac{x\,du}{a}$, ideoque area F Π π eſt $\frac{x^2\,du}{2a} = \frac{b^4\,a\,du}{2 \times \overline{a^2 \mp ez}^2}$ (per Lem. præced.)

Sed tempus quo terra arcum P p deſcripſiſſe videtur eſt ad tempus ſemeſtre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F Π π, ſive $\frac{x^2\,du}{2a}$ ad ſemi-Ellipſim $\frac{bk}{4}$, Eſt itaque illud tempus quo terra arcum P p deſcripſiſſe videtur $\frac{4\,x\,du}{2\,abk} \times \frac{1}{2}\,A = \frac{x^2\,A\,du}{abk}$.

Inventum autem eſt quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2\,A\,du}{abk}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c \times x^2\,A\,du}{438.92 \times S\,abk} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ ſive $\frac{433.92\,c \times du}{438.92 \times S.b.k} \times \frac{M^2 a^2}{A\,x}$, aut ſubſtituendo valorem fractio. $\frac{a}{x}$, ſit $\frac{433.92.cdu}{438.92.Sbk} \times \frac{M^2 a}{A} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ ſive $\frac{433.92\,cdu \times M^2 a}{438.92\,SA\,b^3 k} \times a^2 \mp ez$.



PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante ſemeſtri revolutione terræ circa Solem.

Primo inveniatur Integralis Elementi per Probl. III. inventi quod eſt $\frac{433.92\,c\,du \times M^2 a}{438.92.\,S.\,A.\,b^3 k}\,a^2 \pm az$ cujus Integralis eſt $\frac{433.92\,c \times M^2 a}{438.92.\,S.\,A\,b^3 k} \times a^2 u \mp aey$.

Si ergo ſumatur ſemeſtris revolutio, illic eſt $u = \frac{1}{2}k$, & termini in quibus occurrit y ſeſe deſtruunt, ut quidem liquet ex eo quod y illic evaneſcat, unde ſemeſtris retardatio ſit $\frac{433.92 c \times M^2 a}{438.92 SA b^3 k} \times \frac{1}{2} a^2 k = \frac{433.92 c \times M^2 a^3}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$ ſive ponendo $a = b$ quod proxime verum eſt $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra à ſuo Aphelio ad mediocrem ejus diſtantiam pervenit, obſervandum quod eo in loco arcus u eſt $\frac{1}{4}k - e$, & y eſt b, unde Integralis inventa evadit $\frac{433.92\,c \times M^2 a}{438.92\,S.\,A\,b^3 k} \times \frac{1}{4} a^2 k - a^2 e - abe$, aut ſimplicius ſi quantitates a & b pro æqua-

æqualibus ſumere liceat fiet $\frac{433.92\, c \times M^2}{438.92\, S.A\, k} \times \frac{1}{4}k - 2e$ ſive $\frac{433.92\, ca^3 \times M^2}{438.92 \times SA\, b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$.

PROBL. V.

Invenire Æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione, & quæ eſt adhibenda quando Terra eſt in ſuâ mediocri diſtantiâ à Sole.

Primo obſervandum eſt motum Lunæ qualis ex apparentiis determinatur ex duplici cauſâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ & ex Solis actione quæ motum ex præcedenti cauſâ natum tardat; Prior motus in orbe circulari uniformis foret, ſed tardatio ex alterâ cauſâ procedens inæqualiter priori illi ſeſe immiſcet, Aſtronomi verò cum motum medium Lunæ æſtimant, hanc tardationem ſumunt quaſi uniformiter in omne tempus diſtributam.

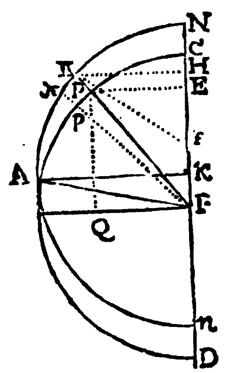
Cum ergo ea tardatio major ſit in aliquibus Terræ poſitionibus, in aliis ſit minor, quæſtio eſt quænam correctio motui medio Lunæ ſit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque inveſtiganda eſt differentia inter tardationem proportionaliter tempori diſtributam, & tardationem veram quæ ſingulo loco competit, quæ differentia loco medio addita aut ex eo detracta reſtituet verum locum Lunæ quatenus hæc ſola irregularitas ſpectatur.

Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra eſt in mediocri diſtantia, fiat ſecundum Regulam Keplerianam, ut area ſemi-Ellipſeos (quæ eſt $\frac{bk}{4}$ & eſt ſemeſtri tempori proportionalis) ad aream FNA (quæ eſt Ellipſeos quarta pars cum Triangulo FAK ideoque eſt $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$ & eſt proportionalis tempori quo Terra ab Aphelio ſuo ad mediocrem à Sole diſtantiam pervenit) hoc eſt ut $\frac{1}{12}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio ſemeſtri tempore factâ quæ (per Probl. IV.) eſt $\frac{433.92\, ca^3 \times M^2}{438.92\, SA\, b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab Aphelio ad mediocrem ſuam à Sole diſtantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\, ca^3 \times M^2}{438.92\, SA\, b^3} \times \frac{1}{4} + \frac{e}{k}$; ſed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\, ca^3 \times M^2}{438.92\, SA\, b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$. Hinc ſubſtractione factâ, tardatio mediocris ſuperat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\, ca^3 \times M^2}{438.92\, S.A\, b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e ſumatur $.016\frac{7}{8}a$, erit $3e = .050\frac{5}{8}a$, & loco k ſcribatur $6.283188\, a$; & loco c, 360 gr. erit $\frac{3ec}{k} = \frac{18^{gr}.225}{6.283188} = 2^{gr}.9005$; Præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur ſi loco M ponatur, 0744252 A; & loco S, .08084896 A, ut in Prob. 2do. repertum eſt, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit. 06773137. cumque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ ſit tantum 1.00045 & ſuperius ſumptum ſit a loco b hæc fractio pro unitate ſumi poteſt, hinc eſt $\frac{a^3 M^2}{b^3\, S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in $2^{gr}.9005$ efficit $0^{o}.19646$ quod ductum per $60'$ efficit $11'.7876$, ſive $11'.47''.256''$, quam Newtonus $11'.49''$ aſſumit; majorem autem Æquationem in Hypotheſi Elliptica inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipſo aſſumptum eſſe videtur. 121.

Cor. 1. Cum hæc æquatio ſit $\frac{433.92 \times ca^3 \times M^2}{438.92 \times S.b^3 A} \times \frac{3e}{k}$ ſive proxime $\frac{433.92\, c \times M^2}{438.92\, S \times A} \times \frac{3e}{k}$, & quantitates c, M, S, A, k, ſint conſtantes, hæc æquatio, ubi Tellus eſt in ſuâ mediocri diſtantiâ, eſt ſicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideoque ſi ea excentricitas major ſit quam $.016\frac{7}{8}$ radii a, creſcet hæc æquatio in hac proportione; ſit v. gr. $e = a \times .016\frac{31}{32}$, &

& fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita 11′. 47″.616 ad quartum, is quartus terminus 11′.49″.42, erit æquatio, ſuppoſitâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in caſu Newtonus Æquationem facit 11′. 50″.

121.



Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur ſi fiat ut ſemi-Ellipſis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita ſemeſtris tardatio $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92 \times S.A} \times \frac{a^3}{2\,b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92\,c \times M^2 \times FN\Pi}{438.92 \times S \times A\,b^3} \times \frac{2a^3}{bk}$ tum vero ſi ſumatur tardatio loco Π conveniens quæ eſt $\frac{433.92 \times c \times M^2 a}{438.92 \times S \times A\,b^3 k} \times a^2 u \mp aey$, (Probl. 4.) erit hæc æqu. $\frac{433.92\,c \times M^2 a^2}{438.92 \times S.A \times b^3 k} \times \frac{2a \times FN\Pi}{b} - au \pm ey$, ideoque erit ut $\frac{2aFN\Pi - abu \pm bey}{b}$; aut ſumendo $a = b$, ut $\frac{2FN\Pi - bu \pm ey}{b}$. Jam vero hæc quantitas eſt ipſa æquatio centri Solis; nam arcus qui deſcriberetur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u reverâ percurritur hac proportione obtinetur, ut ſemi-Ellipſis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita ſemicirculus $\frac{1}{2}k$ ad arcum medio motu deſcriptum qui ergo erit $\frac{4FN\Pi}{bk} \times \frac{1}{2}k = \frac{2FN\Pi}{b}$; ſed arcus tunc temporis reverâ deſcriptus, eſt N Π ſive u, ergo æquatio centri Solis eſt $\frac{2FN\Pi}{b} - u$ ſive $\frac{2FN\Pi - bu}{b}$ cui quantit. $\frac{2FN\Pi - bu \pm ey}{b}$ eſt quam proximè æqualis, nam terminus ey propter exiguitatem e reſpectu b, & y reſpectu u conſiderationem nullam hic meretur, ergo æquatio Lunaris in quovis loco orbitæ Telluris eſt ſicut æquatio centri Solis eo in loco; Ergo ut æquatio centri Solis in mediocri diſtantia Telluris à Sole, eſt ad æquationem motus Lunaris adhibendam cum Tellus eſt in ea mediocri diſtantia à Sole, ita eſt æquatio centri Solis in quâvis diſtantiâ u ab Aphelio, ad æquationem Luni Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

Cor. 3. Æquatio iſta Lunæ, quæ Solaris prima dicitur, eſt maxima in diſtantia mediocri Terræ à Sole; nam cum ſit proportionata æquationi centri Solis, & æquatio centri Solis ſit maxima in mediocri diſtantiâ Telluris à Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonſtrata ſunt, Æquatio Solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in Hypotheſi eum orbem eſſe Ellipticum, Methodo diverſâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibitâ.

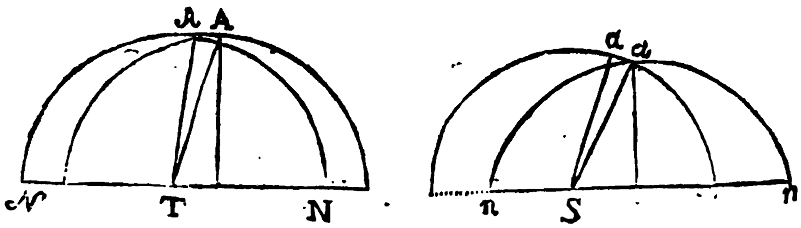
THEOR. I.

Sint duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita, quorum vires abſolutæ diverſæ ſint; Dico, quod ſi Tempora Periodica in utraque Ellipſi ſint ut earum Ellipſium areæ; Ellipſes illæ erunt inter ſe ſimiles.

Deſcribantur duæ Ellipſes NAN, nan, circa corpora S & ſ in focis Ellipſium poſita, & quorum vires ſint diverſæ, ſi totum tempus quo deſcribitur Peripheria Ellipſeos N A N, ſit ad totum tempus quo deſcribitur Peripheria Ellipſeos n A n ut area prioris Ellipſeos ad aream alterius, Ellip-

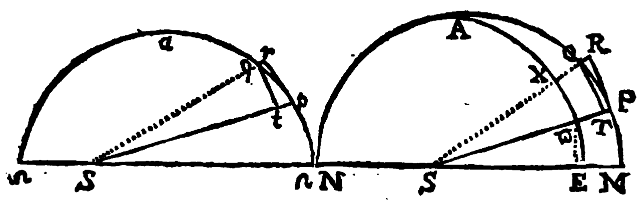
LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.



Ellipſes illæ ſimiles eſſe debebunt, hoc eſt earum Ellipſium axes majores erunt inter ſe ut ſunt inter ſe earum minores axes, v. gr. ſi ſemi-axis major Ellipſeos N A N dicatur r, ejus minor ſemi-axis dicatur q & major ſemi-axis Ellipſeos n a n dicatur ρ, ejus minor ſemi-axis κ, Dico quod erit q ad κ ut eſt r ad ρ.

Ex naturâ Ellipſium area Ellipſeos NAN eſt ad aream Ellipſeos n a n ut eſt rq ad $\rho\kappa$, & ex Hypotheſi tempus Periodicum in Ellipſi N A N eſt ad tempus Periodicum in Ellipſi n a n in eadem ratione rq ad $r\kappa$, ſi ergo ſumantur arcus ſimiles A A, a a in mediocri diſtantiâ in utrâque Ellipſi, tempora quibus deſcribentur illi arcus erunt ut tota tempora Periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri diſtantiâ poſiti deſcribuntur motu medio corporum eas Ellipſes deſcribentium, & erunt etiam ut areæ A S A & a s a ex Hypotheſi, & iſtæ areæ A S A & a s a, ſunt ut quadrata linearum S A & s a ſive ut r^2 ad ρ^2; Ergo eſt r^2 ad ρ^2 ut rq ad $\rho\kappa$, & dividendo terminos homologos per r & ρ eſt r ad ρ ut q ad κ; Ergo Ellipſes ſunt ſimiles. Q. E. D.



THEOR. II.

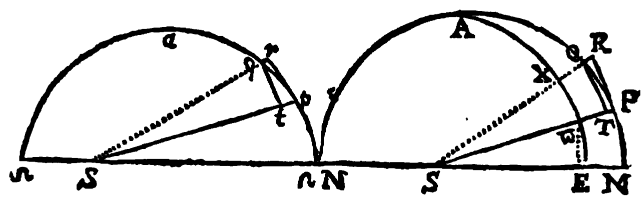
Sint, ut prius, duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita quorum vires abſolutæ diverſæ ſint, & ſint tempora Periodica in utrâque Ellipſi ut earum Ellipſium areæ, Dico quod axes majores earum Ellipſium erunt reciprocè ut vires abſolutæ corporum centralium.

Vis abſoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V—Y, ducantur in utrâque Ellipſi lineæ S P, s p ad lineas apſidum S N, s n ſimiliter inclinatæ, & iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos ſimiles P S Q, p s q conſtituentes, ducantur ex Q & q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, & productis lineis S Q s q donec occurrant Tangentibus in R & r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum deſcribuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex Hypotheſi, Tempora quibus deſcribentur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, & quia, ex conſt. illæ areæ ſunt ſimiles, erunt ut quadrata linearum homologarum ſive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales & ut quadrata temporum, vires verò centrales ſunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



$\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, & quadrata temporum ſunt ut SP^4 ad sp^4, Ergo lineæ QR & qr erunt inter ſe ut $\frac{V}{SP^2} \times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{Sp^2} \times sp^4$, ſive ut $V \times SP^2$ ad $\overline{V-Y} \times sp^2$, aut denique ut $V \times QT^2$ ad $\overline{V-Y} \times qt^2$.

Secundo, In omnibus Ellipſibus per vim centralem ex foco prodeuntem deſcriptis latus rectum eſt æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut conſtat ex Prop. XI. Lib. I. Princ. Si itaque latus rectum Ellipſeos NAN ſit L, Ellipſeos vero nan ſit λ erit $L = \frac{QT^2}{QR}$ & $\lambda = \frac{qt^2}{qr}$, loco QR & qr quantitates ipſis proportionales $V \times QT^2$ & $\overline{V-Y} \times qt^2$ collocentur, & erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V \times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{\overline{V-Y} \times qt^2}$ ſive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; ſed ex naturâ Ellipſium, eſt $L = \frac{q^2}{r}$ & $\lambda = \frac{\kappa^2}{\rho}$, præterea quia Ellipſes ſunt ſimiles ex præcedente Theoremate eſt $q : r = \kappa : \rho$, ideoque $\frac{q}{r} = \frac{\kappa}{\rho}$; Eſt ergo $L : \lambda$ ut q ad κ ſive ut r ad ρ; Itaque eſt r ad ρ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. E. D.

Cor. In his itaque Hypotheſibus Tempora Periodica erunt inverſe ut Quadrata virium abſolutarum corporum S & s; ſunt enim per Theor. I. ut r^2 ad ρ^2, & ex hoc Theoremate eſt r ad ρ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; Ergo Tempora Periodica ſunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$.

THEOR. III.

Sit T terra, P Luna quæ circa terram (ſepoſitâ omni actione Solis) deſcribat orbitam circulo proximam tempore Periodico M, Vis abſoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis abſoluta quantitate exiguâ Y; Dico quod ſi ea vis V—Y maneat conſtans Luna deſcribet circa Terram orbitam ſimilem illi quam prius deſcribebat, ita ut ſi prioris orbitæ ſemi-axis major dicatur r, ſemi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ & tempus Periodicum erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$ ſive $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c.

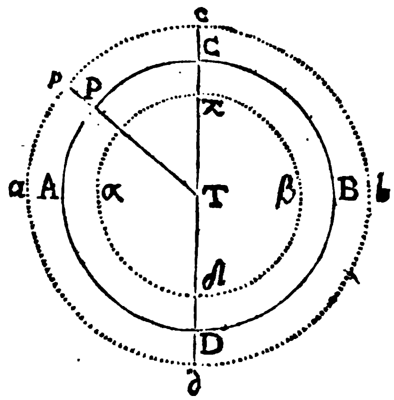
Nam 1°. cum Luna diſcedit à ſuâ orbitâ, retinetur tamen per vim decreſcentem ſecundum quadrata diſtantiarum, deſcribet ergo circa corpus in foco poſitum ſectionem Conicam, quæ erit adhuc Ellipſis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, & per vim priorem orbita circulo finitima deſcribebatur ita ut nec in Hyperbolam nec in Parabolam mutari poſſit hæc orbita.

2°. Cum vis nova Y ad centrum ſit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ ſemper manebunt Temporibus proportionales, ideo ſi tandem in orbitam a d b ç deveniat ex orbita

ta ADBC, tempus quo deſcribetur peripheria adbc erit ad tempus M quo deſcribebatur peripheria ADBC ut tota area ADBC ad aream adbc.

3°. Cum ergo in his orbitis ADBC, adbc (quæ deſcribuntur circa corpus idem quidem, ſed cujus vis abſoluta alia cenſetur cum deſcribitur orbita ADBC quam cum deſcribitur adbc) tempora ſint areis proportionalia, iſtæ areæ ſimiles erunt, per Theor. I., circuliſque ſinitimæ per Hyp., axes majores erunt inversè ut vires V & V−Y, per Theor. II. & tempora Periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$ itaque ſi in orbita ADBC, id tempus dictum fuerit M, in orbita adbc, erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$, ſive hanc quantitatem in ſeriem reſolvendo $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2}$. Q. E. D.

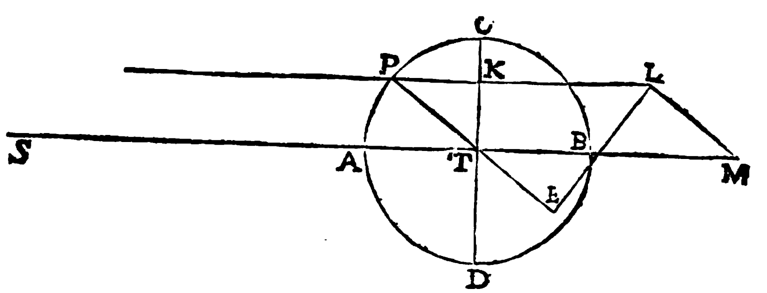
Cor. Iiſdem Principiis oſtendetur, quod ſi vis abſoluta terræ augeretur quantitate exigua Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\delta\beta\varkappa$ ſimilem priori ADBC, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, ſumendo quantitatem Y negativè & quæ deſcriberetur tempore $M \times 1 + \frac{2Y^2}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c.



ſumendo negativè terminos in quibus quantitas Y eſt imparium dimenſionum.

Ut autem ſervetur hæc conditio quantitatem Y eſſe exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$ &c. ſunt delendæ in utroque caſu ut infinitè parvæ.

Schol. In primo calculo, cum ſuppoſuerimus orbitam Lunæ ADBC eſſe circularem, orbitas novas adbc, $\alpha\delta\beta\varkappa$ circulares etiam eſſe, ſupponere neceſſe erat per Theor. I. hujuſce calculi.



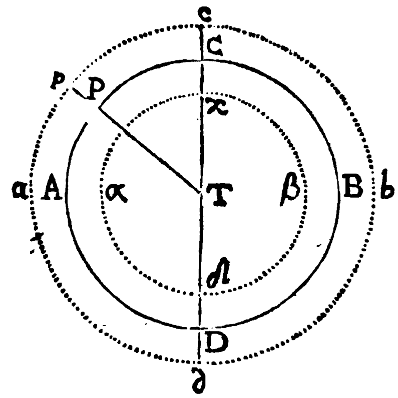
THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, ADBC orbita quam Luna circa terram deſcriberet ſepoſitâ omni Solis actione, ſit ST diſtantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in Terram ipſam in mediocri illâ diſtantia, diſtantiâ Lunæ à Terræ PT dicatur r; Sit CP diſtantia Lunæ à quadraturâ proximâ quæ dicatur u, ſit ejus ſinus y, ſit ejus coſinus z; Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam ſecundum directionem radii PT eſt ubique $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Hoc Theor. idem eſt cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonſtratio adiri poteſt.

121.

De Mundi Syſtemate.

121.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poterit, ſi concipiatur Lunam ex ſuâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus ſingulæ particulæ quamminimæ, forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ deſcriberet, ſi vis Terræ conſtanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos creſcat & decreſcat, ſitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo poſt minima ſit, ſicque gradatim creſcat, ſi cenſeatur eam conſtantem manere per aliquod tempuſculum, Luna breviſſimè tranſibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cum vis Solis creſcat quantitate quam minimâ ea vis cenſeatur iterum conſtans per alterum tempuſculum tranſibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento conſentaneam, ſicque ſemper: ideoque in ſingulis particulis arcus C P, cenſeri poteſt Lunam delatam eſſe in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris diſtantia Lunæ à Terra, r; vis Terræ in eâ diſtantiâ ſit V, vis Solis ſive additicia ſive ſubſtractiva ſit, quæ agit in Lunam ſecundum radii Telluris directionem, ſit Y in eâ mediocri diſtantiâ à Terra, creſcat verò ut diſtantiæ; Dicatur x alia quævis diſtantia Lunæ à Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, & vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; Dico quod vis corporis centralis quæ in diſtantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri diſtantiâ eſſe debuiſſet $V - \frac{x^3}{r^3} Y$.

Nam ſiquidem fingitur vim Corporis ejus centralis fictitii ſequi legem gravitatis & decreſcere ſicut quadrata diſtantiarum fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ eſt vis in diſtantiâ x ad $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ quæ erit vis in diſtantiâ r.

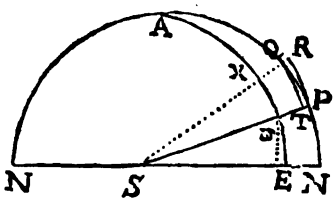
THEOR. VII.

Sit x ut prius diſtantia Lunæ à Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa diſtantia fiet $\frac{r^3 xV}{Vr^3 - Yx^3}$, ſive hoc valore in ſeriem redacto fiet $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V} + \frac{x^7 Y^2}{r^6 V^2}$ &c. aut omiſſis terminis ſuperfluis $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata cenſetur eſt ſimilis priori per Lem. I. & per Lem. II. earum lineæ Homologæ ſunt ut vires abſolutæ corporum centralium inversè, ſeu ut vires quas habent in diſtantiis æqualibus, nempe inversè ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3} Y$ ad V, ita x ad diſtantiam Homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{xV}{V - \frac{x^3}{r^3} Y}$ ſive $\frac{r^3 xV}{Vr^3 - x^3 Y}$.

Q. E. D.

THEO-



THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri diſtantiæ r, deſcribatur circulus, arcus ejus ϖX inter lineas SP, SQ interceptus dicatur du; Dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri poſſet eodem tempore Periodico quo moveretur in propriá orbitâ ſi abeſſet vis Solis, ideoque ſi tempus Periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, & tota Peripheria circuli cujus radius eſt r dicatur c, tempus quo arcus du deſcribetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{Mdu}{c}$; 2°. Cum ſit r ſemi-axis major Orbitæ Lunaris, ſi dicatur q ejus axis minor, Dico quod tempus quo idem ille arcus du deſcribi videbitur urgente Solis actione & ſpectatâ excentricitate orbitæ Lunaris erit $\frac{Mdu}{c} \times \frac{x^2}{qr} + \frac{2x^5 Y}{qr^4 V} + \frac{3x^8 Y^2}{qr^7 V^2}$ &c.

Primo enim liquet quod is circulus deſcribetur eo tempore Periodico quo deſcriberetur orbita Elliptica Lunaris ſi ſola vis Telluris agat; nam ſi corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuſcumque Ellipſibus, Tempora eorum Periodica ſunt in ſeſquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princ. Newt.) ſed hujus circuli & orbitæ Lunaris axes majores ſunt æquales (per conſt.) Ergo eorum tempora Periodica ſunt æqualia.

Secundo dicatur E tota ſuperficies Ellipſeos orbitæ Lunaris, hæc ſuperficies E erit ad aream SQP ut tempus Periodicum M ad tempus quo arcus PQ deſcriberetur, quod erit ergo $\frac{SQP \times M}{E}$ valor autem areæ SPQ eſt $\frac{QT \times SP}{2}$, ſed ut r ad du ita SQ ſive SP (x) ad QT, eſt ergo $QT = \frac{xdu}{r}$ & $\frac{QT \times SP}{2} = \frac{xxdu}{2r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem deſcriberet arcum QP eſt $\frac{Mxxdu}{2r.E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo deſcriberetur ſimilis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur ut quadrata radiorum ſeu, per (Theor. præc.) ut xx ad $xx + \frac{2x^5 Y}{r^3 V}$ ita $\frac{Mxxdu}{2r.E}$ ad $\frac{Mdu}{2r.E} \times xx + \frac{2x^5 Y}{r^3 V}$, ſive cùm ſemi-axis minor orbitæ Lunaris dicatur q & area Ellipſeos E ſit ideo $\frac{1}{2} qc$, Tempus quo arcus du deſcribi videbitur à Lunâ tranſlatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr} + \frac{2x^5 Y}{qr^4 V.} +$ &c.

121.

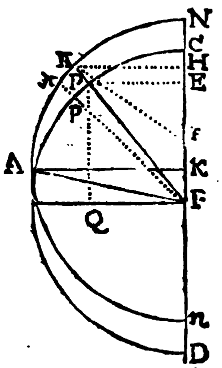
Cor. 1. Ex ipſâ demonſtratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem deſcriberetur area SPQ foret $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr}$, & diſcrepantiæ illius quantitatis à motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur ſoluta, continentur: exceſſus vero (vel defectus ſi vis Y fiat negativa) $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5 Y}{qr^4 V}$ per Solis actionem genitus novam motus medii perturbationem producit de quâ hic agendum; Ergo, ſiquidem per medium motum tempore $\frac{Mdu}{c}$ arcus du deſcriptus fuiſſet, tempore hujus exceſſus $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5 Y}{qr^4 V}$ arcus $\frac{2x^5 Y du}{qr^4 V}$ deſcribi potuiſſet, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam.

Cor. 2. Iiſdem vero ratiociniis quibus uſi ſumus in ſolutione Probl. 1. calculi præcedentis conſtabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris exercitam hæc retardatio $\frac{2x^5 Y du}{qr^4 V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73 r^2}$, ſicque evadit $\frac{2x^5 Y du}{qr^4 V.} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73 qr^6 V}$.

LEM-

De Mundi Syſtemate.

121.



LEMMA I.

Ex præcedentis calculi Lemmate II. conſtat quod ſi ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam Apſidum, & excentricitas dicatur f erit FH ſive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times FE}$.

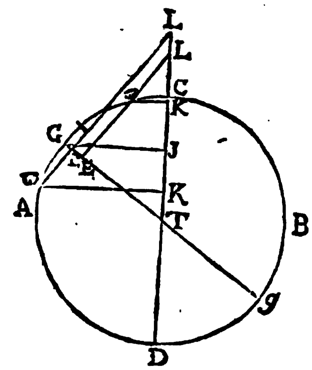
Nulla enim eſt differentia niſi in litteris, quæ diverſæ ſunt quia hic agitur de orbitâ Ellipticâ Lunæ illic de orbitâ Ellipticâ Telluris, cæterum eadem eſt demonſtratio.

Hic autem valor in ſeriem redactus evadet $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$ &c.

Signa ſuperiora adhibenda ſunt cum Luna diſtat ab Apogæo minus quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, cum Luna magis diſtat ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda.

LEMMA II.

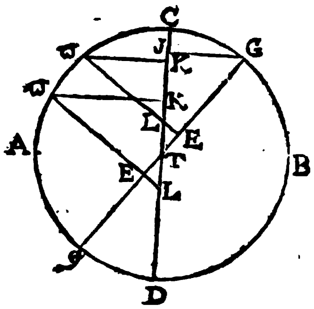
Si linea Apſidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, Dicatur vero m ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ Apſidum, & n ejus anguli coſinus; Sit y ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, z ejus coſinus, Dico quod diſtantia Lunæ à terrâ, quæ dicitur x erit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$ cum Luna eſt in eâdem quadraturâ cum alterutrâ Apſi, eſt verò $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ cum Luna & alterutra Apſis non ſunt in eâdem quadraturâ.



Sit CADB circulus deſcriptus centro T, radio æquali mediocri diſtantiæ Lunæ à terrâ quæ dicitur r. Sit GTg linea Apſidum, CTD linea quadraturarum, GI ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ apſidum qui dicitur m, TI ejus coſinus qui dicitur n, ϖ punctum circuli CADB quod reſpondet vero loco Lunæ in periphería ſuæ orbitæ, quod ſumitur vel ultra vel citra apſidem, ϖ K ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ qui dicitur y, TK ejus coſinus qui dicitur z, Ducatur ex ϖ in lineam apſidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec ſecet lineam quadraturarum in L, Triangulum TIG eſt ſimile Triangulo TEL (ob angulos rectos E & I & angulum communem T); Triangulum TEL eſt ſimile Triangulo ϖ KL (ob angulos rectos E & K & angulum communem L; Hinc eſt TI (n) : IG (m) : : ϖ K (y) : KL $= \frac{my}{n}$; Hinc in iſto caſu TL = TK + KL $= z + \frac{my}{n}$, ſed ex ſimilitudine Triang. TIG & TEL eſt TG (r) : TI (n) : : TL $(z + \frac{my}{n})$: TE $= \frac{nz + my}{r}$, ſubſtituto er-

go

go hoc valore in valore x Lemmate ſuperiori reperto ſit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$. Q. E. 1°. O.



Si ϖ & apſis alterutra non ſint in eadem quadratura, & 1°. ſi tamen ϖ non diſtet 90 gr. à proxima apſide, ſimilia erunt ut prius Triang. TJG, TEL, ϖKL, unde erit $KL = \frac{my}{n}$, ſed erit $TL = TK - KL$ ſive $z - \frac{my}{y}$, unde ſiet $TE = \frac{nz - my}{r}$ ideoque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$; Sed ſi ϖ diſtet à linea apſidum pluſquam 90 gradibus erit $TL = KL - TK$ ſive, $-TK + KL$, ideoque TE ſiet $\frac{-nz + my}{r}$, ſed cum in eo caſu ſignum anceps litteræ f mutari debeat, ſtatuatur non mutari illud ſignum litteræ f dum Luna eſt in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam tranſeat, quamvis magis quam 90 gradibus ab apſide diſcedat, mutari debebit ut ſiat æquipollentia ſignum quantitatis $\frac{-nz + my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$ ideoque ſiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ quotieſcumque ϖ & apſis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando ſignum anceps $\mp f$ ex apſide cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam deſcribere incepit. Q. E. 2°. Oſt.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

Cor. Hic valor x in ſeriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{f \times nz \pm my}{r \quad r^2} + \frac{f^2 \times \overline{nz \pm my}^2}{r^2 \quad r^4} \pm \frac{f^3 \times \overline{nz \pm my}^3}{r^3 \quad r^6}$ ſigna ſuperiora litteræ f ſunt adhibenda cum initium quadraturæ quam deſcribit Luna minus diſtat ab Apogæo quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, ſi vero magis diſtet ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda. 121.

Signa ſuperiora quantitatis my ſunt adhibenda cum & Luna & apſis alterutra ſunt in eâdem quadraturâ, ſigna inferiora cum Luna & apſis ſunt in diverſis quadraturis.

PROBL. I.

Dato Sinu & Coſinu anguli quem faciunt linea Apſidum & linea quadraturarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam ſuam percurrit.

Supponitur lineam Apſidum & Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; Quo poſito cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. 8.) $\frac{2a^5 Y du}{q r^4 V} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2rYdu}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rFdu}{V u q} \times \frac{3y^2}{r} - r$ & loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times 1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$ &c. qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15 f^2 A^2}{r^6} \pm \frac{35 f^3 A^3}{r^8}$; Verum obſervari poteſt, quod ſiquidem totidem ſunt quadrantes in quibus f poſitivum aut negativum ſumi debet, ſi tota revolutio Lunæ ſpectetur, hi termini ancipites omitti poſſunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas ſumi debet quaſi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 + \frac{15 f^2 A^2}{r^2}$

In his pagellis exponentem z loco exponentis 2 exaratum eſſe facilè percipiet eruditus Lector, quod monemus ne illo Typographico mendo turbetur horum intellectio.

De Mundi Systemate.

I,2 I.

ducatur in $1 - \frac{yy}{109.73\, r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73\, r^{12}} \times \overline{109.73 r^2 - y^2 + 15 \times 109.73 \frac{f^2 A^2}{r^4} - \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^6}}$, Denique ducatur in $\frac{2 F du}{V aq} \times \overline{3y^2 - r^2}$ fit $\frac{2 F q^9 du}{109.73\, V a r^{12}} \times \overline{329.19 r^2 y^2 - 3y^4 - 109.73 r^4 + r^2 y^2 + \frac{45 \times 109.73 f^2 y^2 A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6} + \frac{15 f^2 y^2 A^2}{r^4}}$ ſive $\frac{2 F q^9 du}{109.73\, V a r^{12}} \times \overline{330.19 r^2 y^2 - 3y^4 - 109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 y^2 A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73 f^2 r^2 A^2}{r^4} - \frac{45 f^2 y^4 A^2}{r^6}}$. Loco A^2 ſubſtituatur $n^2 z^2 + m^2 y^2$, omiſſo termino $\pm\, 2mnzy$. quia quando tota revolutio Lunæ aſſumitur duo ſunt quadrantes in quibus Luna eſt cum apſide, duo vero in quibus Luna cum neutrâ apſide occurrit, fit tandem totum Elementum $\frac{2 F q^9 du}{109.73\, V a r^{12}} \times \overline{330.19 r^2 y^2 - 3y^4 - 109.73 r^4 + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 z^2 y^2}{r^4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 y^4}{r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 r^2 n^2 z^2}{r^4} - \frac{109.37 \times 15 f^2 r^2 m^2 y^2}{r^4} - \frac{45 f^2 n^2 z^2 y^4}{r^6} - \frac{45 f^2 m^2 y^6}{r^6}}$; Cujus Integralis ſecundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit $\frac{2 F q^9}{109.73\, V a r} \times \overline{\frac{330.19 r^4 c}{8} - \frac{3 \times 3 r^4 c}{4 \times 8} - \frac{109.73 r^4 c}{4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{330.9 \times 15 f^2 n^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{330.19 \times 15 f^2 m^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{4 r^4} + \frac{109.73 \times 15 f^2 n^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2 m^2 r^4 c}{8 r^4} - \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3}{4} r^4 c}{8 r^4} + \frac{45 f^2 n^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4} - \frac{45 f^2 m^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6} r^4 c}{8 r^4}}$; Quod reductum efficit $\frac{2 F q^9 c}{109.73\, V.\, a.\, r} \times \overline{\frac{108.48}{8} + \frac{330.19 \times 15 \times f^2 \times \overline{\frac{1}{4} n^2 + \frac{3}{4} m^2}}{8 r^4} - \frac{109.73 \times 15 f^2\, \overline{n^2 + m^2}}{8 r^4} - \frac{45 f^2 \times \overline{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}}{8 r^4}}$ quod quadruplicatum efficit $\frac{F q^9 c}{109.73\, V a r^8} \times \overline{108.48 + 330.19 \times 15 f^2 \times \frac{\frac{1}{4} n^2 + \frac{3}{4} m^2}{r^4} - 109.73 \times 15 f^2 \times \frac{n^2 + m^2}{r^4} - 45 f^2 \times \frac{\frac{1}{8} n^2 + \frac{5}{8} m^2}{r^4}}$ ſive tandem $\frac{F q^9 c}{109.73\, V a r^8} \times \overline{108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times \frac{15 f^2 n^2}{r^4}}$.

Cor. Si Sol & Apſis immoti non fingantur, ſed ſupponatur eos pari paſſu moveri res eodem redibit, ſi modo hæc revolutio quâ durante naſcitur hæc tardatio cenſeatur æqualis menſi Synodico; Quamvis autem Apſis reverâ non ſequatur motum Solis, ſed longe lentiùs procedat, imo in iſto calculo immota cenſeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter Eccentricitatem Orbitæ Lunaris quæ magna non eſt, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex poſitione Lunæ reſpectu Solis, & minima ſit ea pars hujus tardationis quæ per ſitum Lunæ reſpectu Apſidum determinatur.

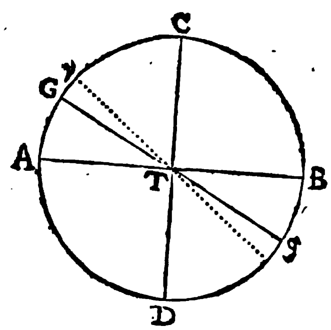
Cor. 2. Ex his terminis $\frac{F q^9 c}{109.73\, V a r^8} \times \overline{108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2 m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2 n^2}{r^4}}$ liquet quod ſi linea Apſidum cum linea quadraturarum conſentiat, quo caſu ſinus m anguli quem facit linea Apſidum cum linea quadraturarum evaneſcit, & ejus Coſinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{F q^9 c}{109.73\, V a r^8} \times \overline{108.48 - 27.5575 \times 15 \frac{f^2}{r^4}}$.

E contra, ſi linea Apſidum ſit in Syzygiis ita ut m fiat r, & n evaneſcat, hæc expreſſio fit omnium maxima nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2}{r^2}$; Ideo menſis Synodicus fit minimus cum Apſides ſunt in Quadraturis, longiſſimus vero cum Apſides ſunt in Syzygiis.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio Solaris Lunæ quæ ſecunda dicitur & pendet ex ſitu Apſidum, ſive Apogæi reſpectu Solis.

III.



PROBL. II.

Poſito Solem in mediocri ſuâ diſtantiâ verſari & lineam Apſidum omnes poſſibiles poſitiones cum lineâ Syzygiarum ſucceſſive obtinere, Invenire tardationem mediocrem Lunæ in ſingulâ ejus revolutione ſynodicâ.

Sit linea Apſidum, in ipſâ directione ſyzygiarum A & B, & dum Sol ab Apogæo Lunæ in conſequentia movetur, & Apogæum revera eſt immotum, fingatur Solem immotum ſtare & ipſum Apogæum à Sole in antecedentia regredi; Moveatur Apogæum ex G in γ per arcum quamminimum Gγ qui dicatur du tardatio Lunæ quæ fiet dum deſcribitur Gγ erit ad totam tardationem quæ fieret ſi apſis foret immota in G & quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo Apſis deſcribit arcum Gγ ad totum menſem ſynodicum: Dicatur ergo A tempus quo Apſidum revolutio Solis reſpectu abſolveretur, quod in hac hypotheſi eſt ipſe annus ſidereus, erit ut tota circumferentia c ad du, ita A ad tempus quo Apſis arcum du deſcribet quod erit $\frac{A\,du}{c}$. Præterea ut menſis ſynodicus S ad hoc tempus $\frac{A\,du}{c}$, Ita tardatio menſe ſynodico facta quæ eſt $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2n^2}{r^4}$; ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A\,du}{c}$ quæ erit itaque $\frac{AFq^9du}{S \times 109.73.V.ar^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15 \frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15 \frac{f^2n^2}{r^4}$ (in quâ expreſſione m reſpondet quantitati y quæ in Lemmate I. præceden-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tis calculi adhibetur, & n reſpondet quantitati z) & integretur pro quadrante juxta Coroll. 4. ejus Lemmatis habebitur

121. $$\frac{A.F.q^9}{S\times 109.73.V.ar^8}\times\frac{108.48c}{4}+\frac{136.0375\times 15f^2r^2c}{4r^4}-\frac{163.595\times 15f^2r^2e}{8r^4};$$

Quadruplicetur vero pro toto circulo fiet $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73.Var^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$; Denique ut totum tempus A ad tempus ſynodicum S ita hæc tardatio ad tardationem menſe ſynodico factam quæ erit ergo $\frac{Fq^9c}{109.73Var^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

PROBL. III.

Poſitâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, & orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ 1°. dum Terra deſcribit arcum quamminimum datum, 2°. Dum deſcribit annuam ſuam orbitam, 3°. durante menſe ſynodico, 4°. dum Luna ab Aphelio ſuo ad mediocrem ſuam à Sole diſtantiam pervenit.

Sit a mediocris diſtantia Telluris à Sole, x alia quævis diſtantia, ſi F ſit vis Solis in diſtantia a erit $\frac{aaF}{xx}$ ejus vis in diſtantia x; Ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem menſe ſynodico factam invenimus, x loco a ponatur & $\frac{aaF}{xx}$ loco F evadet tardatio $\frac{a^2Fq^9c}{109.73Vx^3r^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$, & ſi A ſit annus ſidereus, M menſis Periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, eſt $\frac{F}{V}=\frac{M^2a}{A^2r}$ (per Cor. 2. Prop. I.V. Lib. I.) hinc iſta tardatio evadit $\frac{M^2a^3q^9c}{109.73A^2x^3r^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

Sit b ſemi-axis minor Ellipſeos quam Terra deſcribit circa Solem, e excentricitas, k Peripheria radio a deſcripta, ideoque ſit $\frac{1}{2}bk$ area tota Ellipſeos quam Terra deſcribit circa Solem, ſit du motus angularis terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui reſpondens erit $\frac{xxdu}{2a}$ (ut conſtat ex calculo præcedente) ideoque ut Ellipſis tota $\frac{1}{2}bk$ ad hanc aream $\frac{xxdu}{2a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus du deſcribitur qui erit ergo $\frac{Axxdu}{abk}$, & ut menſis ſynodicus S ad id tempus ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore quæ factam erit $\frac{AM^2a^3x^2q^9cdu}{109.73.S.A^2x^3abkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ ſive $\frac{M^2a^2q^9cdu}{109.73SAx.bkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ ſed $\frac{a}{x}$ eſt $\frac{a^2\mp ez}{b^2}$ per Lem. 2. calculi præcedentis, hinc iſtud elementum evadit $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3k.r^9}\times a^2du\mp ezdu$ cujus Integralis eſt $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3.k.r^9}\times a^2u\mp aey$, quæ ſemi-circulo abſoluto ſit $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73S.A.b^3kr^9}\times\frac{1}{2}k$; cujus duplum eſt retardatio anno durante facta, eſtque $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem menſe ſynodico factam quæ erit ergo $\frac{M^2a^3q^9c}{A^3b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Denique, retardatio quæ convenit mediocri diſtantiæ à Sole, in quâ u eſt $\frac{1}{4}k-e$, & eſt $y=b$, eſt $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73S.A.b^3r^3}\times\frac{1}{4}a^2-\frac{a^2e}{k}-\frac{abe}{k}$.

PROBL. IV.

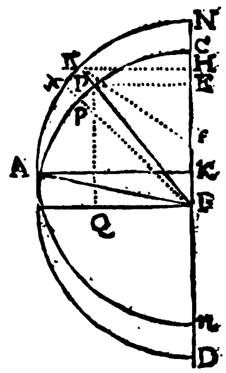
Dato tempore Synodico apparenti Lunæ invenire tempus Periodicum M quod obſervaretur ſi omnino abeſſet vis Solis.

Siquidem tempore M deſcriberetur arcus c, tempore S deſcriberetur $\frac{Sc}{M}$, tempus autem Periodicum quod tempori Synodico S reſpondet eſt $\frac{AS}{A+S}$, ideoque cum illo tempore revera deſcribatur arcus c, tempore Synodico S deſcriberetur $\frac{A+S}{A}c$, hinc retardatio quæ fit menſe Synodico eſt $\frac{Sc}{M} - \frac{Ac+Sc}{A}$ ſive $\frac{ASc-AMc-MSc}{AM}$, quæ inventa fuit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^2 b^2 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo $S = EA$ & $M = XA$, æquatio evadit $E = X + EX + X^3 \times \frac{a^3 q^9}{b^3 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ Lunaris quam $.05505\,r$ facit Newtonus in hoc Scholio, unde is terminus $\frac{108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 eſt $\frac{q^9}{r^9} = 9864$, eſt $\frac{a^3}{b^3} = 1$. proximè, itaque æquatio eſt $E = X \times \overline{1+E} + 9972\,X^3$, loco E ſubſtituatur .0804896, loco X ſubſtituatur $.0744 + R$ & æquatio evadit $.08084896 = .08082583 + 1.09740854\,R$ unde habetur $.00002313 = 1.09740854\,R$ unde obtinetur $R = .0000210$, & $M = .0744210\,A$; fere ut in præcedenti calculo.

PROBLEMA V.

Invenire æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione & quæ adhibenda eſt cum Terra eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à Sole.



Hoc Problema ſolvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota Ellipſis cujus area eſt $\frac{1}{2}bk$ ad aream FNA (ſive $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa eſt $\frac{M^2 a^3 q^9 c \times 108.48 + 813.6 \times \frac{f^2}{r^2}}{S.A.\,b^3 r^9 \times 109.73}$, ad tardationem quæ in motu medio continetur & quæ eſt ideo $\frac{M^2 a q^9 c \times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3 r^9 \times 109.73} \times \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2 e}{k}$, cujus exceſſus ſupra retardationem veram Probl. III. inventam eſt $\frac{M^2 a q^9 c \times 108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3 r^9 \times 109.73} \times \frac{2a^2 e + abe}{k}$ ſive ſumendo ab pro a^2 fit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{S.A.\,b^3 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73} \times \frac{3e}{k} = \frac{.9972\,M^2}{S.A} \times \frac{3ec}{k}$

De Mundi Syſtemate.

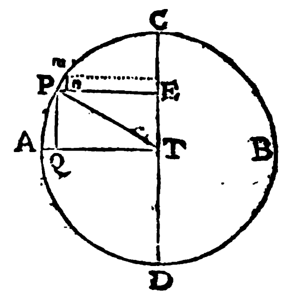
121.

(per Prob. IV.) eſt $\frac{3ec}{k} = 2gr. 9005$, eſt $\frac{M^2}{SA} = .0685042$ quod ductum in .9972 efficit .068312388, quod ductum in 2gr. 9005, efficit 0°.1982 quod ductum per 60′ bis efficit 11″. 52″ &c. ſed in priori calculo erat 11′. 47″, itaque medium inter hos duos valores eſt 11′. 49″, ut invenit Newtonus; cum enim Orbitæ Lunaris figura ſit admodum variabilis, & incerta ſit excentricitas quæ ipſi citra actionem Solis conveniret, non immerito ſumitur medium inter id quod prodit ex Hypotheſi orbem Lunæ eſſe circularem, & in Hypotheſi orbem Lunæ eſſe Ellipſim, cujus excentricitas eſt ea excentricitas mediocris quæ obſervatur.

PROBL. VI.

Poſitâ Excentricitate Orbitæ Lunaris, Poſito vero Solem in mediocri ſuâ diſtantiâ à Terrâ ſemper ſtare, invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario ſitu Apogæi Lunæ reſpectu Solis.

Inventum erat in Problemate 1°. quod tota tardatio Lunæ, durante menſe Periodico, in mediocri diſtantia Terræ à Sole & in data Apſidis ad Quadraturam poſitione erat $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 107.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575.15 f^2 n^2}{r^4}$, Poſito ſinum anguli lineæ Apſidum cum linea quadraturarum eſſe m, Coſinum vero anguli eſſe n, ſive quod eodem redit ſinum diſtantiæ Apſidis à Syzygia eſſe n, ejus Coſinum eſſe m; Præterea inventum erat quod ſi linea Apſidum omnes poſſibiles poſitiones cum linea Syzygiarum aſſumat, tota tardatio quæ eo tempore fit eſt $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$; Hinc ſi linea apſidum diſcedat à Syzygia arcu u, & fingatur retardationem eſſe proportionaliter tempori diſtributam, fiet ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum Peripheria deſcribitur quæ eſt $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.f^2}{r^2}$ ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{AFq^9u}{S\times 109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6f^2}{r^2}$, ſed cum Elementum tardationis (eodem Probl. 2°.) repertum ſit $\frac{AFq^9du}{S.\,109.73\times Var^8} \times 108.48 + \frac{136.0375\times 15 f^2 m^2 - 27.5575\times 15 f^2 n^2}{r^4}$. Integralis ejus ſumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z & loco n ponendo y, & Integralis erit



$$\frac{AFq^9}{S\times 109.73\times Var^8} \times 108.48u + \frac{136.0375\times 15f^2\times APET - 27.5575\times 15f^2 APQ}{r^3}$$

quæ quantitas ſi ſubtrahatur ex præcedenti, æquatio in data diſtantia u Apogæi à Sole in Antecedentia, vel Solis ab Apogæo in conſequentia erit $\frac{AFq^9f^2}{S\times 109.73\,Var^8} \times 813.6ru - 136.0375\times 15\,APET + 27.5575\times 15\,APQ$ eſt autem $APET = APQ + 2PQT$, eſt $ru = 2APT = 2APQ + 2PQT$, quibus valoribus ſubſtitutis, diviſoque primo termino 813.6 per 15 æquatio evadit $\frac{15AFq^9f^2}{109.73\times S.V.ar^8} \times 108.48\,APQ + 108.48\,PQT - 136.0375\,APQ - 272.075\,PQT + 27.5575\,APQ$, & reductione facta fit $\frac{15A\times Fq^9f^2}{109.73\times S.V.ar^8} \times -163.595\,PQT$.

Hæc æquatio negativa eſt cum Apogæum

gæum Lunæ ex A in C à Syzygiâ ad quadraturam procedit, in Quadratura evaneſcit, nam PQT in Quadratura fit zero: Si Apſis ex C in ſyzygiam B pergat, fit APET=APQ−2PQT, eſt $r u$= 2APT= 2AQP−2PQT, quibus valoribus in æquatione ſubſtitutis quantitas − 163.595 PQT ex negativâ poſitiva fit, rurſus fit negativa cum ex ſyzygiâ B ad quadraturam D Apogæum pergit, poſitiva iterum ex D in A; evaneſcit vero in omnibus punctis ſyzygiarum & quadraturarum.

Cor. 1. Ex Trigonometriâ notum eſt quod ſinus arcus dupli alterius arcus eſt duplum facti ſinus arcus ſimpli per ejus Coſinum diviſum per Radium; ideoque conſtat quod ſinus arcus dupli alterius arcus eſt ſemper ut factum arcus ſimpli per ipſius Coſinum; ſed areæ QPT duplum, nempe area TQPE, eſt ipſum factum ſinus QP arcus AP per ejus Coſinum TQ, ergo area QPT eſt ut ſinus arcus dupli arcus AP, Æquatio autem inventa eſt ubique ut area illa PQT ſiquidem conſtat ex facto illius areæ per conſtantes ductæ, Ergo æquatio propoſita eſt ubique ut ſinus arcus dupli Diſtantiæ Apogæi Lunæ à Syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam ſequitur illam æquationem evaneſcere in ſyzygiis & Quadraturis, iis enim in punctis Luna diſtat à ſyzygiâ vel 90gr vel 180gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum eſt 180, 360, 540, 720, quorum arcuum ſinus ſunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam ſequitur hanc æquationem eſſe maximam in Octantibus tunc enim cum Apogæum diſtet à ſyzygia vel 45. gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli ſunt, 90 gr 270, 450, 630 &c. & horum arcuum ſinus fit Radius qui omnium ſinuum maximus eſt ſequitur æquationem iſtis ſinibus proportionatam hic loci eſſe maximam.

Cor. 4. In Octantibus hæc area PQT eſt $\frac{1}{2}r^2$, ut notum eſt, hinc iſta Æquatio evadit $\frac{40.449375 \times 15AF\, q^9 f^2}{109.73\, S.\, V \times a\, r^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ eſt $f^2 = 0030305\, r^2$; eſt $\frac{q^9}{r^9} = .9864$.

tota quantitas fit

$$\frac{40.449375 \times 15 \times .00298928\, r \times A M^2}{109.73.\, S.\, A^2} = r$$

ſed inventum eſt quod eſt $\frac{M^2}{SA} = .0685042$,

& eſt $\frac{40.449375 \times 15}{109.73} = 5.52939$, hinc tota æquatio eſt $.0011297456\, r$, ſed r eſt æqualis arcui 57 gr. 29. &c. hinc æquatio eſt graduum .063723125 &c. quod ductum per 60 efficit 3′.82338, & .82338 ductum per 60, efficit 49″. 4, Ita ut tota æquatio ſit 3′.49″. &c.

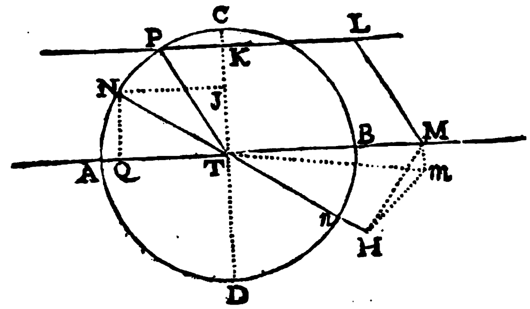
121.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus Æquationis qualem illam ex calculis invenit, ſed ait ille, *Hæc æquatio quam ſemeſtrem vocabo in Octantibus Apogæi quando maxima eſt aſcendit ad 3′ 45″ circiter quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantia à Terra.* Scilicet in Hypotheſibus noſtris Apſidem & terram immotam aſſumpſimus, cum id revera non ſit, ideoque, ſi concedatur nos attigiſſe verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum vera, parum tamen admodum ab illa differet; cæterum omnes æquationis veræ Leges ex iis quæ per iſtum calculum obtinentur merito deducentur, & eæ ipſæ ſunt quæ in præcedentibus Coroll. ſunt conſtitutæ, ſed abſoluta æquationis quantitas ex obſervatione non ex calculo eſt petenda, differunt autem calculus & rei veritas 3″ duntaxat quod Theoriæ præſtantiam ſufficienter probat.

De Æquatione motus Lunaris ſemeſtri ſecunda quæ pendet ex poſitione lineæ Nodorum reſpectu lineæ Syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ fit ut pars actionis Solis conſumatur in ipſo plano orbitæ Lunaris ad Planum Eclipticæ admovendo, ſicque tota non occupetur, ut hactenus ſuppoſitum fuerat in diſtrahendo Lunam à terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus Plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

De Mundi Systemate.
121.



PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam ſecundum radium ejus orbitæ trahit, ſublatâ eâ parte actionis Solis quæ conſumitur in ipſo plano orbitæ Lunaris dimovendo.

Sit ATB linea Syzygiarum in Eclipticæ plano; NTn linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; PL, LM directiones virium in quas reſolvitur vis Solis, quarum PL eſt parallela TM & LM Parallela radio TP.

Ducatur ex M in planum orbitæ Lunaris productum perpendicularis Mm, ducatur in plano orbitæ Lunaris linea Tm, & ex M & m ducantur perpendiculares MH, mH in lineam nodorum Nn productam.

Radius TP dicatur r ut prius, Diſtantiæ Lunæ à Quadratura ſinus PK dicatur y, Coſinus TK dicatur z; Diſtantiæ nodorum à Syzygia ſinus NQ ſit n, Coſinus TQ ſit m; Denique ſinus Inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam dicatur l, exiſtente r radio, & ea inclinatio conſtans ſupponatur, quæ ſecundum Keplerum, De la Hirium &c. eſt ubi maxima, graduum 5. 19. 30.

Ex demonſtratis eſt TM $= 3y$; & propter ſimilitudinem Triangulorum NTQ, MTH, eſt NT (r):MT $(3y)$::NQ (n):MH $\left(\frac{3yn}{r}\right)$, & quia angulus MHm eſt angulus inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam, ut $r:l$::MH $\left(\frac{3yn}{r}\right)$: Mm $= \frac{3ynl}{r^2}$; Denique ut eſt TM $(3y)$ ad Mm $\left(\frac{3ynl}{r^2}\right)$ ſic eſt r ad ſinum anguli MTm qui erit ergo $\frac{nl}{r}$, cujuſque Coſinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2l^2}{r^2}}$ ſive $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$.

Jam autem tota vis TM eſt ad eam ejus partem quæ agit ſecundum planum orbitæ Lunaris ut radius ad Coſinum anguli MTm ſive ut r ad $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$ & in eâdem proportione minuuntur partes in quas reſolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis TM ſecundum directionem radii exercita (ſi Planum orbitæ Lunaris & Eclipticæ idem fuiſſent) ſit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r}$ ex ſuperiùs demonſtratis; Pars reſidua propter inclinationem Plani erit $\frac{F}{a} \times \overline{\frac{3yy}{r} - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}}$; Vis autem LM quæ eſt $\frac{F}{a}\, r$ & negativè ſumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc plani inclinatione, quippe PT eſt in ipſâ orbitâ Lunari, ideoque ejus planum quomodocumque ſitum non dimovet; Hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam ſecundum radium ejus orbitæ trahit, ſubla-

tâ

tâ eâ parte quæ conſumitur in plano orbitæ dimovendo eſt $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$.

PROBL. II.

Dato ſinu anguli quem faciunt lineæ Nodorum & Syzygiarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis ſecundùm directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, ſemotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ Lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. 1. calculi prioris) inventum erat $\frac{2Ydu}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$; ſi, quia jam actum eſt de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ productâ, adhibeatur ſolummodo quantitas $\frac{F}{a} \times - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$ (quæ cum negativa ſit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc cauſâ pendentis Elementum eſt $\frac{2Fdu}{Va} \times \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$, cujus Integralis pro quadrante eſt $\frac{Fn^2l^2}{Var^5} \times \frac{3r^2c}{8}$ & quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3Fn^2l^2c}{2Var^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum eſt in ipſâ lineâ Syzygiarum quo caſu n evaneſcit, tunc motus Lunæ eſt ipſe ille qui præcedentibus Theoriis fuit inventus, quando vero linea nodorum eſt in lineâ ſyzygiarum tunc eſt $n = r$, & eſt acceleratio $\frac{2Fl^2c}{2Var}$ quæ tum maxima eſt.

PROBL. III.

Poſito Solem in mediocri ſuâ diſtantiâ verſari, & lineam Nodorum omnes poſſibiles poſitiones cum lineâ Syzygiarum ſucceſſivè obtinere, Invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario ſitu nodorum Lunæ.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Primò ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani Lunaris oritur, fingatur Solem immotum ſtare & lineam Nodorum ab eo recedere in Antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Probleme præcedente omiſſus ſit, ſic enim utraque omiſſio ſeſe compenſant.)

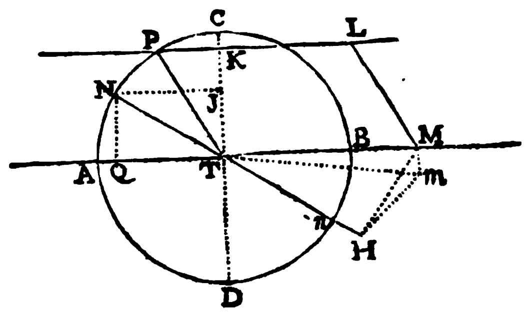
III.

Moveatur Nodus ex N per arcum du, acceleratio Lunæ quæ fiet dum deſcribitur du erit ad accelerationem toto menſe factam, ut tempus quo Nodus deſcribit arcum du ad totum menſem, ſed tempus quo nodus deſcribit arcum du eſt $\frac{Adu}{c}$, nam ut tota Peripheria c ad arcum du ita annus ſidereus A ad tempus quo arcus du deſcribitur, quod erit ergo $\frac{Adu}{c}$, ergo ut menſis ſynodicus S, ad hoc tempus $\frac{Adu}{c}$, ita acceleratio uno menſe factâ quæ inventa eſt $\frac{3Fl^2n^2c}{2Var^3}$ ad $\frac{3AFl^2n^2du}{2S.V.ar^3}$ Integretur pro quadrante & erit $\frac{3AFl^2r^2c}{2\times 8S.Var^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3AFl^2c}{4SVar}$, & hæc erit acceleratio motus medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc ſi linea nodorum diſcedat à lineâ ſyzygiarum arcu u, & fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori diſtribui, fiat ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3AFl^2c}{4S.Var}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3AFl^2u}{4S.V.ar}$ ſive $\frac{3AFl^2}{2S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$. Sed Integralis elementi $\frac{3AFl^2n^2du}{2SVar^3}$ quando arcus NA eſt u, eſt $\frac{3AFl^2 \times ANQ}{2.S.V.ar^2}$ (ex Lem.I.calc.1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti ſubſtracta dat æquationem ſive differentiam accelerationis mediæ & accelerationis

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3AFl^2}{2SVar^2} \times \frac{ra}{2} - ANQ$ ſed $\frac{ru}{2} - ANQ$ eſt Triangulum NQT, & eſt $NQT = \frac{nm}{2} = \frac{2nm}{4}$; Hinc æquatio propoſita ſive Exceſſus accelerationis mediæ ſuper veram eſt $\frac{3AFl^2}{8S.Var} \times \frac{2nm}{r}$, quæ eſt quantitas. quâ minuendus eſt motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3AFl^2}{8S.Var}$ ſint conſtantes & $\frac{2nm}{r}$ ſit ſinus arcus dupli diſtantiæ nodi à ſyzygiâ, æquatio eſt ubique ut ſinus arcus dupli diſtantiæ nodi à ſyzygiâ, ergo evaneſcit in ſyzygiis & Quadraturis; Maxima eſt in Octantibus, cumque ſit illic $m = n = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{2nm}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2a}{A^2r}$, æquatio in Octantibus ſit $\frac{3M^2l^2}{8S.A.r}$, ſed cum Inclinatio ſit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$ cujus ſinus l eſt $.0928r$, ideoque $\frac{l^2}{r}$ eſt $.00863r$, & $\frac{3l^2}{8r} = .00325$, cum vero $\frac{M^2}{S.A}$ (per Prob. V. calc. præc.) ſit. 0685, hinc æquatio evadit in Octantibus $.000221r$, Denique eſt $r = 57^{1}.29$, quod ad ſecundas reductum efficit 206264″, & ductum per .000223 efficit 45″.6, quam Newtonus 47″ per Theoriam gravitatis ſe inveniſſe profitetur.

DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princ. ingenioſiſſimam excogitavit rationem motum Apſidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis poſſe conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipſius orbitæ Lunaris orietur, ſicque inveniri curvam per motum corporis in Ellipſi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem naſceretur; Eidem Methodo mox inſiſtemus & ex eâ Leges motûs Apſidum derivantur accuratiſſimè quales illas Newtonus ſtatuit; ſed fatendum ipſam abſolutam ejus motus quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per obſervationes innoteſcit; Itaque aliam indicare Methodum rem eamdem æſtimandi priori illâ non omiſſâ, inopportunum viſum non eſt.

PROBL. I.

Sol ſupponatur immotus; Linea Apſidum qualemcumque Angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejuſque anguli ſinus ſit y;

In-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

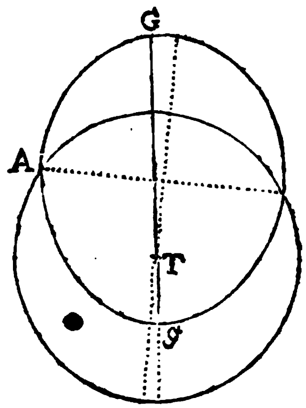
Invenire motum Apogæi dum Luna ab Apogæo ad Apogæum redit.

Sit G A g Ellipſis quam Luna circa Terram T deſcribit; ſit G Apogæum, g Perigæum; dicatur r ſemi-axis major; T diſtantia Apogæa; $T-2f$ diſtantia Perigæa. Centro T deſcribatur circulus radio r, eum circulum Luna deſcriberet eodem tempore quo Ellipſim ſuam deſcribit, & Vis Centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{du^2}{2r}$ ex notâ circuli proprietate.

Portiones du ejus circuli ubique æquales intelligantur, & ſumantur in Ellipſi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius du ductas; liquet, quod dum arcus illi Elliptici deſcribentur, lineolæ per quas Luna ex Tangente ad Ellipſin reducetur erunt effectus vis centralis Terræ & vis Solis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris conjunctis vel oppoſitis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem terræ deſcriptæ erunt ubique, primò in ratione ipſius vis centralis, ſive inversè ut quadrata diſtantiarum à centro, ideoque in diſtantia X erunt $\frac{r^2du^2}{2rX^2}$; & ſecundò ut quadrata temporum ſive ut quadrata arearum Ellipſeos quæ reſpondent arcubus æqualibus du; illæ vero areæ cum ſint inter ſe ſimiles (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus du menſuratos) erunt ut X^2, ideoque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; Ideoque vis centralis Terræ effectus dum deſcribitur area quæ reſpondet arcui du erit ubique $\frac{r^2du^2}{2rX^2}\times\frac{X^4}{r^4}$ ſive $\frac{X^2du^2}{2r^3}$. In Apogæo erit $\frac{T^2du^2}{2r^3}$ in Perigæo $\frac{T^2du^2}{2r^3}-\frac{4Tfdu^2}{2r^3}$ &c.

Vis Solis in Lunam agens ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris dicatur Y in mediocri diſtantiâ, & quia creſcit ut diſtantiæ, in diſtantiâ X ſit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus creſcit ut quadrata temporum, ideoque per ea quæ dicta ſunt, effectus ejus vis dum deſcribitur area quæ reſpondet arcui du eſt $\frac{X}{r}\times Y\times\frac{X^4}{r^4}$ ſive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in Apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in Perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $-\frac{10T^4f}{r^5}$ Y &c.



Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri diſtantiâ à Terra a, inventum eſt vim Y eſſe $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$, & vim Lunæ in mediocri diſtantia eſſe ad vim Solis F ut A^2r ad M^2a (A ut prius eſt annus ſidereus, M menſis Periodicus, ſed ſepoſitâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri diſtantiâ dum deſcribitur area $\frac{rdu}{2}$ ſit $\frac{du^2}{2r}$, ſi fiat ut A^2r ad M^2a ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2a}{A^2r}\times\frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, ſicque effectus vis Y in mediocri diſtantiâ dum deſcribitur area $\frac{rdu}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2r}\times\frac{du^2}{2r}\times\frac{3yy}{r}-r$, & in qualicumque diſtantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5}\times\frac{M^2}{A^2r}\times\frac{du^2}{2r}\times\frac{3yy}{r}-r$.

Hinc fluxio ſecunda orbitæ Lunaris, hoc eſt, lineola ad Terram directa, intercepta inter Tangentem & curvam Lu-

narem quæ eſt differentia (vel ſumma) effectuum vis Centralis Terræ & vis Solis in Lunam dum arcus reſpondens arcui du
121. percurritur erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$.

Hæc fluxio in Apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$; In Perigæo vero erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$; Ubi notandum quod ſi Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. aſſumitur) & ſi Perigæum eſſet è Diametro oppoſitum Apogæo tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem abſolutè foret tam in Apogæo quam in Perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium exiſtente in Apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$ vera Ellipſis deſcriberetur, hic effectus virium in Apogæo deberet eſſe ad earum effectum in Perigæo, primo inverſè ut quadrata diſtantiarum, ſecundo directè ut quadrata temporum ſive ut quartæ dignitates diſtantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata diſtantiarum directè hoc eſt ut T^2 ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in Apogæo per T^2 & ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in Perigæo eſſe deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$: Sed in Perigæo ut & in Apogæo ex naturâ Apſidum evaneſcit fluxio diſtantiæ X utpote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio eſt is ipſe effectus Virium Terræ & Solis, ideo fluens hujus effectus virium reverâ evaneſceret, itaque ex ipſis hypotheſibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}} = 0$; Sed in Perigæo, ſpectatâ actione Terræ & Solis, fluxio ſecunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$.

Punctum itaque Perigæi non erit in puncto è Diametro oppoſito Apogæo, ſed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ Lunaris fluens fluxionis ſecundæ ejus curvæ evaneſcat. Obſervandum autem, quod diſtantiæ Lunæ à Terrâ, circa puncta Apogæi vel Perigæi non multum mutantur, ideoque ſi Perigæum arcu p transferatur non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis terræ, ſed ſinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (ſumpto z pro coſinu arcus cujus ſinus eſt y, eſt enim $dy = \frac{z\,du}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, poteſt poni p loco du, & differentia ſinuum pro dy) fiet itaque fluxio ſecunda orbitæ Lunaris in loco in quo Perigæum eſſe debebit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{10T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}}{r} - r}}$; cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{T^5}{r^5} - \frac{4T^4 f}{r^5}} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}}$, Fluentem habet æqualem zero; Fluens autem exceſſus $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T^4 f}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ fiat æqualis zero (omiſſis terminis in quibus f aut p ad duas dimenſiones aſſurgunt) & habebitur valor p, quâtenus deſignat arcum quo proceſſit Perigæum, ſiquidem tota fluens fluxionis ſecundæ orbitæ Lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque diviſis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4 du}{2Ar^8}$ habetur

hæc

hæc Æquatio $Tp \times \int \frac{yzdu}{r} = f \times \int \overline{3yydu - rrdu}$, ſive quia $ydu = -rdz$ fit $Tp \times \int -zdz = f \times \int \overline{-3rydz - r^2 du}$. Eſt autem $\int -zdz = \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}zz$ & $\int -ydz$ ſegmentum circulare cujus ordinata eſt y, ſive ſector circularis $\frac{1}{2}ru$, dempto vel aſſumpto Triangulo cujus area eſt $\frac{1}{2}yz$; Hinc æquatio evadit $\frac{1}{2}Tp \times \overline{rr - zz} = f \times \frac{3}{2}r^2u - \frac{3}{2}ryz - r^2u$, ſive $Tp \times yy = f \times \overline{r^2u - 3ryz}$, unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cum hic ſit motus Perigæi quo tempore Luna fertur ab Apogæo ad Perigæum erit motus Apſidis durante unâ revolutione Lunæ ab Apogæo ad Apogæum $\frac{2fr}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus Apſidum nullus eſt cum $ru - 3yz = 0$; in Quadraturis verò fit negativus regrediuntur itaque Apſides; maximus autem eſt in ſyzygiis & poſitivus, tunc enim evaneſcit quantitas negativa $3yz$, fit $u = \frac{1}{4}c$, & $y = r$, unde ille motus fit $\frac{fc}{2T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius inſtituere liceret, attendi poſſet ad motum Solis dum Luna ab Apogæo ad Perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etſi Luna veram deſcriberet Ellipſim, Perigæum non faceret cum quadratura eumdem angulum quem faciebat Apogæum, ſed 13 gradibus minus diſtaret in conſequentia. Sed inſtituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum Perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad inſtitutum noſtrum ſufficiat illum aſſumere qualis per Problema repertus eſt.

PROBL. II.

Invenire quantitatem motus Apſidum ſingulo anno.

Sit Apogæum in quadraturâ, & Sole procedente Apogæum inde verſus Syzygiam recedat.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem reſpectu Apogæi Lunæ abſolvit, dicatur π tempus quo Luna ab Apogæo ad Apogæum redit, ſit c tota Peripheria quam Sol Apogæi reſpectu deſcribit, & du arcus ejus exiguus quo Apogæum à quadraturâ receſſiſſe cenſebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum deſcripſerit erit $\frac{\alpha du}{c}$, & cum tempore π, Apogæum moveatur quantitate $\frac{2fr}{T.yy} \times \overline{ru - 3yz}$ tempore $\frac{\alpha du}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\alpha fr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3yzdu}{y^2}$, erit autem u arcus qui metitur diſtantiam Apogæi à quadraturâ, y ejus ſinus, & z ejus Coſinus, & $du = \frac{rdy}{z}$ hinc quantitas $\frac{2afr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3zydu}{y^2}$, fit $\frac{2\alpha fr}{\pi.T.c} \times \frac{rudu}{y^2} - \frac{3rdy}{y}$. Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{rudu}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}}$ &c. fiet $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{y} + \frac{ydu}{6r} + \frac{3y^3du}{40r^3} + \frac{5y^5du}{112r^6} +$ &c. & dividendo rdu per valorem y, qui eſt $u - \frac{u^3}{6rr} + \frac{u^5}{120r^4} - \frac{u^7}{5040r^6}$ eſt $\frac{rdu}{y} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3} + \frac{31u^5du}{15120r^5}$; & loco ydu in ſequentibus terminis ponendo $-rdz$ & loco y^2 ejuſque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejuſque dignitates, fit $\frac{rudu}{yy} = \frac{rdu}{u} + \frac{udu}{6r} + \frac{7u^3du}{360r^3}$ &c. $- \frac{rdz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\overline{rr - zz} \times -rdz}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{rr - zz}^2 \times -rdz}{r^6} + \frac{35}{1152}, \frac{\overline{rr - zz}^3 \times -rdz}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{rr - zz}^4 \times -rdz}{r^{10}}$ &c. Cujus quantitatis

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

121. fluens eſt $r\,\mathrm{L}.\,u + \frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}$ &c. $+$ $\frac{rr-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{3}r^4 - r^3z + \frac{1}{3}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\frac{8}{15}r^6 - r^5z + \frac{2}{3}r^3z^3 - \frac{1}{5}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times \frac{\frac{16}{35}r^8 - r^7z + r^5z^3 - \frac{3}{5}r^3z^5 + \frac{1}{7}rz^7}{r^7} + \frac{63}{1816} \times \frac{\frac{128}{315}r^{10} - r^9z + \frac{4}{3}r^7z^3 - \frac{6}{5}r^5z^5 + \frac{4}{7}r^3z^7 - \frac{1}{9}rz^9}{r^9}$ cui fluenti ſi adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3rdy}{y}$ quæ eſt $-3r\,\mathrm{L}.\,y$ & omne ducatur per $\frac{2\alpha fr}{\pi Tc}$ habetur motus Apogæi dum propter Solis motum Apſis receſſit à quadraturâ arcu u.

Si ergo u ſit quadrans, y erit r, & z fiet zero unde hæc expreſſio evadet $\frac{2\alpha fr}{\pi Tc} \times r\,\mathrm{L}.\,\frac{1}{4}c + \frac{\frac{1}{16}c^2}{12r} + \frac{\frac{7}{256}c^4}{1440r^3}$ &c. $+ \frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3}r + \frac{5}{112} \times \frac{8}{15}r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35}r$ $+$ &c. $- 3r\,\mathrm{L}.\,r = \frac{2\alpha fr^2}{\pi.Tc} \times \mathrm{L}.\,\frac{\frac{1}{4}c}{r^4} + \frac{c^2}{192r^2} + \frac{7c^4}{368640r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10 \times 11}$ &c. harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$ &c. ſumma variis modis haberi poteſt, & quidem liquet oriri iſtos terminos ex terminis ſeriei quæ exceſſum quadrantis ſupra radium exprimit cum radius eſt Unitas, cujus ſeriei quinque priores termini efficiunt .33905, reſidui .23174; hinc cum quinque primi termini hic aſſumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, & ſequentes per fractiones minores quam $\frac{1}{3}$ ducantur, ii omnes ſequentes ſimul ſumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ ſive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæſito, & .26343 numerus quæſito minor, aſſumatur medium .30205 quantitas propoſita evadit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times \mathrm{L}\,\frac{1}{4}c + \frac{c^2}{192} + .30205$.

Si verò dicatur g exceſſus quadrantis ſuper Radium, per naturam Logarithmorum fiet $\mathrm{L}.\,\frac{1}{4}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4$ $+$ &c. $= .57079 - .16290 + .06196 - 02652 + .01211 - .00576 = .4496$, unde expreſſio inventa fit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times .4496r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205r^2 = \frac{2.\,\alpha f}{\varpi T} \times .75165r^2 + \frac{c}{192} = \frac{\alpha f}{\varpi T} \times \frac{1.5033r^2}{c} + \frac{c}{96}$, ſive quia eſt $\frac{c}{96} = 3^{gr}.75$, & $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.283188} = 9^{gr}.1189$ & $\frac{1.5r^2}{c} = 13^{gr}.6783$, habetur motus Apogæi durante quadrante $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 17^{gr}.4283$ & durante totâ revo- $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$, ſed ut totum tempus α qualecumque ſit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$; Præterea ſit P menſis Periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum Apſidum tempore Periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, & ut P ad ϖ ita $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, ad motum Apſidum menſe Anomaliſtico ϖ qui erit $\frac{f}{T} 69^{gr}.7132$, & ut 360 ad $360 + \frac{f}{T} \times 69^{gr}.7132$ ita P ad menſem Anomaliſticum ϖ qui ergo erit $P \times \overline{1 + \frac{f}{T} \times \frac{69^{gr}.7132}{360}}$; Ideoque motus annuus Apogæi erit $\frac{f}{T} \times \frac{A \times 69.7132}{P \times \overline{1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}}$, ſed annus Tro-

picus

picus eſt $13\frac{1}{3}$ P proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1+\frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ Lunaris eſt quidem variabilis, de ejus legibus poſthac; Excentricitatis valorem mediocrem aſſumit Newtonus .05505 ſi Radius ſit 1, Ill. Caſſinus eam paulo minorem facit nempe .05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f ſcribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apſidum fiet

$$\frac{.04895 \times 13\frac{1}{3} \times 69^{gr}.7132}{1+\frac{.04895 \times 69.7132}{360}} = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$$

circiter; qui quidem motus invenitur per obſervationes 40^{gr}.

DE MOTU APSIDUM

Secundum Newtoni methodum.

Hic revocanda ſunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta ſunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

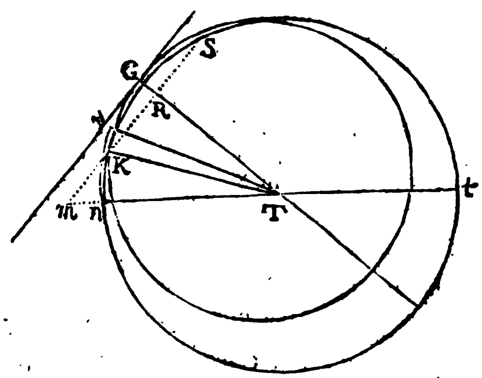
Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipſam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in ſingulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet. Hæc ubique erit inverſè in triplicatâ ratione diſtantiæ à Centro.

Demonſtrationem vide Propoſitione ſuprà indicatâ.

LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, ſit quantitas quæ in mediocri diſtantiâ ſit conſtans, dicaturque Y, creſcat vero ut diſtantia à Terrâ, vis Terræ in diſtantiâ mediocri ſit V, Dico quod (ponendo orbitam Lunarem circulo ſatis finitimam eſſe) motus Lunæ concipi poteſt quaſi fieret in Ellipſi ſimili illi quam reverâ deſcribit, ſed cujus Planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione Apſis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4T^3 Y}}$.

Demonſtratio eſt in exemplis tertiis ad Propoſitionem XLV, ſed eam demonſtrationem hic breviter trademus. 121.

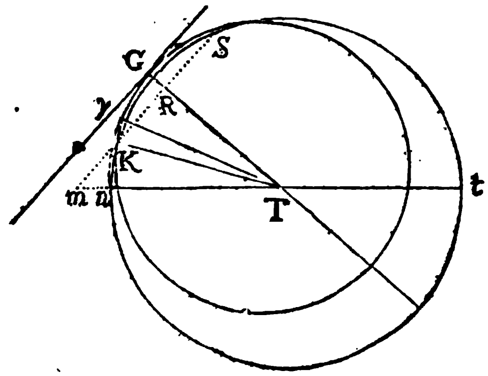


Sit G Lunæ Apogæum, GK arcus quam minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore deſcriberet, transferatur vero Luna cum ſuo Plano ita ut ejus Apſis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuiſſet; motus Lunæ in G ex duobus compoſitus cenſeatur, nempe ex motu ſecundum Tangentem per velocitatem acquiſitam, & ex motu per vim centralem genito quævis ſimul ac ſemel in puncto G agere cenſeatur, hic motus per GR repræſentetur, motus ſecundum Tangentem per RK, fiat vero RK ad Rm, ut angulus GTK ad GTK + GTγ, & ſi nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuiſſet eſſe in K, ſed quia Tm eſt longior quam TK ſumatur Tn = TK & reverâ Luna erit in n, & erit mn effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ dum Luna deſcripſiſſet arcum GK.

Ra-

De Mundi Syſtemate.

124



Radio TK centro T deſcribatur circulus quem mT producta ſecet in t & mK producta ſecet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & ſi fingatur hunc circulum quam proxime coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore deſcribi quo arcus deſcriberetur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna deſcripſiſſet arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{\overline{RK}^2}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore producti ſint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, ſive ut quantitates ipſis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ ſed cum mt ſit quamproxime 2GT, ſitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, iſtæ vires ſunt ut $mR^2 - RK^2$ ad RK^2, ſi itaque dicatur T diſtantia maxima Lunæ, $T - X$ alia diſtantia quævis, r mediocris diſtantia, V vis terræ in eâ mediocri diſtantiâ, erit $\frac{r^2}{T^2}V$ vis centralis terræ in diſtantia T, ideoque, cum ſit RK^2 ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2 V \times mR^2 - r^2 V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi TK eſt $T - X$, vis gravitatis eſt $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ ſunt inverſè in triplicatâ ratione diſtantiarum, vis plani eſt

$$\frac{Tr^2 V \times mR^2 - Tr^2 V \times RK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$$

quæ ſi addatur vi gravitatis fit

$$\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis ſit $\frac{r^2}{\overline{T-X}^2}V$, & vis ſubſtractitia Solis ſit ut diſtantiæ, ideoque ſit $\frac{T-X}{r}Y$, ſi reducantur ad communem denominatorem $\overline{T-X}^3$ fient

$$\frac{Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r}}{\overline{T-X}^3}.$$

Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum ſubſtractione vis Solis, ita determinandæ ſunt quantitates RK^2 & mR^2, ut expreſſiones harum virium ſint ubique æquales, & 1°. quidem cum X ſit zero, vis gravitatis cum vi Plani eſt $\frac{Tr^2V \times mR^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis ſubſtractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Oportet ergo ut ſit

$mR^2 =$

$mR^2 = \frac{\overline{RK^2}}{r^2 V} \times r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}$. Termini vero reliqui in quibus eſt X ſunt $- \frac{X r^2 V RK^2}{\overline{T.X^3} \times RK^2}$ & $- \frac{X r^2 V + 4 T^3 X \frac{Y}{r}}{T - Y^3}$. Oportet ergo ut ſit $RK^2 = \frac{\overline{RK}^2}{r^2 V} \times r^2 V - 4 T^3 \frac{Y}{r}$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis ſubſtractitia Solis, oportet ut ſit mR^2 ad RK^2 ut $r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}$ ad $r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}$, ſive ut ſit mR ad RK ut $\sqrt{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}$ unde cùm ſit mR ut motus Lunæ & Apogæi conjunctim & RK ut motus Lunæ, ſi Luna deſcripſerit 360gr. fiet ut $\sqrt{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}$ ita 360gr. ad Lunæ & Apogæi motum conjunctim, qui erit ergo

$$360 \times \sqrt{\frac{r^2 V - \frac{T^3 Y}{r}}{r^2 V - \frac{4 T^3 Y}{r}}} = 360 \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 Y}},$$

itaque ſi ex hoc valore tollantur 360gr. Reſiduum erit motus Apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. E. O.

THEOR. I.

Invenire motum Apogæi Lunaris, ſupponendo orbitam Lunarem eſſe circulo finitimam.

Deſcribat Luna arcum du, & eo durante vis Y conſtans maneat, & ſpectatur du quaſi portio Ellipſeos deſcriptæ, ſi vis Y durante totâ revolutione creviſſet ſicut diſtantiæ; Motus Apſidis durante totâ revolutione C, foret (per Lemma 2.) $c \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 r}} - c$, ideoque durante tempore quo arcus du percurritur foret $du \sqrt{\frac{r^3 V - T^3 Y}{r^3 V - 4 T^3 Y}} - du$, ſit $r = T$, & ſumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V - Y}{V - 4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motus Apſidum eſt $\frac{3r}{2V} du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. ſit $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3yy\,du}{r} - r\,du$, cujus Integralis pro quadrante eſt $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3r^2 c}{8r} - \frac{rc}{4}$ & pro circulo $\frac{3F}{2Va} \times \frac{rc}{2}$ & cum $\frac{F}{V}$ ſit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA} c$ ſive cum $\frac{MM}{AA}$ ſit fere .0055 eſt motus Apſidum $.0041c = 1^d.476$ ſive $1^d 28' .33''$, & quia is abſolvitur menſe Synodico, ut habeatur motus Apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{gr}.267$. ſive $18^{gr}.16'$. quod eſt circiter dimidium veri motus Apſidisut obſervat Newtonus.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

THEOR. II.

Invenire Leges motus Apogæi Lunæ ſupponendo Orbitam Lunarem eſſe Ellipticam.

Diſtantia Lunæ Apogæa dicatur A, Perigæa dicatur P, ſinus anguli Apogæi & lineæ quadraturarum ſit y, vis Solis in Apogæo agens erit per demonſtrata $A \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vis Solis agens in Perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & y in utroque caſu eſt eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$; ſiquidem eſt conſtans; Vis Solis ſubſtractitia aut addititia in Apogæo ac Perigæo erit AC vel PC; hoc eſt, erit ut quantitas conſtans C, ducta in diſtantiam A vel P; ſi itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim eſſe etiam eandem conſtantem C, per diſtantiam ductam, aut ſaltem variationem quantitatis C compenſari tunc per Cor 2. Prop. XLV., & Exempla tertia ejuſdem, erit motus Lunæ ab Apſide ad Apſidem $360 \times \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}}$, ſi V, ſit

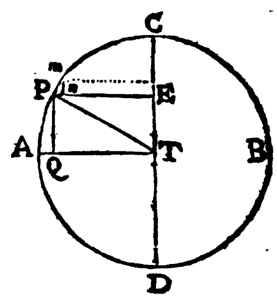
De Mundi Systemate.

ſit ut vis gravitatis terræ in data diſtantia, eſt vero $360 \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times 1 + \frac{3C}{2V}$,

121. ideoque motus Apſidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione Synodico-Anomaliſticâ quam pro ſynodicâ ſumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo deſignabat quantitatem $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ reſumamus, & fingatur talem eſſe Apogæi motum ut ubique ſit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante menſe Synodico quod quidem ex prædictis conſequitur, fingaturque Solem immotum ſtare & Apogæum ejus reſpectu in Antecedentia regredi, totamque revolutionem reſpectu Solis tempore α abſolvere, ſit ergo c tota peripheria, Apſis percurret reſpectu Solis arcum du tempore $\frac{\alpha du}{c}$; Ideo tempore ſynodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motuo ſuo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Y du}{2V}$, ſed quia eſt $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$ & $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motus Apogæi eſt $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3yydu - r^2du$, cujus integralis eſt (ſi fingatur Apogæum à quadraturâ ad ſyzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3.\, r \int.\, ydz - r^2u$ eſt autem autem $\int.\, ydz = CPE$, hinc ſumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, eſt $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$ & pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ & pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc ſi ſumatur motus Apogæi proportionalis tempori, dum Apogæum diſcedet à Sole arcu u, ejus motus eſſe debuiſſet $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cum revera inventus ſit $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$, hinc æquatio eſt $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{3ru}{2} - 3CPE$, ſed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per



conſtr. hinc Æquatio ſit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, ſed $\frac{2yz}{r}$ eſt ſinus arcus dupli diſtantiæ à Sole, hinc itaque hæc æquatio eſt ut ſinus arcus dupli diſtantiæ Apogæi à Sole, unde Lex æquationis habetur, quod ſit maxima in Octantibus, nulla in Syzygiis & quadraturis, poſitiva à quadraturis ad Syzygias negativa inde, ſed ejus quantitas, non per hunc calculum, ſed per obſervationes eſt determinanda; Siquidem, ut obſervatum eſt, Hypotheſes adhibitæ ut ut à motu Apſidum non diſſimiles, attamen ipſius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in Notis ſubſequentibus plura.

DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

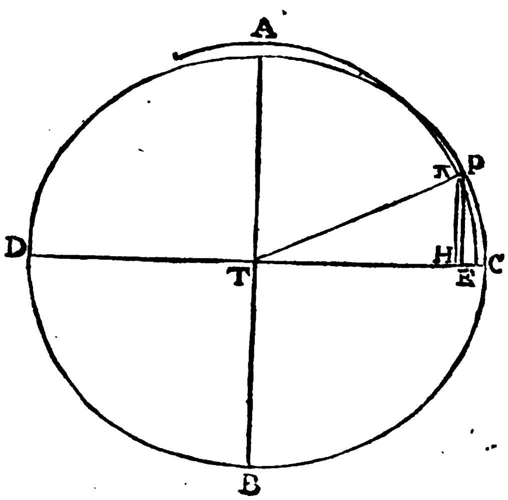
Ipſa Curva quam Luna deſcribit poſſet determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione ſecunda, quæ obtinetur ſubtrahendo vim Solarem à vi terræ; Audivimus autem Viros in Matheſi Primarios hoc Problema, quod certè non eſt exiguæ difficultatis, ſuum feciſſe; Cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam inveſtigaſſe quam per approximationes quaſdam, eadem Methodo, tenui noſtro modulo magis accommodata, idem perſequi conabimur.

I. Propoſitione XXVIII. hujus Libri quæ-

quæſivit Newtonus qualis foret orbita Lunaris ex ſuppoſitione illam citra actionem Solis circularem eſſe, & invenit quod ſi aſſumatur eam orbitam fieri Ellipſim per Solis actionem ea Ellipſis terram in centro haberet & ejus axis minor foret ad majorem qui ſecundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod ſi ſemi-axis major 70 dicatur $r+p$, ſemi-axis minor 69 ſit $r-p$, diſtantia Lunæ à terra in loco quovis dicatur $r+x$, ſit y ſinus diſtantiæ Lunæ à quadratura proxima, z ejus diſtantiæ Coſinus erit ubivis $x = p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

121.



Nam ſit $T\Pi = r$, $TP = r+x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter Triangula ſimilia TPE, $T\Pi H$ eſt $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ & $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam Ellipſeos eſt $\frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \overline{r+p}^2 - \frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2$; Unde eſt $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2$, ſed diviſione factâ, omiſſiſque terminis ſuperfluis, eſt $\frac{\overline{r-p}^2}{\overline{r+p}^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ & quia $y^2 + z^2 = r^2$, & formatis dignitatibus omiſſiſque terminis in quibus p, vel x, ad ſecundam dimenſionem aſſurgunt habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r}$ = ſive loco z^2 ſcripto $r^2 - y^2$; deleis terminis æqualibus & tranſpoſitione factâ & diviſione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideoque $x = p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

Ex quo ſequitur quod in Octantibus x evaneſcit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur vero Orbitam Lunarem

De Mundi Syſtemate.

121. Ellipticam citra Solis actionem ejuſque ſemi-axem majorem eſſe Y, excentricitatem dici f, accedere autem vim Solis, ſed eam tantùm partem ejus actionis conſiderari quæ ſecundum orbitæ radium agit, omiſſâ illâ parte ejus actionis Solaris quæ radio eſt perpendicularis, in hâc Hypotheſi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, & magis oblongam evadere dum Apſides ſunt in Syzygiis quam dum ſunt in quadraturis, Excentricitatem pariter variabilem eſſe maximam dum Apſides ſunt in Syzygiis, mediocrem cum Apſides ſunt in Octantibus, cum ſunt in Quadraturis minimam, & ex hâc hypotheſi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis Leges & quantitas rudi Minervâ determinari poteſt.

THEOR. I.

Poſitis Sole & lineâ Apſidum immotis, item omiſſâ eâ actionis Solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris agit; Dico quod ſi deſcribatur Ellipſis, cujus Terra ſit focus & cujus axis major ſit linea inter Lunæ Apogæum & Perigæum interjacens, Orbita Lunaris erit contenta intra eam Ellipſim cum Apſides erunt in Syzygiis, erit vero extra eam Ellipſim cum Apſides erunt in Quadraturis, cum vero Apſides erunt in Octantibus orbita Lunaris cum eâ Ellipſi coincidet.

Reſumptis iis quæ in Theor. VII. calculi ſecundi dicta fuerunt, inventum eſt quod ſi diſtantia Lunæ citra Solis actionem fuiſſet x, evadit per Solis actionem ſecundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ ſive quia eſt $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$, hæc diſtantia ſit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cum diſtantia Apogæa ſit $r+f$, diſtantia Perigæa ſit $r-f$, & ea diſtantia quæ eſt perpendicularis in axem, & quæ eſt ſemi-lateri recto Ellipſeos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; Diſtantia Apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Diſtantia Perigæa ſit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$ & Diſtantia perpendicularis eſt $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; Ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipſâ conſtructione patet, Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, ſive ſemi-axis eſt $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; Excentricitas vero eſt $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; Ex Ellipſeωn autem naturâ, ſemi-latus Rectum Ellipſeos cujus hic foret axis major & hæc foret excentricitas evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - \frac{\overline{1 + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2}{r^2} - 4}^2}{r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r} - f^2 \times \frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2r^2} \times \overline{\frac{3y^2}{r} - r}$, ſed ea diſtantia perpendicularis eſt in curva Lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \overline{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2f^2}{A^2r^2} \times \overline{\frac{3z^2}{r} - r}$ unde differentia inter diſtantiam perpendicularem in Ellipſi & eam diſtantiam in Orbita Lunari eſt $\frac{3M^2}{A^2r} \times \overline{y^2 - z^2} - \frac{M^2f^2}{A^2r^3} \times \overline{21y^2 - 12z^2 - 3r^2}$, ſive omiſſo hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia eſt $\frac{3M^2}{A^2r} \times \overline{y^2 - z^2}$. Si Apſides ſunt in Syzygiis eſt $y=r$, & $z=o$, unde hæc quantitas eſt maxima quæ eſſe poſſit, unde diſtantia perpendicularis in Ellipſi excedit diſtantiam in orbita Lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; Si Apſides ſunt in quadraturis ſit $y=o$, & $z=r$, un-

unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideoque diſtantia perpendicularis in Ellipſi minor eſt diſtantia in Orbita Lunari, unde fit ut Orbita Lunaris contineat intra ſe Ellipſim; Si vero Apſides ſint in Octantibus evaneſcit $y^2 - z^2$, hinc ipſa Orbita Lunaris cum Ellipſi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omiſſio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris, exhibet orbitæ Lunaris mutationem plane oppoſitam illi quæ ex ejus conſideratione deduceretur omiſſâ excentricitate orbitæ, nam ſive Apſides ſint in Syzygiis ſive in quadraturis liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari ſecundum lineam Syzygiarum, contrahi vero ſecundum lineam quadraturarum, cujus oppoſitum ſtatuebatur Prop. XXVIII. hujuſce, ex conſideratione vis Solaris totius, ſed ſemotâ Excentricitatis orbitæ Lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam; jungemus incremento diſtantiæ Lunaris ſecundum Hypotheſim Theor. VII. calculi 2[di]. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi ſecundum methodum Newtonianam inventi; Unde ſic medium quoddam inter ambas Hypotheſes obtinebimus.

Itaque quævis diſtantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} px \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}} = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4 y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$.

PROBL. I.

Poſitis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis ſtatuuntur, & ſuppoſito Orbitam Lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, Ellipſi proximam eſſe, Invenire Leges excentricitatis Orbitæ Lunaris.

Primò cum diſtantia Apogea ſit $r + f$, hæc diſtantia loco x ſubſtituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 y^2 + 12 r^3 f y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times r^4 + 4r^3}{A^2 r^3} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; ut habeatur diſtantia mediocris loco x ſcribatur r, ſinus autem ejus diſtantiæ à quadratura proxima eſt quam proxime Coſinus diſtantiæ Apogæi à quadratura proxima, ideoque loco y ſcribatur z, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2z^2}{r^2}}$ quæ ſubſtracta ex diſtantiâ Apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12 r f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omiſſis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; Hinc illius excentricitatis hæ ſunt leges, 1°. Excentricitas eſt maxima cum Apſides ſunt in Syzygiis, nam illic y fit r, & $z = 0$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

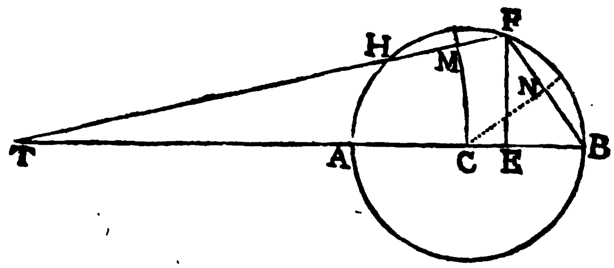
2°. Excentricitas eſt minima cum Apſides ſunt in Quadraturis, illic enim eſt $y = 0$ & $z = r$, unde Excentricitas evadit $f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

3°. Excentricitas eſt mediocris cum Apſides verſantur in Octantibus, eſtque $= f$, quia $y^2 = z^2$ ſicque evaneſcit $\frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

121.

121.



4°. In aliis quibuſcunque locis hâc conſtructione obtinetur ferè excentricitas, ſumatur $TC = f$, $CB = \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, hoc radio CB deſcribatur circulus in quo ſumatur BF æqualis duplæ diſtantiæ Apſidum à Syzygiâ, erit ſatis proximè CF excentricitas; nam centro T radio TC deſcribatur arcus CM, cum ſit perpendicularis in lineam THMF, & is arcus parum diſcedat à linea recta, punctum M erit medium lineæ HF per 3. 3 Elem. & MF erit æqualis Coſinui CE arcûs BF.

Radius CB ad compendium dicatur g, & quia ſinus dimidii arcus BF in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit $BN = \frac{g}{r}z$, & juxta nota Trig. Theoremata, ut CB (g) ad BN $\left(\frac{g}{r}z\right)$ ſic FB $\left(\frac{2gz}{r}\right)$ ad $EB = \frac{2zz}{rr}g$, & $CE = g - \frac{2zz}{rr}g = g \times \frac{rr - 2zz}{rr}$, ſed $rr - zz = yy$, hinc $CE = g \times \frac{yy - zz}{rr}$, ideoque

TF ſive $TE = f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m}A^2 p}{A^2} \times \frac{yy - zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia Ellipſis nonnihil diſcederet à loco Perigæi Lunæ per eaſdem hypotheſes determinato, ſi verò ex diſtantia Perigæa cum diſtantia Apogæa collatis excentricitas quæreretur, diverſa quidem ejus quantitas obtineretur, ſed eædem forent Leges, nam diſtantia Apogæa foret $r + f + \overline{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & Perigæa $r - f + \overline{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ hinc axis major eſſet $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ & ſemi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Excentricitas vero $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ ſive $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r$. Quæ quidem eſt maxima cum Apſides ſunt in Syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times 1 + \frac{8M^2}{A^2}$. In quadraturis fit minima quia evaneſcit y, ideoque fit $f \times 1 - \frac{4M^2}{A^2}$, hinc mediocris excentricitas eſt $f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$, quod evenit in Octantibus tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, ideoque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2}r$, fit ergo $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{1}{2}r = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$. In cæteris locis ſumatur $TC = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$ & $CB = \frac{6M^2}{A^2}f$, & ſi CB dicatur

g ut in Probl. præcedente erit $CE = g \times \frac{rr - 2zz}{rr} = g \times \frac{rr - 2rr + 2yy}{rr} = g \times \frac{2yy - rr}{rr}$ ideoque $TE = f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2} + \frac{6M^2}{A^2} \times \frac{2yy - rr}{rr}} = f \times \overline{1 + \frac{2M^2}{A^2 r} \times r + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - \frac{6M^2}{A^2 r} \times r} = f \times \overline{1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3y^2}{r} - r}$ quæ eſt Excentricitas reperta, & eadem conſtructione obtinetur ac in hypotheſi Problematis.

Si denique ſicut Aſtronomis ſolemne eſt axim majorem conſtantem aſſumamus, & ſemi-axis major dicatur r, qui ex diſtantiâ Apogæa ſubducatur ut habeatur Excentricitas, eædem ejus excentricitatis Leges iterum obtinebuntur; erit quippe Excentricitas $f + r + 4f \times \frac{Y}{y} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$ ſive $f + \frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Quæ fit in Syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2M^2 r}{A^2} + \frac{8M^2 f}{A^2} - \frac{2np}{m}$, in Quadraturis ubi y evaneſcit $f - \frac{M^2 r}{A^2} - \frac{4M^2 f}{A^2 f} + \frac{n}{mp}$. Unde mediocris Excentricitas eſt $f + \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2} - \frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in Octantibus circiter occurrit quia majores termini $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ evadunt $\frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{M^2 f}{A^2}$ in Octantibus, nam cum y^2 illic fit $\frac{1}{2} r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{\frac{3rr}{2r} - r}, + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3rr}{2r} - r} = \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2}$.

PROBL. II.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

121.

Variationis Excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonniſi per determinationem veræ curvæ quam ſequitur Luna poteſt determinari, quâ non inventâ ad Obſervationes recurrendum, ut feciſſe videtur Newtonus, mediocrem Excentricitatem eſſe partium 5505 quarum radius ſit 100000 aſſumit, & maximum incrementum vel decrementum aſſumit 1172 $\frac{3}{4}$, tam ex Obſervationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam conſtructionem pro Æquatione Apogæi commodus eſſet ut ſuo loco dicemus.

Illuſt. Caſſinus mediocrem illam Excentricitatem facit 5430 Incrementum vero & Decrementum 1086, nec malè hæc conſentiunt cum quantitatibus Prob. 1°. inventis, ſi loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ ſcribatur $\frac{1}{2}$; Nam, id Incrementum aut Decrementum inventum fuerat $\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, ſive accuratiùs ſumptis quantitatibus quæ ad ſimplicitatem calculi omiſſæ fuerant cum Excentricitas inventa fuiſſet $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum Apſides ſunt in Syzygiis & $z = 0$, $y = r$) $f + \frac{M^2}{A^2} \times 3r + 12f + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - p$. & cum ſunt in Quadraturis ubi $z = r$ & $y = 0$, $f - \frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times 4f + p$, unde mediocris Excentricitas eſt $f + \frac{M^2}{A^2} \times 10f$, & Incrementum vel Decrementum, $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{3r + 6f} - p$.

Cum itaque ſit $\frac{M^2}{A^2} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris Excentricitas $1 + \overline{\frac{10M^2}{A^2}} \times f$

quam

DE MUNDI SYSTEMATE.

(†) Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quòd motus lunares per theoriam gravitatis à cauſis ſuis computari poſſint. 121. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis lunæ per vim ſolis, juxta Corol 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo ſolis major eſt, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in (i) apogæo & perigæo ſolis nulla eſt, in (k) mediocris ſolis à terrâ diſtantia ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri ſolis proportionalis eſt; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio ſuo ad perihelium, & in oppoſitâ orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium orbis magni

1000

(quam Caſſinus invenit 5430 & Newtonus 5505) eſt 1.055 f, hinc eſt $f=5147$ ſecundùm Caſſinum & 5218 ſecundùm Newtonum quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 2819.85 alterum 1822.2 cumque p ſit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex poſteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 & 1086 quos pro Excentricitatis variatione aſſignant Newtonus aut Hallejus & Caſſinus.

(†) * *Hiſce motuum* &c. Hæc eſt enim veritatis ejus Theoriæ fortiſſima probatio, ſi ea quæ Mathematicè deducuntur ex eâ Theoriâ apprime conſentiant cum Phænomenis in caſu maximè compoſito.

(h) * *Hæc vis in Perigæo Solis major eſt & orbem Lunæ dilatat*; Vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam verſus Terram attrahat, aliquando idque ſæpiùs & ubi fortiùs agit vi Terræ eſt oppoſita, & Lunam à Terrâ diſtrahit, itaque toto effectu vis Solis ſimul conſiderato, Luna per eam vim à Terrâ diſtrahitur & eò magis quò ea vis Solis major eſt; ideoque Luna magis à Terrâ diſtrahitur dum Terra verſatur in ſuo Perihelio quàm ubi verſatur in Aphelio: hinc primo caſu orbita Lunæ magis eſt dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In Apogæo & Perigæo nulla eſt* id omninò liquet ex Coroll. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario ſtatuuntur liquet quod ut habeatur Æquatio quovis in loco, hæc proportio eſt inſtituenda, ut areæ Ellipſeos quam Terrâ deſcribit dimidium ad aream deſcriptam à Terrâ ab Aphelio (vel Perihelio) uſque ad eum locum propoſitum, ita ſemeſtris tardatio ad tardationem mediocri motui adſcriptam, ſed in hoc caſu ea area à Terra deſcripta eſt ipſa ſemi-Ellipſis, ergo etiam tardatio medio motui adſcripta eſt ipſa ſemeſtris tardatio; Tum verò ſumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, & differentia eſt æquatio quæſita; ſed rurſus ea tardatio Aphelio aut Perihelio conveniens eſt ipſa ſemeſtris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adſcripta, detracta nullum eſt reſiduum, cum planè ſint æquales, ergo æquatio in Apogæo ac Perigæo nulla eſt.

(k) * *In mediocri Solis diſtantia &c.* Videntur hæc verba ſtatuere quid conſtet ex Obſervationibus. nempe hanc æquationem eſſe 11′. 50″. ubi maxima eſt, & eſſe æquationi centri proportionalem; obſerva-

Liber Tertius. Prop. XXXV. Probl. XVI.

1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc (l) æquatio, ubi maxima eſt per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas terræ paulo major eſſe videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas, $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

(m) Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim ſolis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inverſè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum

ſervavimus autem Ill. Caſſinum hanc æquationem ubi maxima eſt 9′. 44″. efficere.

(l) * *Hæc æquatio ubi maxima eſt prodiit* 11′. 49″. Sumptâ Orbitâ Lunari ut circulari, per Theoriam gravitatis prodiit 11′. 47″. imo minor, ſive Newtonus aliâ viâ eum calculum inſtituerit quàm nos, ſive alia Elementa aſſumpſerit, ſive ex excentricitate Orbitæ Lunaris conſideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amuſſim quadrant.

Eam Æquationem excentricitati Terræ eſſe proportionatam ex Cor. I. Prob. V. pag. 487., prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; & quamvis quantitas b quæ eſt $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non eſt cenſendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 ſiquidem in illo termino ea dignitas ferè evaneſcit reſpectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejuſd. Probl. cæteras æquationes eſſe proportionatas æquationi centri Solis: addendas eſſe motui Lunæ dùm pergit ab Aphelio ad Perihelium, illic enim tardatio vera minor eſt quam tardatio mediocris, ergo provectior eſt Luna quam ſecundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iſte tardationis defectus; ex Perihelio pergendo res oppoſitâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam &c.* Id utique ſtatuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic oſtendit Vires Solis eſſe ut Cubos diſtantiarum reciprocè, unde cùm ſint cauſæ errorum Apogæi & Nodorum, illi errores ſive motus qui ſuis cauſis ſunt proportionales, debent eſſe ut cubi diſtantiarum reciprocè; Hinc dicatur a mediocris diſtantia Terræ à Sole, diſtantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus Apogæi in diſtantia a ſit g. motus medius nodi in ea diſtantia a ſit n. in diſtantia x, motus Apogæi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} g$ & motus nodi erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} n$ aut formando ſeriem ex his quotientibus & omiſſis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus Apogæi in quavis diſtantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, & motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$. 121.

(n) * *Et inde oriuntur Æquationes annuæ, Æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus Apogæi Lunæ & nodi uniformis non ſit cùm Terra ad varias à Sole diſtantias transfertur, ſed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, & $\frac{3x}{a} n$, ſi quæratur progreſſus Apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab Aphelio Solis certâ quantitate dierum diſceſſerit, is progreſſus ex motu medio Apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe ſingulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ proceſſerunt aut receſſerunt, ſumma ergo om-

tuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus (o) autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè & (p) maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt $1^{gr}. 56^{l}. 20^{ll}$ prædictæ ſolis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod ſi motus ſolis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}.$ 54^{l}

221. omnium harum quantitatum erit ſumenda, quæ erunt correctiones ſeu æquationes quibus ex loco medio Apogæi & Nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis ſit in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè (ut exponetur in notâ o proximè ſequenti) ſit m motus medius diurnus Solis in mediocri diſtantia a, in diſtantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{\overline{a \pm x}^2} m$, ſeu in ſeriem reſolvendo hanc Expreſſionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium & verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, & ex ſummâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis, cùm ergo æquationes Apogæi & Lunæ ex ſummâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ conſtent, erunt iſtæ æquationes ubivis in punctis correſpondentibus ſeu in æqualibus ab Aphelio Terræ diſtantiis in ratione conſtanti $3g$. & $3n$ ad $2m$: Ideoque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) * *Motus Solis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè* ſcilicet motus Solis angularis è Terrâ ſpectatus; nam cùm Sol deſcribat ſemper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ deſcribit ſunt ſemper inversè ut diſtantiæ, ſed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ ſpectatorum ſunt etiam inversè ut eorum à Terrâ diſtantia, ergo arcus quos Sol ſingulis tempuſculis æqualibus deſcribere videtur è Terrâ, ſunt in duplicatâ ratione diſtantiarum inversè.

(p) *Et maxima Centri Æquatio eſt* $1^{\circ}. 56'. 20''$. Illam $1^{\circ}. 55'. 50''$. facit Ill. Caſſinus.

(q) * *Quod ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè*; Dicatur M motus Solis in diſtantiâ mediocri, quæ dicatur a, & diſtantia quævis alia ſit $a \pm x$, ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, in diſtantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} M$ ſive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando ſeriem, is motus in diſtantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omiſſis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$, ideoque differentia motus in diſtantiâ verâ & motus in diſtantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: In verâ autem hypotheſi quòd Solis motus creſcat in ratione ſubduplicatâ inverſâ diſtantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ & diviſione facta erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, & differentia motus veri & motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore Hypotheſi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correſpondentibus; ſed æquationes conflantur ex ſummâ differentiarum motus veri & medii ſumptarum in omnibus locis ab Aphelio uſque ad locum eum, ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypotheſi ſingulæ differentiæ motus veri & medii ſint in omnibus punctis correſpondentibus

in

$54'\ 30''$. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, ſunt ad $28^{r}, 54'. 30''$. ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ ſunt ad motum medium diurnum ſolis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi $19'. 43''$, & æquatio maxima medii motus nodorum $9'. 24''$. (ſ) Additur verò æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi terra pergit à perihelio ſuo ad aphelium: & contrarium fit in oppoſitâ orbis parte.

Per theoriam gravitatis (t) conſtitit etiam quòd actio ſolis in lunam

in ratione conſtanti 2 ad 3 erunt etiam ſummæ earum differentiarum in locis correſpondentibus, ipſæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypotheſi verâ motum Solis decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum eſt ad æquationem maximam in hypotheſi fictitiâ motum Solis decreſcere in triplicatâ ratione diſtantiarum ut 2 ad 3 cum ergo æquatio maxima ſit per Obſervationes $1^{gr}. 56'. 20''$. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1^{gr}. 56'. 20''$. ſive $2^{gr}. 54'. 30''$. Q. E. D.

(r) * *Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & nodorum generant ſunt ad* $2^{gr}. 54'. 30''$. *ut modus medius Apogæi & Nodi ad motum medium Solis.* Nam ſtatutum eſt motus horum eſſe in triplicatâ ratione diſtantiarum inver·è, ſit g motus medius Apogæi in mediocri nempe diſtantiâ, n motus medius nodorum, & m motus medius Solis, decreſcantque in triplicatâ ratione inverſâ diſtantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum & motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, Æquationes maximæ ſunt ſumma earum quantitatum ſumptarum ab Apogæo Solis uſque ad mediocrem ejus à Terrâ diſtantiam, itaque illæ Æquationes conſtituuntur per ſeries, omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, & omnium $\frac{3x}{a} m$, 121.

qualeſcumque ergo ſint illæ quantitates variabiles x, cùm eædem ſint in tribus hiſce ſeriebus ſummæ earum ſerierum ſive Æquationes maximæ, erunt inter ſe ut illæ quantitates g, n & m, per quas omnes partes ſingularum illarum ſerierum ducuntur, illæ verò quantitates ſunt motus medii Apogæi, nodi & Solis, ergo datâ unâ ex his Æquationibus, v. gr. datâ Æquatione maximâ Solis & motu medio Apogæi, nodi & Solis, habentur cæteræ Æquationes maximæ ſtatuendo illas eſſe ad eam Æquationem datam, ut ii motus medii dati.

Liquet verò ex ipſâ hac Demonſtratione, verùm quidem Solis motum medium aſſumi debere, non autem veram ipſius Æquationem ſed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione diſtantiarum decreſcere.

(ſ) * *Additur verò Æquatio* Apogæi Lunæ *& ſubducitur Æquatio* nodi *ubi Terra pergit a Perihelio ſuo ad Aphelium*; motus Apogæi Lunæ eſt progreſſivus, motus verò nodi eſt retrogradus; Terrâ autem à Perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit Apogæum ι unæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo Æquatio addenda, poſterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major*

DE MUNDI SYSTEMATE.

lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea terram & ſolem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et (u) hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, pendens à ſitu apogæi lunæ ad ſolem, quæ quidem maxima eſt cum apogæum lunæ verſatur in octante cum ſole; & nulla cum illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu apogæi lunæ à ſolis quadraturâ ad ſyzygiam, & ſubducitur in tranſitu apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3'. 45'' circiter, (x) quantùm ex phænomenis colligere

121. *jor ſit ubi tranſverſa Diameter orbis Lunaris tranſit per Solem* &c.

Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 479) quod (exiſtente x diſtantiâ Lunæ à Terrâ, r ejus diſtantiâ mediocri, & y ſinu ejus diſtantiæ à quadraturâ, exiſtente etiam F vis Solis in terram in mediocri ejus diſtantiâ a) actio Solis Lunam trahentis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris eſt $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis exiſtente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, eſt ergo negativa & Lunam ad Terram attrahit cum verò Luna eſt in ſyzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, eſt itaque poſitiva & Lunam à Terra diſtrahit; In locis autem ſimilibus hæ Solis actiones ſunt ut diſtantiæ x Lunæ à Terrâ. Hinc ſi Apſides ſint in ſyzygiis ſit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad terram trahitur ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris; cum verò Luna eſt in ſyzygiis ubi per actionem Solis à Terra diſtrahitur, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales axi majori, qui ſemper ſuperat latus rectum.

Si verò Apſides ſunt in quadraturis, & Luna etiam in quadraturis ambæ diſtantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſimul ſumptæ ſunt æquales axi majori, & cum Lunâ eſt in ſyzygiis, ambæ diſtantiæ x Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris.

Ergo cum Apſides ſunt in Syzygiis actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit eſt minor, & è contra actio quæ Lunam à Terra diſtrahit eſt major quam cum Apſides ſunt in quadraturis, ideoque orbis Lunaris paulo major fieri debet in priore caſu quam in poſteriore.

De punctis autem inter quadraturas & Syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit judicari poteſt, ſed potiſſimum ex calculo quo Æquatio ex hâc cauſâ natâ determinatur.

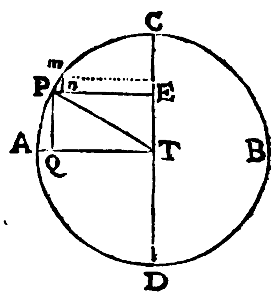
(u) * *Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris* &c. Hujus æquationis calculum ejuſque Leges explicatas habes Probl. VI. calculi ſecundi (pag. 500.) ejuſque Corollariis.

(x) * *Quantùm ex Phænomenis colligere potui* &c. Ex Coroll. 5°. Probl. VI. (pag. 501. in quo quædam menda irrepſerunt à B. L. prius corrigenda) Æquatio hæc 3'. 56'' eſt reperta, quædam autem cau-

ligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis inverſè; ideoque in maximâ ſolis diſtantiâ eſt 3′. 34″,

cauſæ ſunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, ſed hæc æquatio ex phænomenis ſit colligenda; primò, quantitas f ſive excentricitas Orbitæ Lunaris ſatis certo non eſt cognita, ut conſtat ex iis quæ de excentricitate dicta ſunt, hic autem mediocrem excentricitatem aſſumpſimus 5505 partium quarum radius orbitæ ſit 100000 cum Newtono quam Caſſinus facit tantum 5430 partium, & forte minor aſſumi deberet ſi attendatur ad Excentricitatem Orbitæ Lunaris qualis ea foret citra Solis actionem ex quibus conſiderationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quam 3′. 56″, ſicque magis acceſſuram ad æquationem 3′. 45″ quæ ex Phænomenis colligitur: ſecundò cum varias Hypotheſes aſſumpſerimus vero quidem proximas non tamen veras abſolutè ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 496) ex iis erroribus ipſæ quantitates abſolutæ mutantur ſed manent earum proportiones ex quibus Leges æquationum pendent ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per Phænomena, reliquæ ſatis tuto exinde deduci queant.

(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ inverſè.* Probl. VI. (pag. 500. col. 2.) hæc æquatio inventa eſt $\frac{15\,A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S.\,V.\,a r^8} \times - 163.595$ PQT, in quâ expreſſione a repræſentat mediocrem Solis à Terra diſtantiam, in aliâ itaque à Sole diſtantiâ loco a ponatur X, & loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F eſt inverſè ut quadrata diſtantiarum, hac ergo ſubſtitutione factâ æquatio ſit $\frac{15\,A\,a^2 F q^9 f^2}{109.73.\,S.\,V X^2.\,X r^8} \times - 163.595$ PQT tum loco $\frac{F}{V}$ ſubſtituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 484) æquatio evadit $\frac{15\,M^2 a^3 \cdot q^9 f^2}{109.73 S.\,A.\,X^3.\,r^9} \times - 163.595$ PQT, & quia in octantibus eſt PQT $= \frac{1}{4} r^2$ æquatio eſt $- \frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 \times S.\,A\,X^3 r^7}$, in quâ cum nulla ſit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet Æquatio- 121,



nem cum Apogæum eſt in Octantibus, hoc eſt æquationem maximam eſſe ut X^3 inverſè, hoc eſt *augeri ac diminui in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis X inverſè; ideoque* &c.

Scilicet poſitâ Excentricitate Orbitæ telluris $.016\frac{11}{12}$, diſtantia maxima eſt $1 + .016\frac{11}{12}$, diſtantia mediocris 1, & diſtantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque ſumendo rationem triplicatam mediocris & maximæ diſtantiæ ſiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$ &c. (1.0516) ad 1, ita 3′45″ ad quartum qui erit 3′.34″. & ſumendo rationem triplicatam inverſam mediocris & minimæ diſtantiæ ſiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12}$ +

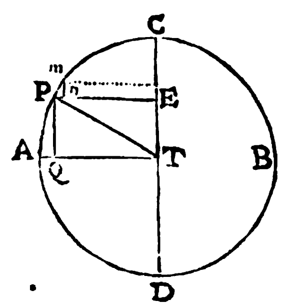
DE MUNDI SYSTEMATE.

34″, & in minima 3′. 56″ quamproximè: ubi vero apogæum lunæ ſitum eſt extra octantes, evadit minor; (z) eſtque ad æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ apogæi lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio ſolis in lunam paulo major eſt ubi linea recta per nodos lunæ ducta tranſit per ſolem, quam ubi linea illa ad rectos eſt angulos cum rectâ ſolem ac terram jungente. (b) Et inde oritur alia medii motus lu-

121. $+3\times.000285\frac{1}{2}$ &c. (.950197) ad 1 ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 56″.

(z) * *Eſtque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque diſtantiâ Terræ à Sole, hæc æquatio eſt $\frac{15\,M^2 a^3 r^9 f^2}{109.73\ S.\,A.\,X^3 x^9} \times -163.595$ PQT, liquet quod ſupponendo diſtantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut PQT; in octantibus autem PQT eſt $\frac{1}{4}r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio eſt ad eam quæ in



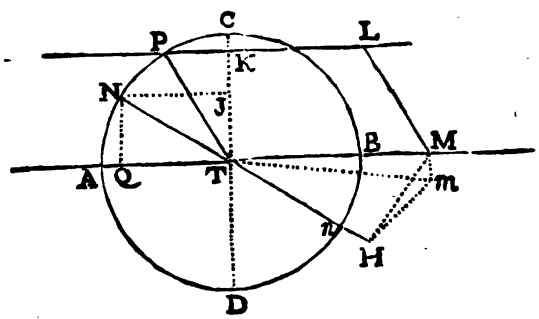
Octàntibus obtineretur, manente eâdem diſtantiâ Solis à Terrâ ut PQT ad $\frac{1}{4}r^2$, ſive quia PQT eſt $\frac{1}{2}zy$ ut $\frac{1}{2}zy$ ad $\frac{1}{4}r^2$, & utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2zy}{r}$ ad r, ſed $\frac{2zy}{r}$ eſt ſinus duplæ diſtantiæ puncti P, hoc eſt Apogæi à Syzygiâ, (aut à quadraturâ perinde enim eſt ut ex Trigonometriæ Principiis liquet) hinc æquatio in quovis ſitu Apogæi extra octantes eſt ad Æquationem maximam quæ obtineretur in Octantibus manente eâdem diſtantia Telluris à Sole, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ à proximâ Syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eamdem* &c. Cum linea recta per nodos ducta tranſit per Solem, tunc Sol verſatur in plano ipſius orbitæ Lunaris producto, ejus itaque actio non conſumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, ſed tota impenditur ad eam vel à terrâ diſtrahendam, vel ad terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio ſuo Plano, cum autem linea nodorum eſt ad angulos rectos cum rectâ ſolem ac terram jungente, tunc Sol maxime diſcedit à plano orbitæ Lunaris, hinc pars ejus actionis conſumitur in admovendo Plano orbitæ Lunaris ad Eclipticam, & per reſiduum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori caſu actio Solis in Lunam paulò major eſt quam in poſteriore, partem autem actionis Solis reſiduam ſublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ Lunaris dimovendo conſumitur ad calculum vocamus Probl. 1°. Calculi tertii (pag. 502.).

(b) * *Et inde oritur alia motus medii æquatio.* Hujus æquationis quantitatem & Leges Probl. III. Calculi 3i. (pag. 503.) expoſuimus, illamque $\frac{3\,A.\,F.\,l^2}{8\,S.\,V.\,ar} \times \frac{2nm}{r}$ in-

lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi nodi in ſolis octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: (c) additur vero medio motui lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia, ſubducitur ſi in conſequentia, & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcen-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.



invenimus, ſumendo l pro ſinu inclinationis orbitæ, & n & m pro ſinu & Coſinu diſtantiæ nodorum à Syzygiâ. Hinc cum $\frac{2nm}{r}$ ſit ſinus duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ, cæteri verò termini ſint conſtantes hæc æquatio eſt maxima *ubi nodi in Solis octantibus verſantur*, & evaneſcit *ubi ſunt in Syzygiis vel quadraturis & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ* &c.

(c) * *Additur verò medio motui Lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia ſubducitur ſi in conſequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Lunâ retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ Lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc eſt acceleratio quædam oritur reſpectu motus qui, omiſſâ hac conſideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, & quæ includitur in medio motu

Solis eſt ubique $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V a r^2} \times \frac{ru}{2}$, vera autem acceleratio eſt $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V a r^2} \times ANQ$. 1212
Unde æquatio eſt $\frac{3 A. F. l^2}{2. S. V a r^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ per Probl. III. calculi 3. (pag. 503. & ſeq.) jam itaque ſi $\frac{ru}{2}$ ſit major quam ANQ quod evenit in toto quadrante ANC, acceleratio mediocris eſt major vera, & Luna magis proceſſiſſe cenſetur quam revera proceſſit, hinc iſta differentia $\frac{3 A. F. l^2}{2 S. V. a r^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem caſu Sol qui puncto A reſpondere cenſetur eſt in conſequentia reſpectu nodi N.

Dum verò N verſatur inter C & B, &

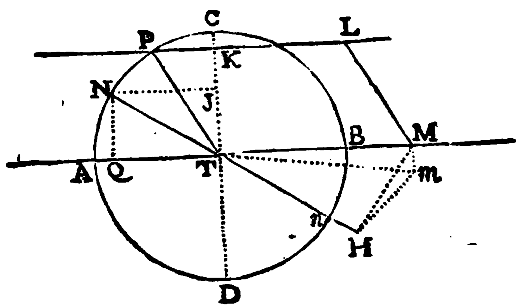
n

De Mundi Syſtemate.

cendit ad $47''$ in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo. In (e) aliis ſolis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ, ideoque in perigæo ſolis ad $49''$ in apogæo ejus ad $45''$ circiter aſcendit.

121.

Per



n inter A & D, tunc $\frac{rn}{2}$ eſt minor quam ANQ, ſic itaque acceleratio mediocris eſt minor quam acceleratio vera, ideoque differentia $\frac{3A.Fl^2}{2S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A eſt in antecedentia reſpectu nodi proximi *n*.

3°. Dum N verſatur inter B & D & *n* in A & C $\frac{ru}{2}$ excedit ANQ, ſive motus mediocris excedit verum ſubduci itaque debet differentia, eſt vero in eo caſu Sol in A in conſequentia reſpectu nodi *n*.

Denique Dum N eſt inter D & A, $\frac{ru}{2}$ minor eſt quam ANQ addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ & Sol eſt in Antecedentia reſpectu nodi N.

Ergo æquatio ſubducitur ex medio motu Lunæ cum Sol eſt in conſequentia reſpectu nodi proximi, additur vero ei motui cum Sol eſt in antecedentia.

(d) * *Uti ex Theoriâ colligo*, calculus noſter coroll. Probl. III. contentus, Æquationem maximam $45''.6$ exhibet, qui numerus eſt adeo proximus numero 47". quem ex Theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile ſit ipſum hunc numerum ex Theoriâ gravitatis collegiſſe eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 501.) adhibetur, differentiola enim iſta oriri poteſt ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem *M* menſis Periodici citra actionem Solis conſiderati, paulo majorem fecerit quam nos.

(e) * *In aliis Solis diſtantiis.* Eadem plane eſt demonſtratio ac in notâ (*y*) præcedente; cum æquatio ſit $\frac{3AFl^2}{8SVar} \times \frac{2nm}{r}$ in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ X, loco *a* ſcribatur X, loco F, $\frac{a^2F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{aM^2}{rA^2}$, æquatio evadit $\frac{3M^2a^3l^2}{8A.S.X^3r^2} \times \frac{2nm}{r}$ & in Octantibus quia $\frac{2nm}{r} = r$, Æquatio eſt $\frac{3M^2a^3l^2}{8A.SX^3r}$, ideoque æquationes in

Octan-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Per (f) eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum ſole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum ſole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. (h) Et æquatio maxima ſemeſtris eſt $12^{gr}. 18'$ circiter, quantùm ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter lunam in ellipſi circum terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et (i) ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris lunæ à terrâ in partes 100000, & refe-

Octantibus in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ, ſunt inter ſe inverſe ut X^3, ſi fiat itaque ut Cubus maximæ diſtantiæ Terræ à Sole qui eſt 1.0516, ad Cubum 1 mediocris diſtantiæ, ita 47″ Æquatio pro mediocri diſtantia inventa erit ad 45″ circiter eaque erit Æquatio in maximâ diſtantiâ Solis à Terrâ, & ut .950107 Cubus minimæ diſtantiæ, ad 1 ita 47″ ad 49″ circiter quæ erit Æquatio maxima cum Sol erit in Perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) oſtendetur quomodo in quâvis Solis à Terrâ diſtantiâ, & in quavis poſitione Nodi reſpectu Solis Æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eamdem gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maximè* &c. Per Methodum ex ipſis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 505. & ſeq.) motum Apſidis eſſe ut $3yy - rr$, ſumendo y pro ſinu diſtantiæ Apſidis à quadraturâ, is ergo motus, juxta hunc calculum, evaneſcit cum $y\sqrt{3} = r$, cum nempe y eſt ſinus arcus $35^{gr}.15'$, poſitivus verò eſt in ſyzygiis illic enim fit $3yy - rr = 2rr$ negativus in Quadraturis illic enim eſt $3yy - rr = -rr$.

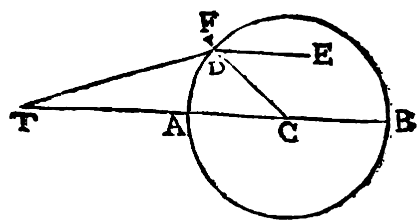
(g) * *Et excentricitas fit maxima in priore caſu* cum nempe Apſides ſunt in ſyzygiis & minima in poſteriore, cum nempe *Apſides ſunt in Quadraturis.* Id utique ſtatuitur toto calculo de Excentricitate orbitæ Lunaris ſuperius pag. 512. & ſeq. tradito. 121.

(h) * *Et Æquatio maxima ſemeſtris*, &c. Hanc ex obſervationibus determinandam liquet cum non ſatis feliciter obtineatur abſoluta quantitas motus Apogæi per calculos ſecundum Newtoniana Principia inſtitutos; Methodus autem à nobis indicata eſt admodum incompleta & rudis, & in ea multa quæ conſiderari debuiſſent ſunt omiſſa, hinc cum in cæteris motibus Lunæ & Æquationibus ad votum ſuccedat Theoria Newtoniana, in hoc caſu aliquid adhuc deſiderari, fatendum eſt.

(i) * *Et ex motu in Epicyclo.* Ingenioſè & feliciter conjunctas eſſe unicâ conſtructione Geometricâ Excentricitatis variationes, & motus Apogæi æquationes, ex iis quæ de Excentricitate dicta ſunt pag. 516. intelligi poteſt; Illic enim oſtenditur quod ſi T C ſit excentricitas media f, C B maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, B F arcus duplus diſtantiæ apſidis à ſyzygiâ, tunc linea T F eſt excentricitas, oſtenditur verò, Probl. II. pag. 517. variationem maxi- mam

DE MUNDI SYSTEMATE.

referat *T* terram & *TC* eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut ſit *CB* ſinus æquationis maximæ ſemeſtris 12gr. 18′ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C*, intervallo *CB* deſcriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum



BDA revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci ſolis ab apogæo lunæ ſemel æquato, & erit *CTD* æquatio ſemeſtris apogæi lunæ & *TD* eccentricitas orbis ejus in apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentri-

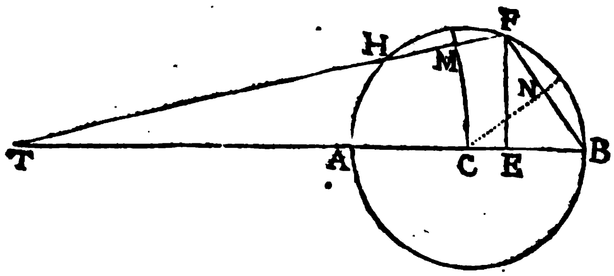
221. mam excentricitatis quæ eſt A B tam ex obſervationibus quam conſentiente calculo ſumi poſſe 1172 partium quarum Radius orbitæ Lunaris eſt 100000 & excentricitas TC 5505, ſimul autem cum conſtet ex obſervationibus æquationem ſemeſtrem Apogæi 12gr. 18′ eſſe, ejus Anguli ſinus eſt partium 1172 Radio exiſtente partium 5505, ut liquet ſi fiat ut Radius 100000 ad ſinum Anguli 12°. 18′ qui eſt 21303 ita 5505 ad quartum qui eſt 1172 $\frac{3}{4}$ hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis ſelegit Halleius, quia non procul eſt ab iis quos & obſervationes & calculus indicant, ſimulque eſt ſinus anguli maximi quo diſcedunt Apſides à loco medio, Ergo quando B F eſt quadrans, ideoque Apſides octante à ſyzygiâ diſtant, ſinus anguli F T B eſt ipſa linea C B ſive 1172 $\frac{3}{4}$ dum radius T F eſt æqualis T C ſive 5505, ergo eo in caſu angulus F T B eſt verus diſceſſus lineæ Apſidum à ſuo loco medio, & jacet T F in verâ poſitione lineæ apſidum, & cum T F ſit excentricitas eo in loco eſt F in ipsâ poſitione centri orbitæ Lunaris; Idem proximè eveniet in quovis alio loco F; Nam cum Æquationes Apogæi (pag. 512.) ſint ut ſinus Arcus dupli diſtantiæ Apſidis à Sole, & ſit F B arcus duplus diſtantiæ Apſidis à Sole & F E ejus ſinus, æquatio maxima 12gr. 18′ debebit eſſe ad eam quæ huic loco F competit ut B C ad F E, ſed in ea proximè ſunt ratione anguli omnes F T B, hinc itaque eſt quam proximè T F in verâ poſitione lineæ Apſidum & F centrum orbitæ.

tricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & diſtantia ejus à terrâ, (k) idque per methodos notiſſimas.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

(l) In perihelio terræ, propter majorem vim ſolis, centrum orbis lunæ velociùs movetur circum centrum C quam in aphelio, idque in triplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè. (m) Ob æquationem centri ſolis in argumento annuo comprehenſam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo BDA in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inversè; ab orbis centro D agatur recta DE verſus apogæum lunæ ſeu rectæ TC parallela, & capiatur angulus EDF æqualis exceſſui argumenti annui prædicti ſupra diſtantiam apogæi lunæ à peri-

gæo

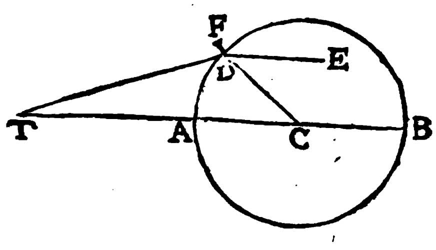


(k) * *Per Methodos notiſſimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla eſſet vis Solis quieſcerent Apſides orbitæ Lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ Lunaris F in circulo BFHA vi Solari eſſe debitum liquet, omnes verò errores ex vi Solari ortos, eſſe proximè in triplicatâ ratione diſtantiæ terræ à Sole ſæpius obſervatum eſt, hinc motus centri F orbitæ Lunaris in circulo BFHA eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob Æquationem centrì Solis in argumento annuo comprehenſam* &c. Arcus FB vel arcus BD in figura Textus eſt duplus diſtantiæ Apſidis à ſyzygiâ, hoc eſt, duplus diſtantiæ Apſidis à Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis à loco Apſidis tollendo, reſidui in conſequentia duplum eſt arcus BF, & id reſiduum eſt argumentum annuum, fingatur apſidem immotam eſſe ſolem vero moveri, pendebit arcus BF ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, ſed motus Solis eſt inverſe in ratione duplicatâ diſtantiarum Terræ à Sole (not. o), ergo motus puncti F ex hac conſideratione ſequitur rationem inverſam duplicatam diſtantiæ Terræ à Sole. 121.

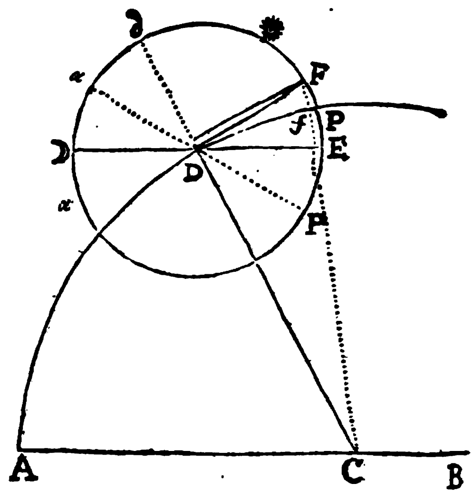
gæo ſolis in conſequentia; vel (ⁿ) quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis à terra, & motus medius



diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52'. 27''. 16'''$. ad $59'. 8'''. 10''$. conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et

221. (n) * *Vel quod perinde eſt.* Si circa punctum D radio DF deſcribatur circulus EF⊙dα☽P; In quo ſit E Lunæ Apogæum è centro D ſpectatum; ☽ Lunæ Perigæum, α Apogæum Solis, P Solis perigæum, ⊙ locus Solis, cum ex Conſtructione ſit dDE = DCB, ideoque duplum argumenti annui, ſive duplum diſtantiæ ⊙E, erit EDC æqualis ſemicirculo dempto 2⊙E, ſive erit $\frac{1}{2}c$ − 2⊙E; Itaque ſi ei arcui EDC addatur EDF æqualis annuo argumento dempta diſtantia Apogæi Lunæ a Perigæo Solis, ſive ⊙E − PE, fiet CDF = $\frac{1}{2}c$ − ⊙E − PE, ſed cum $\frac{1}{2}c$ ſit æqualis diſtantiæ Perigæi Solis ab ejus Apogæo erit $\frac{1}{2}c$ = PE⊙α, ex quo itaque detracto PE & E⊙, eſt CDF = ⊙α ſive diſtantiæ Solis ab Apogæo in antecedentia, aut quod idem eſt complemento ad 360 gr. arcus α☽PEF⊙, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo, in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Si punctum P foret in conſequentia reſpectu puncti E, tunc EDF faciendus eſſet æqualis argumento annuo addita diſtantia Perigæi Solis à Lunâ, ſicque fieret CDF = $\frac{1}{2}c$ − ⊙ + PE & quoniam in eo



caſu eſt $\frac{1}{2}c$ = P⊙☽α, & −⊙E + PE = −P⊙, erit CDF = ⊙☽α, ſive erit diſtantia Solis ab Apogæo in Antecedentia poſito, hoc eſt, complementum ad 360 gr. arcus α☽PEF⊙, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

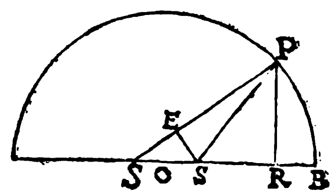
Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum eſt D, & radium DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli $DABD$. Hâc (°) enim ratione velocitas, quâ centrum orbis lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C deſcriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ quamproximè, ut oportet.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI.

Com-

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motus centri orbis Lunaris quæ adhibenda eſt ut moveatur velocius quam per primam conſtructionem, idque in ſimplici ratione diſtantiæ inversè eſſe proportionalem æquationi centri Solis conſtat eadem demonſtratione quâ in notis m & n pag. 519. de Æquationibus annuis Apogæi & nodi idem probatum fuit.

Dicatur a mediocris diſtantia Terræ à Sole, quævis alia diſtantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis Lunaris in diſtantia a ſit o, & quia ille motus eſt in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis à Terra inversè, in aliâ quavis diſtantiâ Terræ à Sole erit $\frac{a^3}{\overline{a \pm x}^3} o$ & formando ſeriem, erit $o \mp \frac{3x}{a} o$, ſed ſi fingeretur eum motum ſequi proportionem inverſam duplicatam diſtantiarum, inveniretur is motus ſingulis in locis $o \mp \frac{2x}{a} o$, & ita aſſumptus fuerat in primâ conſtructione (vid. not. *m* præced.), ergo ſingulo in loco error commiſſus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a} o$; Pariter ſi Solis motus medius dicatur m oſtenſum eſt (not. *n* pag. 519. 520.) differentiam inter motum medium & verum eſſe $\mp \frac{2x}{a} m$; Ideoque cum ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, ſit in ſingulis punctis x eadem, Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ orta erit proportionalis Æquationi ex $\mp \frac{2x}{a} m$ ortæ, hoc 122.
eſt erit proportionalis Æquationi centri Solis; Sed Æquatio centri Solis, eſt quamproximè proportionalis ſinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonſtratur quod ſi ex utroque foco S & ſ orbitæ

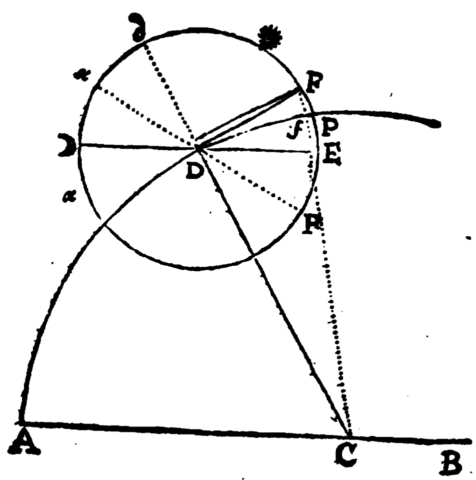


Solis ducantur lineæ ad punctum P erit BſP anomalia media, & BSP anomalia vera, ideoque angulus SPſ erit Æquatio, ducatur ergo ex ſ in SP perpendiculum ſE & ex P perpendiculum PR ob ſimilitudinem Triangulorum SſE & ſPR erit, SP ad PR ut Sſ ad ſE, ſive ſumendo SP pro radio conſtanti (quod eſt proxime verum) erit, ut Radius ad Sinum Anomaliæ veræ ita dupla excentricitas ad ſinum æquationis Solis, ſive ad ipſam Æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro ſinubus ſumi poſſunt. Hinc ſinus anomaliæ veræ eſt ad æquationem centri Solis in Ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem, hinc itaque, Æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$, erit ut ſinus Anomaliæ Solis, ſed

 An-

DE MUNDI SYSTEMATE.

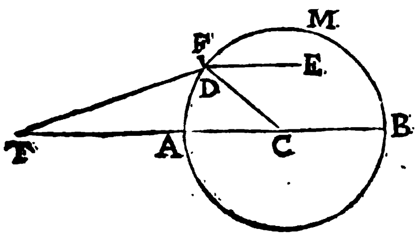
Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior redditur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris lunæ à terra ſit partium 100000, & eccentricitas *TC* ſit partium 5505 ut ſupra: recta *CB* vel *CD* invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ & recta *DF* partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam *TC* ſubtendit angulum ad terram quem tranſlatio centri orbis à loco *D* ad locum *F* generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata



121. Angulus C D F eſt complementum ejus anomaliæ ad 360gr. ſinus autem arcus alicujus & ſinus ejus complementi ad 360gr. ſunt unum & idem, ergo Æquatio ex errore $\mp\frac{x}{a}o$ nata eſt proportionalis ſinui angulorum C D F & ſi ſumatur Radius D F æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes ſinus angulorum CDF erunt ipſæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, ſi itaque ſumantur à puncto D arcus D f in circulo B D A æquales illis ſinubus, erit f verus locus centri orbitæ Lunaris, & quia ob exiguitatem horum ſinuum reſpectu radii C D, linea per C & f ducta cadit etiam in F ſumi poteſt F, ut verus locus centri orbitæ Lunaris.

Invenitur autem Æquatio maxima orta ex errore $\mp\frac{x}{a}o$; ſi attendatur quod Solis motus eſt ubique $m \mp \frac{2x}{a}m$, ſive $m \mp \frac{x}{a} \times 2m$ ideoque ſummam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}o$ fore ad ſummam omnium errorum in ſolis motu genitorum ut o ad $2m$, ſive Æquationem quæſitam eſſe ad Æquationem Solis ut eſt motus centri orbitæ Lunaris per circulum B D A ad duplum motum medium Solis reſpectu ſui Apogæi, ſed quoniam arcus B D ſunt ſemper dupli diſtantiæ Solis ab Apogæo Lunæ motus

cata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ à terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ à terrâ (p) ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in mo-



tu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia à terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa DF cum recta à puncto F ad lunam ducta continet quamproximè, & ubi maxima eſt evadit

2'.

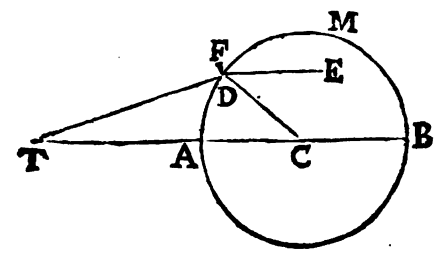
tus diurnus centri orbis Lunaris per circulum B D A eſt etiam duplus motus Solis ab Apogæo Lunæ, hinc Æquatio quæſita eſt ad maximam Æquationem Solis ut eſt radius D C ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra & ut duplus motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, maxima autem Solis Æquatio eſt ipſa dupla excentricitas orbis magni, hinc Æquatio quæſita ſive radius D F eſt ad duplam excentricitatem ut D C ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra, & ut motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, undè viciſſim eſt etiam D F ad D C ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab Apogæo Lunæ, ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipſaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F tranſlatum ex proprio loco mota cenſeri debet in locum alium per lineam ipſius D F duplam ipſique Parallelam, cum itaque diſtantia mediocris ſit partium 100.000, ſi hæc linea quæ duplicata eſt 70.4, angulum rectum cum linea à Terra ducta efficiat quo caſu maximam æquationem facit, ipſa ſubtendet angulum 2' 25'' ſiquidem ſinus duorum minutorum eſt 58.18 ſinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ poſitionibus reſpectu lineæ à Terrâ ductæ, anguli quos ſubtendet erunt ad iſtum ut eſt ſinus Anguli quem facit cum lineis à Terrâ ductis ad Radium; Nam in Triangulis in quibus duæ lineæ ſunt conſtantes ſed earum angulus variabilis, ſi una ex iis lineis alterius reſpectu ſit minima, Tertia linea pro conſtante aſſumi poteſt, eſt verò ad minimam lineam, ut ſinus anguli variabilis ad ſinum anguli oppoſiti minimæ lineæ, hinc ſinus anguli variabilis & ſinus anguli minimi ſunt in ratione datâ. Ergo ut 121.

ſinus.

De Mundi Syſtemate.

2′. 25″. (q) Angulus autem quem recta *DF* & recta à puncto *F* ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum *EDF* ab anomalia media lunæ, vel addendo diſtantiam lunæ à ſole ad diſtantiam apogæi lunæ ab apogæo ſo-



lis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″. ſunt ad æquationem centri ſecundam, addendam, ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus longitudo in ipſis luminarium ſyzygiis.

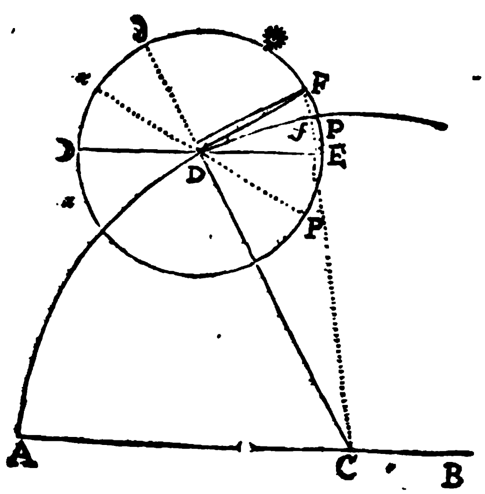
Cum

121. ſinus Anguli recti ſive Radius ad 2′. 25″. ita ſinus anguli quem facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad DF, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(q) * *Angulus autem quem* facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad DF, & in ipſo loco Lunæ poſita, æqualis eſt illi quem facit recta DF & recta à puncto F ad Lunam ducta, ſaltem proximè quia F eſt centrum orbitæ Lunaris à quo Terra non multum diſtat; Fingatur, produci lineam DF & ex puncto F duci lineam Parallelam lineæ DE, quæ ad Apogæum Lunæ tendit, & ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum linea DE erit anomalia media Lunæ ergo angulus hujus lineæ cum linea DF producta erit differentia anguli EDF & anomaliæ mediæ Lunæ, ſive quia erat EDF differentia argumenti annui, & diſtantiæ Apogæi Lunæ à Perigæo Solis ſi ex Anomalia media Lunæ tollatur argumentum annuum ſupereſt diſtantiæ Lunæ à Sole, cui addi debet diſtantia Apogæi Lunæ & Perigæi Solis, ſive (quia ſemi circuli additi vel detracti non mutant valores Angulorum eorumque ſinuum) diſtantia Apogæi Lunæ & Apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ deſcriptione; Exemplum eſto in conjunctione ubi eſt ☉ locus Solis & Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ eſt in conſequentia reſpectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ DF transfertur in Antecedentia; dum è contrà punctum ☉ eſt in antecedentia reſpectu puncti F, Luna transfertur in conſequentia; eſt vero F☉ = PE, cum ergo AL eſt major ſemicirculo, ut in figura, tunc PE ſive F☉ eſt minor ſemicirculo, eſt ergo ☉ in conſequentia reſpectu puncti F, hinc ſubducenda eſt ea Æquatio; ſit verò AE minor ſemicirculo-

Cum atmoſphæra terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 LIBER vel 40 refringat lucem ſolis, & refringendo ſpargat eandem in TERTIUS. umbram terræ, & ſpargendo lucem in confinio umbræ dilatet PROP. XXXV. umbram: (r) Ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, PROBL. XVI. addo minutum unum primum in eclipſibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero lunæ primò in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommodè ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ $20^{gr}.43'.40''.$, & apo-



lo erit PE major ſemicirculo ut & F⊙, ideoque eſt ⊙ in antecedentia reſpectu F promovetur itaque Luna propter hanc Æquationem; cæterum non tantum in luminarium Syzygiis, ſed ad cæteros Lunæ adſpectus hæc adaptari poſſunt, verum commodius eſt Aſtronomis, Theoriam ſuam ex ſyzygiarum obſervationibus explorare & conſtituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis eſt angulus qui ſubtenditur per ſemi-Diametrum terræ ex Luna ſpectatæ; Jam vero propter atmoſphæræ actionem in radios lucis idem evenit reſpectu umbræ ac ſi ſemi-Diameter terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illâc pergentes rectam viam non ſequuntur, ſed introrſum in umbram conjiciuntur, hinc 111.

De Mundi Systemate.

& apogæi ejus ♋ $7^{gr.}$ $44'$. $30''$, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}$ $21'$. $00''$., & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}$ $20'$. $00''$, & nodi aſcendentis ☊ $27^{gr.}$ $24'$. $20''$.; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* $0^{hor.}$ $9^{min.}$ $20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accuratè habentur.

121. carent radiis ſolaribus loca quæ trans Atmoſphæram eos recipere deberent, fungitur ergo Atmoſphæra vice corporis opaci, & umbra ea de cauſa dilatari debet quaſi ſemi-Diameter terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

ERRATA.

Pag. 400. Not. col. 2. lin. 8. & pag. 402. N. col. 1. l. 2. *pro* 110. *lege* 112. Pag. 498. Not. col. 1. l. 17. & 18. Luna *lege* Terra. *Ibid.* col. 2. l. 8. quæ factam erit *lege* factam, quæ erit. Pag. 500. col. 1. l. 27. *pro* 107.48. *lege* 108.48. Pag. 501. col. 1. linea 5ª. ante ultimam $\frac{1}{2}r^2$ *lege* $\frac{1}{4}r^2$. *Ibid.* lineâ 4ª. ante ultimam & ultimâ & col. 2. lin. 2. *pro* 40.449375 *lege* 40.89875, *ibidem*, *pro* 5.52939 *lege* 5.59082. *Ibid.* lin. 3. *pro* .0011297456r *lege* .001144878 2r. *Ibid.* lin. 5. *pro* .06372125 *lege* .065590872. *Ibid.* lin. 6. *pro* 3'82338. & *pro* .82338. *lege* 3'.9354. & .9354. Lin. 7. *pro* 49''4. *lege* 56''. Lin. 8. *pro* 3'.49''. *lege* 3'.56''. Lin. 30. *pro* 3'' *lege* 11''. Pag. 502. col. 1. lin. 28. *pro* graduum 5.19'.36''. *lege* graduum 5°.19'.30''.

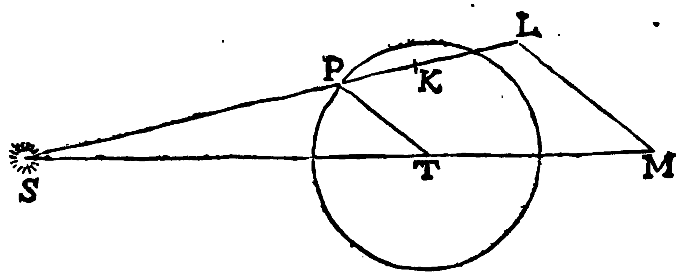
Serò quidem hæc tertii libri continuatio in lucem prodit propter varia Editoris negotia, citiùs edetur ultima hujus libri continuatio, quoniam ejus operâ nimis tardâ non utemur in poſterum.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO II.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.



SOlis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092,6. Et vis *TM–LM* ſeu 2*PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro terræ, id eſt, in (z) ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideo-

(z) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in prop. 25â. demonſtratum eſt eam partem vis centripetæ Lunaris in Solem quâ motus ejus circà terram perturbatur 1:1.

ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſitâ. (x) Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. (a) In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ ſolis à terrâ inversè.

Co-

221. batur & quæ radio orbitæ Lunaris erat proportionalis, eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum terræ circà Solem & Lunæ circà terram, ſimili planè modo probatur eam quoquè partem vis centripetæ in Solem quæ analoga eſt radio terræ eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in ratione radii terræ ad radium orbitæ Lunaris directè & ratione duplicatâ temporis periodici terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà terram inversè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè ſuperficiem terræ ſunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius terræ ad radium orbitæ Lunaris, hoc eſt, ut 1 ad 60 $\frac{1}{2}$.

(x) * *Summa virium* eſt ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 ſivè ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis poſitionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol verſatur in horizonte & maximè elevatur ubi Sol in vertice loci verſatur. Depreſſio autem & elevatio aquarum magis ac magis decreſcit quò altiùs Sol aſcendit ſuprà horizontem, aut à vertice deſcendit. Prætereà hæc depreſſio aut elevatio circa initium & finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; ſed hæc contingent ſucceſſiva aquarum incrementa & decrementa, ſi vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc eſt, per per ſinum verſum 180°. ſeù duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, in aliis autem Solis poſitionibus vis eadem exhibeatur per ſinus verſos altitudinum duplicatarum; Quarè in variis Solis poſitionibus, vis ad marè attollendum ſumi poteſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, ſeclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis à tellure diſtantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad terram accedit aut longiùs ab eâ recedit, idque in ratione triplicatâ diſtantiarum inversâ (cor. 14. prop. 66. lib. 1.) conſiderari itaquè poterit, vis Solis ad mare attollendum ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem loci directè & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inverse. Cæterùm tota hæc propoſitio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Diſſertationibus quæ Tom. 3°. adjectæ ſunt.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ à diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſurâ pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. XIX; vis ſolaris de quâ egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1. ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole, menſurâ tantùm pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

(c) Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differen-

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum obſervationibus & nuperrimè inſtitutis gradûs meridiani menſuris ſub circulo polari, terra altior eſt ſub æquatore quam ex Theoriâ Newtonianâ prodiit (prop. 19. lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc corollario definita. Obſervandum autem eſt corollarium illud rigoroſè verum non eſſe; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris & axis terræ per ſimplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen caſus eſt longè diverſus, primus ſiquidem pendet à quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex cor. 2. prop. 90. lib. 1. & not. 106. lib. hujus). Sed quam parùm à veritate diſcrepet præſens corollarium apparet ex computo inito in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurin prop. 5. 121.

(c) * *Vis Lunæ ad Mare movendum.* Vid. cap. 6. num. 10. in Diſſertatione Clariſſ. Bernoullii & prop. 9. in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurini.

DE MUNDI SYSTEMATE. rentiâ oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter à terrâ diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi* ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

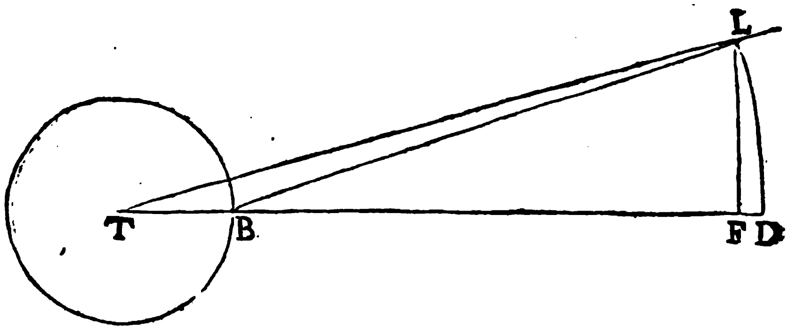
Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii à ſyzygiis ut dictum fuit, ſeu proximè ſequuntur tertium lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi luna diſtat à ſole vel ab oppoſitione ſolis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maxime vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi ſol diſtat à ſolſtitiis decimâ circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu lunæ ad meridianum loci, ubi luna diſtat à ſole decimâ circiter parte motus totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantiâ illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et (d) vis ſolis in hâc diſtantiâ lunæ à ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum

121. (d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm à verò differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

motum maris à vi lunæ oriundum, quam in ipſis ſyzygiis & quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ ſeu anguli graduum 37, hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione ſinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis lunæ in his quadraturis eſt tantùm 0,8570327 L. Eſt igitur L+0,7986355S ad 0,8570327L−0,7986355S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo lunâ ſine eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia



(e) 122 * *In duplicatâ ratione.* Sit TBD planum æquatoris, T centrum telluris, ſitque Luna in L, erit angulus LBD, menſura declinationis ab æquatore, ſeu, ob exiguum angulum TLB, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo LTD, cujus anguli coſinus eſt TF, ſumpto TL, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit à centro T, ubi Luna verſatur in plano æquatoris in D, eſt ad vim quæ eandem aquam directè à centro trahit, ubi Lunæ eſt in L, ut TL ad TF, hoc eſt, ut radius ad ſinum complementi declinationis LTD, ſepoſitâ vi aquæ centripetâ verſus T. Sed, auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam à centro trahens; Quarè, componendo, vis Lunæ in loco D, eſt ad vim ejus in L, ut quadratum ſinûs totiùs TL, ad quadratum ſinûs complementi TF, declinationis Lunæ LTD. 122.

(f) * *Prætereà diametri orbis.* (Prop. 28. Lib. hujus).

DE MUNDI SYSTEMATE.

tia lunæ à terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inverſè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. (h) Unde fit 1,017522L + 0,7986355 S ad 0,9830427×0,8570327L−0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eâdem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut (i) plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonagin-

122. (g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. 66. Lib. 1.).

(h) * *Undè fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi poſſit ducenda ſunt media & extrema, hæcque orietur æquatio 1.017522 L × 5 + 0.7986355 S × 5 = 0.9830427 × 9 × 0.857032 L − 0.7986355 S × 9; & tranſponendo hæc habetur proportio S : L = 0.9830427 × 0.8570327 × 9 − .017522 × 5 : 0.7986355 × 5 + 0.7986355 × 9. Jam verò ſumptis horumce numerorum Logarithmis, & quæſitis reſpondentibus numeris in vulgaribus Logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproximè.

(i) * *Ut plenus ſit æſtus.* (109).

naginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quam in zonis temperatis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolitò majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. (k) In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Co-

(k) * *In æſtu ſolo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare ſufficiunt, ſed alios effectus ſenſibiles producere non poſſunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratiſſimâ librâ comparatum ſentiri vix poteſt, vis autem Solaris eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, ſummaque virium Solis & Lunæ eſt ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas licet conjunctas multò minores eſſe quam ut pondus corporis cujuſvis in Librâ appenſi ſenſibiliter augere vel minuere poſſint. Unde nec in experimentis pendulorum, *Baro-*

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXIV. lib. 1.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4.4815 ad 1 directè, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inversè: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint $31'. 16''\frac{1}{2}$ & $32'. 12''$) ut 4891 ad 1000. (l) Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11- ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et (m) gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. (n) Et diſtantia centri lunæ à centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

(o) *Corol* 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ à centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſupe-

122. Barometrorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis ſenſibiles edent effectus. Idem corollarium eleganter demonſtravit Clariſſ. Eulerus num. 30. Diſſertationis de fluxu & refluxu maris.

(l) * *Denſitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. 8. Lib. hujus).

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix eſt ut maſſa directè & quadratum diſtantiæ à centro, hoc eſt, ſemidiametri inversè (cor. 1. prop. 75. lib. 1.). Ideòque gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ eſt ad gravitatem acceleratricem in ſuperficie terræ ut 1 × 13324 ad 39.788×1000, hoc eſt, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et diſtantia centri Lunæ.* (61. Lib. 1.).

(o) * *Coroll.* 7. Computum eodem planè modo initur ac in prop. 4. lib. hujus.

ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{5}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ à centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 à centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſupra oſtenſum eſt ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam medio-

Liber Tertius. Prop. XXXVII. Prob. XVIII.

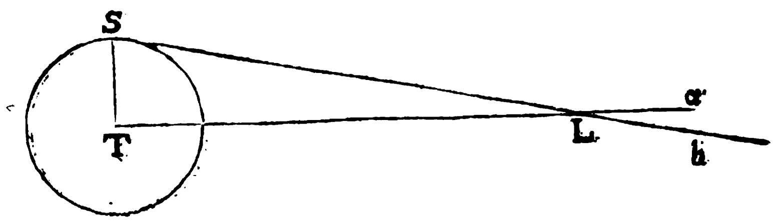
DE MUNDI SYSTEMATE.

mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte ſemidiametri. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis lunæ (p) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt $57'.20''$, $57'.16''$, $57'.14''$, $57'.12''$, $57'.10''$, $57'.8''$, $57'.4''$ reſpectivè.

In



123. (p) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diverſis latitudinibus ſeu diſtantiis ab æquatore determinari poteſt. Parallaxis Lunæ horizontalis eſt differentia locorum in quibus Luna in horizonte poſita, ex centro & ſuperficie terræ obſervata inter ſtellas fixas conſpicitur. Hæc autem locorum diſtantia æqualis eſt angulo ſub quo videretur ſemidiameter terræ ex loco Lunæ obſervata. Sit Luna in horizonte conſtituta in L; obſervator in ſuperficiei terreſtris loco S, Lunam inter ſtellas referet in b, ſed idem obſervator in centro terræ T poſitus Lunam referet in a. Eſt igitur differentia locorum æqualis a L b, qui æquatur angulo S L T, ſub quo ſemidiameter terræ è loco Lunæ L ſpectatur. Sed quoniam terra eſt figuræ ſphæroidicæ, ſemidiametri ejus in diverſis latitudinibus inter ſe differunt & eſt ſemidiameter maxima ſecundum æquatorem ad minimam ſecundum polos, ſive in latitudine 90° ut 19658600 ad 19573000 circiter, eſtque earum differentia 85472 (prop. 19 lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam eſt ad differentiam priorem in ratione duplicatâ ſinûs totius ad ſinum cujuſvis latitudinis quamproximè (prop. 20. lib. huj.) hinc in ſyzigiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc eſt, ubi diſtantia centrorum Lunæ & terræ eſt ſemidiametrorum maximarum terræ 59. 366 circiter (cor. 8.) ſub æquatore invenitur dicendo, ut eſt diſtantia Lunæ à terrâ LS = 59. 366, ad ſemidiametrum maximam TS = 1, ità ſinus totus ad ſinum anguli TLS, qui eſt $57'\ 20''$. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem ferè ratione ac

ſemi-

In his computationibus attractionem magneticam terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus ſolis & lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

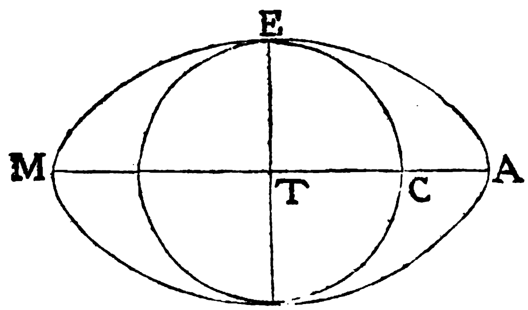
PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

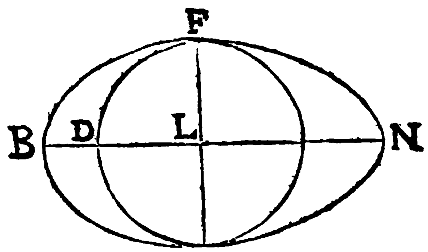
Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum eſſet ad vim lunæ, quâ mare noſtrum in partibus & ſub lunâ & lunæ oppoſitis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, &

ſemidiametri terræ, & hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales à Newtono determinantur.

(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de fluxu & refluxu maris plurima hic potuiſſemus adjungere quorum ope calculos accuratiùs repetere licuiſſet. Verùm materiam exhauriunt elegantiſſimæ diſſertationes quas tom. 3. addidimus. 1236



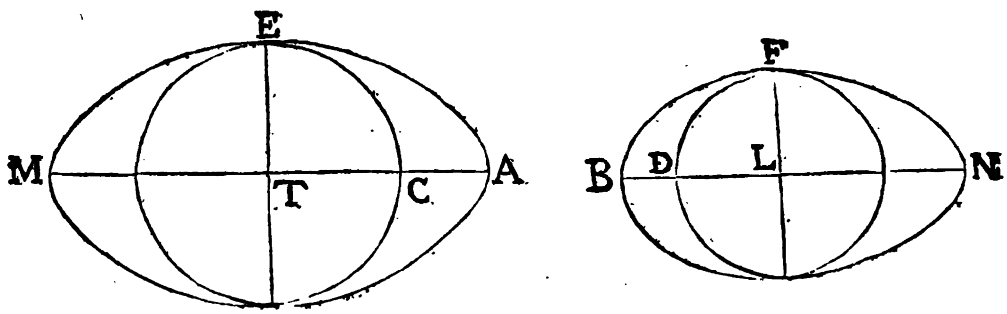


(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus terræ fluido ſatis profundo EA, coopertus, ſitque L, globus Lunæ coopertus fluido FB. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis eſſet gravitati acceleratrici Lunæ in terram, hoc eſt ſi æqualis eſſet materiæ quantitas in Lunâ & in Terrâ, globi duo T, L, ſeſe componerent in figuras ſphæroidicas ſimiles quarum axes MA, BN, jacerent in directum

De Mundi Syſtemate.

& diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim; id eſt, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1081 ad 100. Unde cum mare noſtrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de cauſâ figura lunæ ſphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Co-



123. (106). Cum enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipſam molem, nulla eſt ratio cur figuræ illæ non ſint inter ſe ſimiles, alteraque in acutiorem ſphæroidem deſinat. Quare in caſu præſenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, & viciſſim B D ad A C ſicut L F ad T E, hoc eſt, ſi æqualis eſſet gravitas acceleratrix terræ in Lunam atque Lunæ in terram, altitudo fluidi Lunaris in partibus proximis & remotiſſimis ſuprà globum Lunæ, eſſet ad altitudinem fluidi terreſtris analogam ſuprà globum terræ ut diameter Lunæ ad diametrum terræ. Rursùs, ſi terra & Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi ſuprà globos ut gravitates acceleratrices reſpectivè (prop. 74. lib. 1.). Quarè ſi neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis ſit gravitati acceleratrici Lunæ in terram, nec diameter Lunæ diametro terræ æqualis, vis terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis & ultimis erit ad vim ipſam Lunæ quâ mare noſtrum in partibus & ſub Lunâ & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim, ſive ut maſſa Lunæ quæ gravitati acceleratrici eſt proportionalis ad maſſam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici eſt proportionalis & ut diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in diſſertationibus de fluxu & refluxu maris.

Corol. ([f]) Inde vero fit ut eadem ſemper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ: adeò ut facies illa, quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. XVII allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

(f) * *Indè verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem ſemper Lunæ facies in terram obvertatur. Poſitâ autem Sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, niſi Sphærois Lunæ axem ſuum telluri obvertat (109); quare in alio ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium in minimo ſcilicet axis majoris ſuprà minorem exceſſu, eſſent longè tardiſſimæ adeò ut non turbetur Lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in prop. 17.) facies illa quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.

124. Clariſſ. D. De Mairan in elegantiſſimâ diſſertatione de motu diurno telluris circa axem quæ legitur in monum. Pariſ. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout ſemper facit, cur eadem Lunæ facies in terram continuò obvertatur, variaſque explicat inæqualitates librationis Lunaris in longitudinem. Conjecturam facit Vir Doctiſſimus homogeneam non eſſe Lunæ materiam ſed hemiſpherium inferius ſuperiori gravius ſupponit; quo poſito facile demonſtrat Lunam reſpectu telluris in ſitu conſtanti manere. Obſervat deindè fieri non poſſe ut conſtans maneat Lunæ poſitio, niſi conſtans quoque ſit velocitas fluidi in quo Lunam ipſam deferri aſſumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ vel excentricâ qualis eſt orbita Lunæ, variabiles ſunt hujuſce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem ſitu conſiſtere non poteſt, ſed oſcillationes quaſdam in longitudinem patitur, ex quibus fiet ut modo nobis detegatur aliqua pars hemiſpherii quod occultum eſſe ſolet, modo autem nobis abſcondatur aliqua pars hemiſpherii quod ſolet eſſe conſpicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur Lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab Aſtronomis obſervatur quam ex prop. 17. lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem noſtram & Newtonianum ſyſtema accommodabitur, ſi vorticum loco ſubſtituatur attractio, quemadmodum à Clariſſ. Daniele Bernouillio factum eſt, cujus eximiam Diſſertationem de fluxu & refluxu maris cap. 3. conſulat Lector. 124.

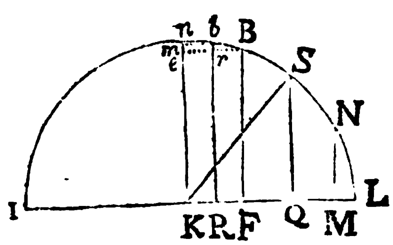
De Mundi Syſtemate.

LEMMA I.

Si APEPp *terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & ſi centro* C *radio* CP *deſcribi intelligatur ſphæra* Pape; *ſit autem* QR *planum, cui recta à centro ſolis ad centrum terræ ducta normaliter inſiſtit; & terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ ſphæra modo deſcriptâ altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia à plano: Dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad terram conſimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iſte circularis circum axem, in communi ſectione æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

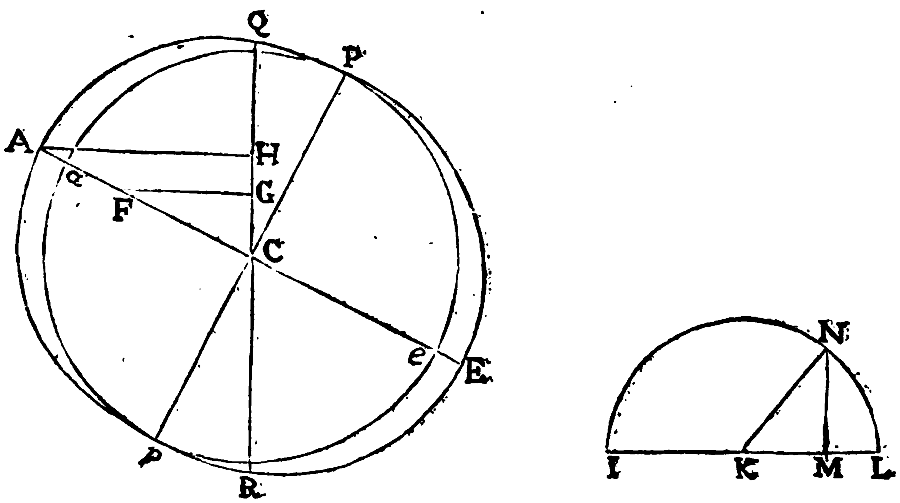
Nam centro *K* diametro *IL* deſcribatur ſemicirculus *INL*. Dividi intelligatur ſemicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & à partibus ſingulis *N* ad diametrum *IL* demittantur ſinus *NM*. Et (t) ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus

125. (t) 125. * *Et ſumma quadratorum.* Diviſa intelligatur ſemi-circumferentia INL, in particulas æquales innumeras nb, NL, NS, bB &c. erectiſque ſinibus bR, NM, &c. erit ſinus bm, ſeu KR, æqualis ſinui NM, & ità de cæteris (prop. 26. lib. 3. elem.). Quarè ſinus omnes ut KR, KF, æquales erunt ſinibus ut NM, SQ, ac proindè ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus NM, æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus omnibus KM. Præterea quadratum ſemi-diametri KN, æquale eſt quadratis ſinuum KM, MN. Quarè (ob ſummam quadratorum KM,



æqua-

bus NM æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus KM, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris KN; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus NM erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN.

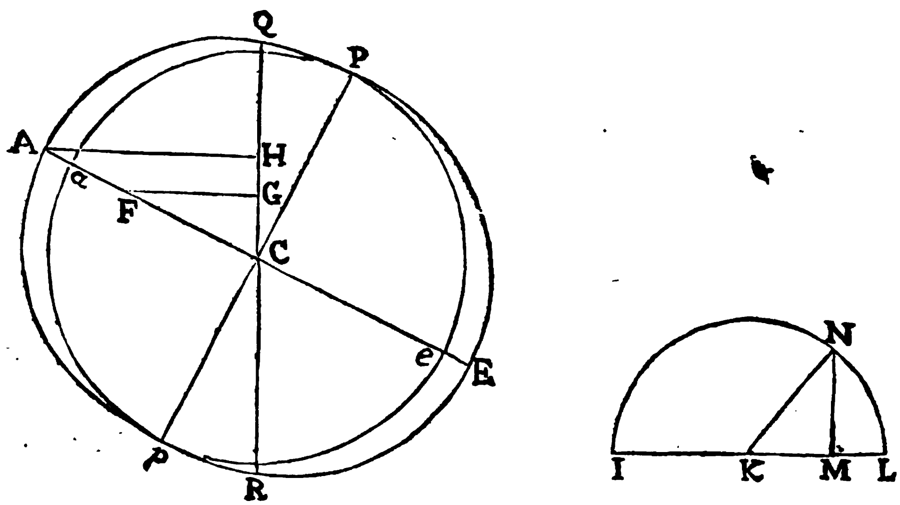


Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG (u) erit efficacia particulæ F ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$,

æqualem ſummæ quadratorum N M, ſumma quadratorum ex omnibus ſemidiametris K N, dupla eſt ſummæ quadratorum ex omnibus ſinibus N M, ideòque ſumma quadratorum ex omnibus N M, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris K N. 1 25

(u) * *Erit efficacia.* (47. *lib.* 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE. HC, (x) hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt (per (y) jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*



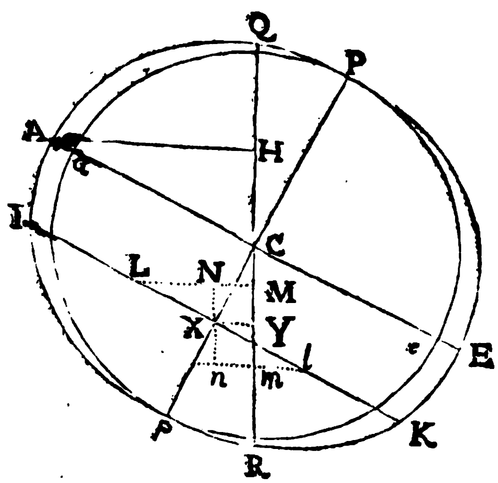
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: cædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano æquatoris jacentem.

125. (x) * *Hoc eſt*, ob triangula ACH, FCG, ſimilia. (y) * *Per jam demonſtrata.* (150.)

L E M-

LEMMA II.

Iiſdem poſitis: dico ſecundò quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique ſitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, ſit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE *uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, ad terram conſimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*



Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, ſintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* ſitæ. Et ſi in planum *QR*, (z) quod radio in ſolem ducto perpendiculare eſt, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, (a) proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. I.).

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypotheſ. ejuſdem Lem.). 125.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Sit autem recta Ll plano $Pape$ parellela & biſecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parellela ſit plano QR & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. (b) Et particularum L & l vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$; ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & (c) $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu (d) $2LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2AH \times HC$, (e) ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2XY \times CY$ ad particularum earumdem in A conſiſtentium vim $2AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2CXq$ ad ACq.

Jam

225. (b) * *Et particularum* L *&* l. (Ex Dem. in Lem. præced.).

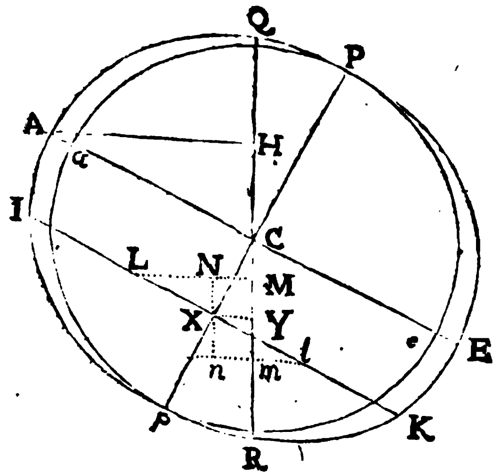
(c) * *Et* $LN \times mC - NM \times mC$. Nam ob ſimilitudinem triangulorum $LN : NM = ln : nm$, ſed eſt $NM = nm$; quare $LN = ln$, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ & ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu* $2LN \times NX$. Nam, ob ſimilitudinem triangulorum, eſt $NX = nX$, ideóque Nn ſeu $Mm = 2NX$, ac proinde $LN \times Mm = 2LN \times NX$.

(e) * *Ut* LXq *ad* ACq. Eſt enim $LN : AH = LX : AC$ & $NX : HC = LX : AC$, ideóque per compoſitionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem nega-

Jam verò ſi ſphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem IK; (f) materia in perimetro circuli cujuſque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2CXq$. Et vis materiæ ejuſdem, ſi in circuli AE perimetro conſiſteret, eſſet ut IXq in ACq. Et propterea vis particu-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROB. XIX.



larum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium conſiſtentis, eſt ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE conſiſtentis, ut omnia IXq in $IXq - 2CXq$ ad totidem IXq in ACq, (g) hoc eſt, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id eſt, ut omnia $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ ad

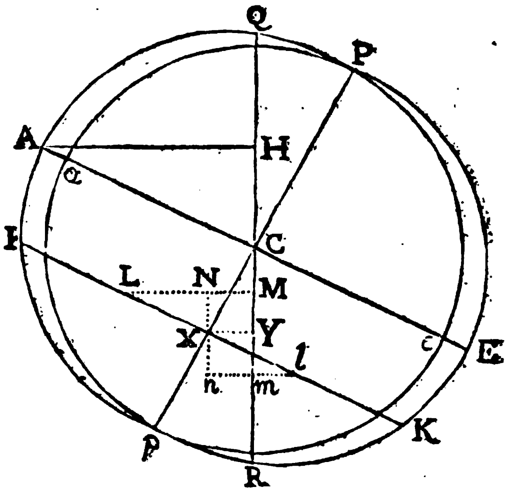
negativam eſſe ad vim particularum earumdem in A conſiſtentium ut C X q ad A Cq.

(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ ſphæricæ ſimiles ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc eſt, ut omnia* &c. Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit $IX^2 = CI^2 - CX^2$, ſed eſt $CI = AC$, quare $IX^2 = AC^2 - CX^2$, ac proinde IXq in $(IXq - 2CXq) = ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$. 125.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio eſt $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio eſt $ACqq - ACq \times CXq$; ac (h) proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times$



$CX - \frac{4}{3}ACq \times CX$ *cub.* $+ \frac{3}{5}CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}ACq \times CX$ *cub.* id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}ACqc$ ad $\frac{2}{3}ACqc$. hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

LEM.

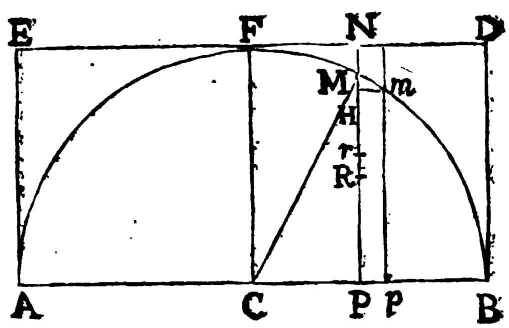
225. (h) * *At proindè per methodum fluxionum.* Quantitates $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ & $ACqq - ACq \times CXq$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ CX, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $ACqq \times CX - \frac{4}{3}ACq \times CX$ cub. $+ \frac{3}{5}CXq$ cub. fluens autem poſterioris quantitatis fiet $ACqq \times CX - \frac{1}{3}ACq \times CX$ cub. & ut habeatur efficacia tota, pro CX ſcribatur Cp vel AC, erit fluens prior ad poſteriorem ut $\frac{4}{15}ACq$. cub. ad $\frac{2}{3}ACq$. cub.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

(ſ) LEMMA III.

Eiſdem poſitis: dico tertiò quod motus terræ totius circum axem jam ante deſcriptum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque ad duo quadrata ex diametro; id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.

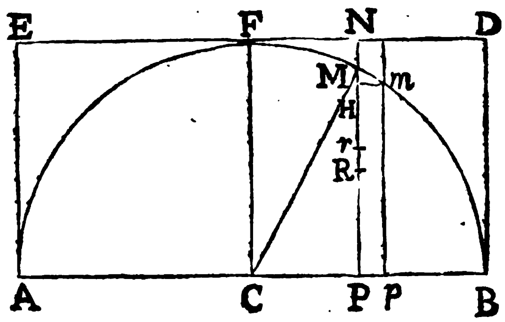
Eſt enim motus cylindri circum axem ſuum immotum revolventis ad motum ſphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet



(ſ) 126. * *Lemma* demonſtratur. Revolutione ſemicirculi AFB, & rectanguli eidem circumſcripti AEDB, deſcribantur ſphæra & cylindrus circumſcriptus. Sit radius CB $= 1$, peripheria circuli hoc radio deſcripti $= n$, abſciſſa CP $= x$, ordinata PM $= y$, quælibet ipſius pars PR $= v$, Rr $= dv$; peripheria circuli radio PR, deſcripti $= nv$, annulus circularis ex revolutione lineolæ Rr $= nvdv$, velocitas puncti R $= v$, motus annuli prædicti $= nv^2dv$, motus totius circuli radio PR, deſcripti $= \frac{1}{3}nv^3$, motus circuli radio PM, deſcripti $= \frac{1}{3}ny^3$, motus circuli radi PN deſcripti $= \frac{1}{3}n$, motus cylindri totius $= \frac{2}{3}n$. 126

Sit Pp $= dx$ motus annuli ſolidi revolutione figuræ PMmp deſcripti $= \frac{1}{3}ny^3dx = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}nx^2dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}}$. Undè motus ſolidi revolutione figuræ CFMP, deſcripti $= \frac{1}{4}n \int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$

libet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum



$+\frac{1}{12}nx(1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}n \times CFMB = \frac{1}{32}nn$, adeóque motus ſphæræ totiùs $= \frac{1}{16}nn$. Eſt igitur motus cylindri ad motum ſphæræ ut $\frac{2}{3}n$ ad $16nn$, ſeu ut 16 ad $\frac{3}{2}n$, hoc eſt, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis; nam quadratum diametri 2 eſt 4 & $4 \times 4 = 16$, circulus verò cujus diameter 2, &
126. peripheria n, eſt $\frac{1}{2}n$ & tres hujuſmodi circuli ſunt $\frac{3}{2}n$.

Materia annuli tenuiſſimi ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis ſit m, & velocitas erit ut CF, ſive ut 1, adeóque motus $= m$, & proinde motus cylindri ad motum annuli illius ut $\frac{2}{3}n$ ad m, ſive ut $2n$ ad $3m$, hoc eſt, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; baſis enim cylindri eſt circulus $\frac{1}{2}n$ & altitudo diameter $AB = 2$, ideóque cylindrus $= n$. Prædicti annuli materia ſit aan, ideóque motus ipſius circà axem cylindri $= aan$. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter AB; & particula materiæ annuli reſpondens arcui infiniteſimo M m, erit $a^2 \times$ M m & hujus motus $a^2y \times$ M m $= a^2dx$, ob proportionem M m : m H (dx) = C M (1) : P M (y). Quarè motus partis FM, annuli eſt a^2x, & factâ $x = 1$, motus quadrantis annuli $= a^2$ eſt motus totius annuli circà proprium axem $= 4a^2$. Eſt igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejuſdem motum circà axem proprium ut aan, ad $4aa$, ſeu ut n ad 4, hoc eſt, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri eſt ad motum ſphæræ

ut - - - - - 16 ad $\frac{3}{2}n$

motus annuli circà axem cylindri eſt ad motum cylindri ut m ad $\frac{2}{3}n$

& motus annuli circà axem proprium eſt ad ejus motum circà axem cylindri ut 4 ad - n.

Quarè, per compoſitionem rationum & ex æquo, motus ſphæræ circà axem proprium eſt ad motum annuli ut n^3 ad $64m$,

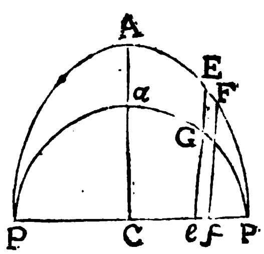
plum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.

H Y-

$64m$. Eſt autem n^3 ad $64m$ ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, ſed $\frac{2n}{3}$, eſt quantitas materiæ in terrâ; m, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^3}{16}$ eſt ſumma trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli A F B, & 8 eſt ſumma duorum quadratorum ex diametro AB. Quare motus terræ totius circum axem jam ante deſcriptum ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcumque ad duo quadrata ex diametro, id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000, poſitâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproxime. Q. E. D.

127. Lemma. Semiaxe majori C A & minori C P, deſcribatur ſemiellipſis PAp, atque radio C P, deſcribatur ſemicirculus P a p, circà axem P p revolvi concipiantur tum ſemicirculus tum ſemiellipſis, erit ſphæra motu ſemicirculi genita ad ſphæroidem ſemiellipſeos revolutione deſcriptam ut C a² ad C A². Sit p e $= x$ G e $= y$, C p $= r$, C A $= a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{py}{r}$, peripheria circuli radio G e deſcripti. Præterea (ex naturâ ellipſeos 248 lib. 1.) C a (r) : C A (a) = G e (y) : E e, ideoque E e $= \frac{ay}{r}$, hinc peripheria circuli radio E e deſcripti $= \frac{pay}{rr}$, ejuſdemque circuli area $= \frac{pa^2y^2}{2r^3}$; area autem circuli radio G e deſcripti eſt $\frac{py^2}{2r}$. Quare 127.
fluxio ſphæroidis ſit $\frac{pa^2y^2dx}{2r^3}$; & fluxio ſphæræ eſt $\frac{py^2dx}{2r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2rx - xx$; hinc fluxio ſphæroidis eſt $\frac{2pa^2rxdx - pa^2x^2dx}{2r^3}$; & fluxio ſphæræ $\frac{2prxdx - pxxdx}{2r}$, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{pa^2rx^2}{r^3} - \frac{pa^2x^3}{6r^3}$ ad $\frac{prx^2}{2r} - \frac{px^3}{6r}$. Jam loco x, ſubſtituatur $2r$, erit ſphærois tota, ad totam ſphæram ut $\frac{4pa^2r^3}{r^3} - \frac{8pa^2r^3}{6r^3}$ ad $\frac{2pr^3}{r} - \frac{8pr^3}{6r}$, hoc eſt, ut a^2, ad r^2,



ſive in ratione duplicatâ C A² ad C a². Simili argumento patet ſphæram ellipſeos ſemiaxe majori tanquam radio deſcriptam eſſe ad ellipſoidem in ratione duplicatâ ſemiaxis majoris ad minorem.

De Mundi Syſtemate.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terrâ omni reliquâ ſublatâ, ſolus in orbe terræ, motu annuo circa ſolem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materiâ rigidâ & firmâ conſtaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

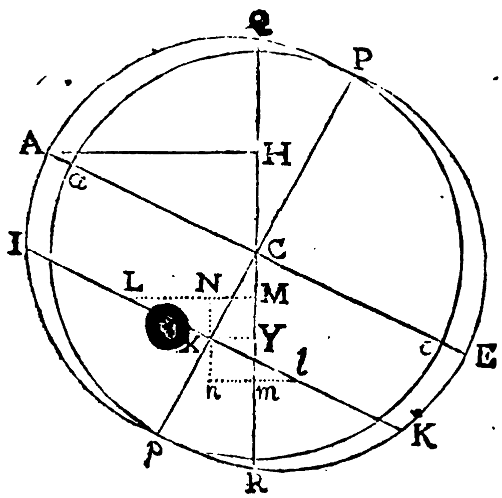
Invenire præceſſionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi ſunt in quadraturis, erat $16''. 35'''. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8''. 17'''. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto ſidereo $20^{gr}. 11'. 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46''$. in antecedentia; & ſi plures eſſent lunæ, motus nodorum cujuſque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) forent ut tempora periodica; ſi luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46''$ ut dies ſidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; ſive lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit terræ omni $PapAPepE$ quæ globo $Pape$ ſuperior eſt; & quoniam globus iſte ad terram illam ſuperiorem (k) ut aC *qu.* ad AC *qu.* $-aC$ *qu.* id eſt (cum terræ ſemidiameter minor PC vel aC ſit ad ſemidiametrum majorem AC ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte terram ſecundùm æquatorem cingeret & uterque ſimul

127. (k) * *Ut aCqu. ad ACqu — aCqu.* Globus iſte eſt ad terram totam ut aC^2, ad AC^2 (Lem. præc.) ideóque annulus materiæ inter globum & terram interceptus, hoc eſt, exceſſus materiæ in terrâ ſuprà materiam in globo eſt ut $ACqu. - aCqu.$

mul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223, ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum, quo ipſius nodi ſeu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui

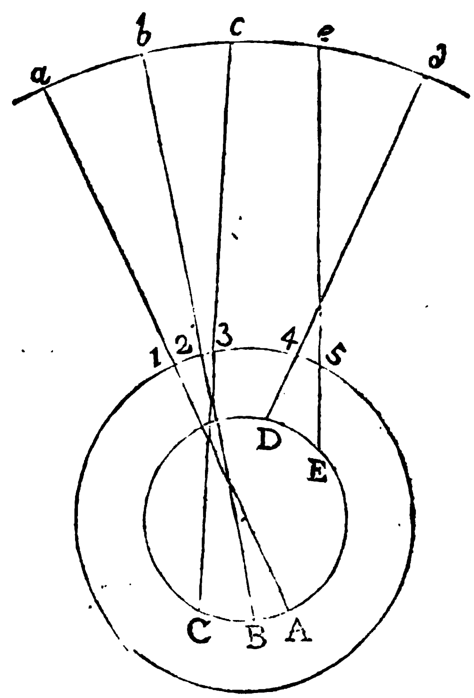


reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti ad motum 20gr. 11'. 46''., ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id eſt, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut ſupra explicui) atque (m) ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id eſt vires 3 *IT in fig. pag.* 411. & 413.) ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem in morem figuræ *Pap APepE* ad ſuperiorem

(l) * *Motus qui reſtabit in annulo.* (52. lib. 1.).

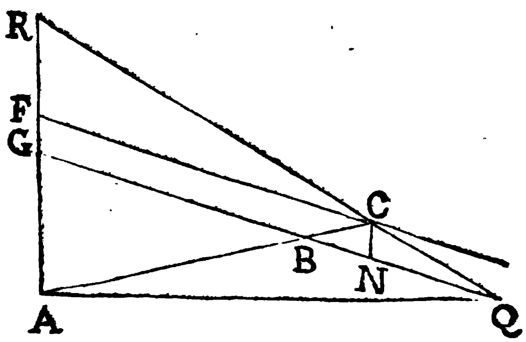
(m) * *Atquè ideò.* (vid. not. 101. lib. hujus).

DE MUNDI SYSTEMATE. in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conſpirante vel contrario nunc retrogradi ſunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa ſolem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta



128. Jam verò repræſentet 1, 2, 3 orbem planetæ ſuperioris, ſitque ABC, orbis terræ. Moveatur terrá ex A, per B, & C in D, planeta autem ſuperior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta ſecundum ordinem ſignorum progredi videbitur. At ſi terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in conſequentia, modò in antecedentia ferri videntur, neceſſum eſt ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipſo veluti motuum æquilibrio, neque in conſequentia neque in antecedentia ſenſibiliter pergant ſed quaſi ſtationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen poſſunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa è terrâ ſpectatus ob motum ſuum tardiorem apparet eſſe retrogradus; ſin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit ſaltem tardior. At ſi terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione



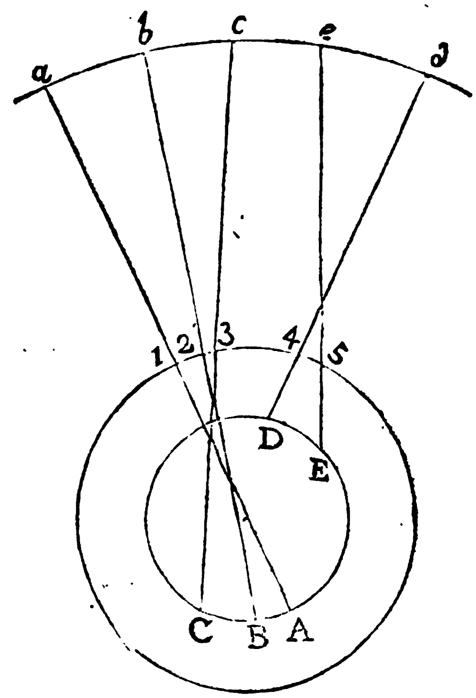
129. Lemma. Datis poſitione tribus rectis Q A, Q B, Q C, ex eodem puncto Q, ductis & in eodem plano jacentibus, ducere rectam A C, ex puncto quolibet A, ità ut partes A B, C B, ſint in datâ ratione m, ad n.

Ex A ducatur utcum que recta A R, rectis Q C, Q B, productis occurrens in G, R, capianturque G F, A G, in datâ ratione m ad n (prop. 12. lib. 6. elem.). Per F, agatur F C parallela rectæ G Q, ipſique Q R occurrens in C, erit juncta A C, recta quæſita. Nam ob parallelas F C, G Q, eſt A B : B C = A G : G F, ſed (per conſtr.) G F, A G, ſunt in datâ ratione m ad n. Quarè eandem inter ſe rationem habent partes interceptæ A B, B C.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo A Q G, datur latus A G, & præterea noti ſunt anguli A Q G, Q A G, ideóque dabitur A G, ac proinde innoteſcit etiam G F, datam habens rationem ad A G (per conſtr.) quare dabitur recta C N, æqualis & parallela rectæ G F. Rurſus in triangulo Q N C, cognitis angulo C Q N, & angulo C N Q, qui æqualis eſt angulo F G N, hoc eſt, anguli priùs inventi A G Q, complemento ad duos rectos, atque inſuper dato latere C N, innoteſcet C Q, tandem in triangulo A C Q, datis lateribus Q A, Q C, & angulo intercepto A Q C, invenientur latus C A atque anguli Q A C, C C A, id eſt, magnitudo & poſitio rectæ A C. 129.

DE MUNDI SYSTEMATE.

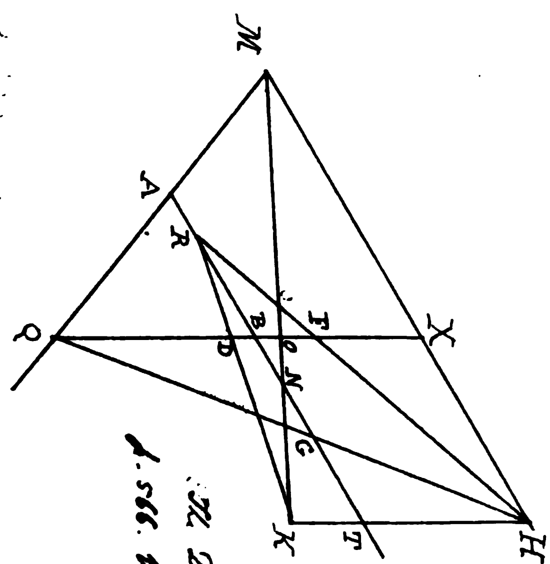
in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conſpirante vel contrario nunc retrogradi ſunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa ſolem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta

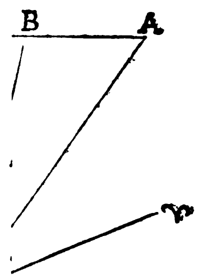


128. Jam verò repræſentet 1, 2, 3 orbem planetæ ſuperioris, ſitque ABC, orbis terræ. Moveatur terrá ex A, per B, & C in D, planeta autem ſuperior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta ſecundum ordinem ſignorum progredi videbitur. At ſi terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in conſequentia, modò in antecedentia ferri videntur, neceſſum eſt ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipſo veluti motuum æquilibrio, neque in conſequentia neque in antecedentia ſenſibiliter pergant ſed quaſi ſtationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen poſſunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

obſervata, ubi cometa videri deſinit. ([a]) Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quieſceret,

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.





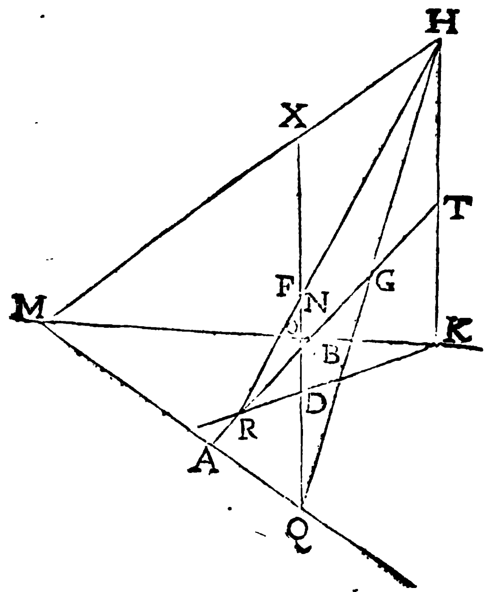
mi cum motu progredere-
cometæ tempore obſerva-
, qui longitudinum diffe-
otuum cometæ ac terræ.
. in contrarias partes mo-
c motum apparentem co-
metæ

gulo QHM, dato angulo HQM qui eſt ſumma vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis eſt angulo dato QAB, ſimulque noto latere QH, innoteſcent latera HM, QM. Simili pror-

do invenientur latera RK, HK, ngulo RKH. Igitur in triangulo , notis lateribus HM, HK, & anntercepto MHK, qui æqualis eſt o ABQ, innoteſcent anguli KM & baſis MK. Datis an- HMQ, HMK, dabitur ho- vel differentia QMK, hoc ciæ MK, ob rectam QM, . Simili modo rectæ QO, anguli quos MK cum his trigonometrice inveniuntur. ur recta ABC. (129). 130.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tione vel motu retrogrado diſtantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈*QA*, ♈*QB*, ♈*QC* obſervatæ tres longitudines cometæ ſub initio motus, ſitque ♈*QF* longitudo ultimò obſer-

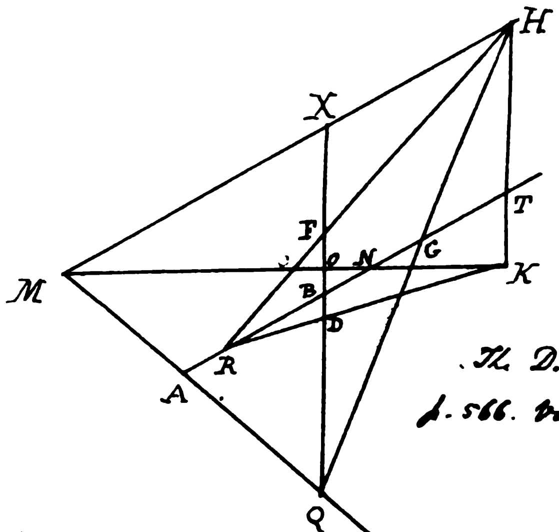


130. 130. Lemma. Datis poſitione quatuor rectis Q A, Q B, R B, R D, in eodem plano jacentibus ducere rectam M K, ità ut M O, ſit ad O N ut m ad n, & O N ad N K ut n ad r. Capiatur B G, ad B A, ſicut $n+r$ ad m. Item capiatur F B ad B D ut $m+n$ ad r. Junctæ rectæ Q G, R F, producantur donec concurrant. Per punctum concurſus H, ducatur H K parallela rectæ B D, itemque H M, parallela rectæ R B, erit M K recta quæſita. Nam propter parallelas H M, T N (per conſtr.) erit K N ad N M, ut K T ad T H. Sed quia H K parallela eſt rectæ F D, K T eſt ad T H ut D B ad B F, hoc eſt, (per conſtr.) ut r ad $m+n$, ac proindè K N eſt ad N M ut r ad $m+n$. Rurſus ob parallelas H K, O X, erit M O ad O K ut M X ad X H, ſed quia H M, parallela eſt rectæ A G, erit M X ad X H ut A B ad B G, id eſt, (per conſtr.) ut m ad $n+r$. Eſt igitur M O ad O K ut m ad $m+n+r$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ M O, O N, N K, ſunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus m, n, r. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum Q A, Q B, R B, R D, dantur interſectiones omnes ac proindè rectæ Q B, D B, R B, B A, R D, ſunt magnitudine datæ. Prætereà dantur etiam B F & B G, utpotè habentes datam rationem ad B D & R A. Jam verò in triangulo R B F, datis lateribus B R, B F, cum angulo intercepto R B F, dantur latus R F & angulus R F B ac proindè etiam datur angulus Q F H. Simi-

obſervata, ubi cometa videri deſinit. (a) Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur AC ad G, ut ſit AG ad AB ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur QG. Et ſi cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quieſceret,

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.





The Diagram for p. 566. Vol. 3. of Newton

otu progredere-
mpore obſerva-
itudinum diffe-
netæ ac terræ.
rias partes mo-
apparentem co-
metæ

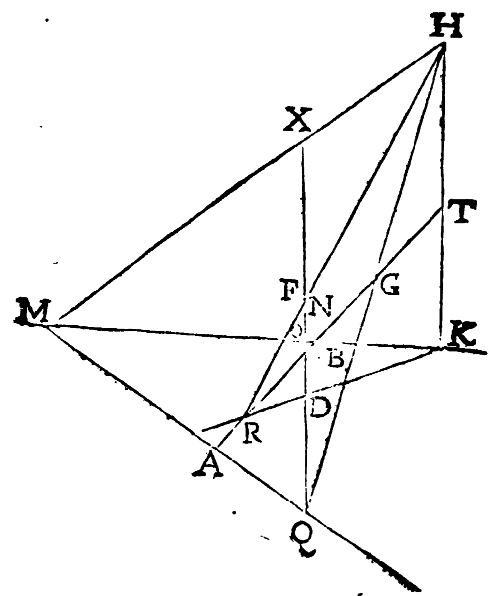
r latera RK, HK, 130
Igitur in triangulo
ous HM, HK, & an-

QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod eſt ſumma vel differentia rectarum datarum QB, QF innoteſcet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui eſt ſumma vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis eſt angulo dato QAB, ſimulque noto latere QH, innoteſcent latera HM, QM. Simili pror-

gulo [illegible] HK, qui æqualis eſt angulo dato ABQ, innoteſcent anguli HMK, HKM & baſis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum ſumma vel differentia QMK, hoc eſt, poſitio rectæ MK, ob rectam QM, poſitione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur.

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

tione vel motu retrogrado diſtantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈*QA*, ♈*QB*, ♈*QC* obſervatæ tres longitudines cometæ ſub initio motus, ſitque ♈*QF* longitudo ultimò obſer-

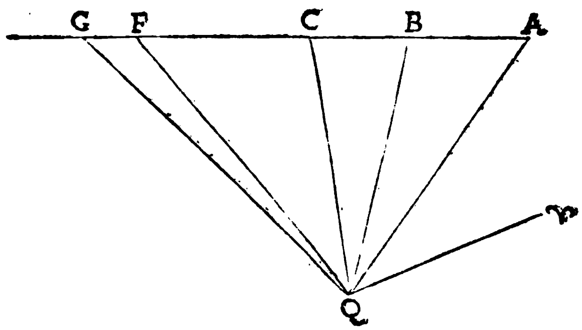


130. 130. Lemma. Datis poſitione quatuor rectis Q A, Q B, R B, R D, in eodem plano jacentibus ducere rectam M K, ità ut M O, ſit ad O N ut *m* ad *n*, & O N ad N K ut *n* ad *r*. Capiatur B G, ad B A, ſicut $n + r$ ad *m*. Item capiatur F B ad B D ut $m + n$ ad *r*. Junctæ rectæ Q G, R F, producantur donec concurrant. Per punctum concurſus H, ducatur H K parallela rectæ B D, itemque H M, parallela rectæ R B, erit M K recta quæſita. Nam propter parallelas H M, T N (per conſtr.) erit K N ad N M, ut K T ad T H. Sed quia H K parallela eſt rectæ F D, K T eſt ad T H ut D B ad B F, hoc eſt, (per conſtr.) ut *r* ad $m + n$, ac proinde K N eſt ad N M ut *r* ad $m + n$. Rurſus ob parallelas H K, O X, erit M O ad O K ut M X ad X H, ſed quia H M, parallela eſt rectæ A G, erit M X ad X H ut A B ad B G, id eſt, (per conſtr.) ut *m* ad $n + r$. Eſt igitur M O ad O K ut *m* ad $m + n + r$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ M O, O N, N K, ſunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus *m*, *n*, *r*. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum Q A, Q B, R B, R D, dantur interſectiones omnes ac proindè rectæ Q B, D B, R B, B A, R D, ſunt magnitudine datæ. Prætereà dantur etiam B F & B G, utpotè habentes datam rationem ad B D & R A. Jam verò in triangulo R B F, datis lateribus B R, B F, cum angulo intercepto R B F, dantur latus R F & angulus R F B ac proindè etiam datur angulus Q F H.

Simi-

obſervata, ubi cometa videri deſinit. (a) Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quieſceret,

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.



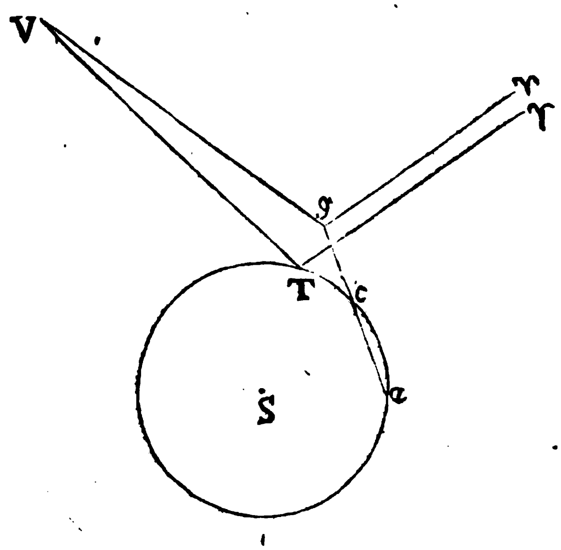
ceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & ſic motum apparentem cometæ

Similiter in triangulo QBG, datis lateribus QB, BG, & angulo QBG, dabitur angulus BQG; quare in triangulo QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod eſt ſumma vel differentia rectarum datarum QB, QF innoteſcet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui eſt ſumma vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis eſt angulo dato QAB, ſimulque noto latere QH, innoteſcent latera HM, QM. Simili prorſus modo invenientur latera RK, HK, in triangulo RKH. Igitur in triangulo MHK, notis lateribus HM, HK, & angulo intercepto MHK, qui æqualis eſt angulo dato ABQ, innoteſcent anguli HMK, HKM & baſis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum ſumma vel differentia QMK, hoc eſt, poſitio rectæ MK, ob rectam QM, poſitione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur. 130.

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

De Mundi Systemate.

metæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terrâ, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti (b) modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu terræ, & idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet S ſolem, acT orbem magnum, a locum terræ in obſervatione primâ, c locum

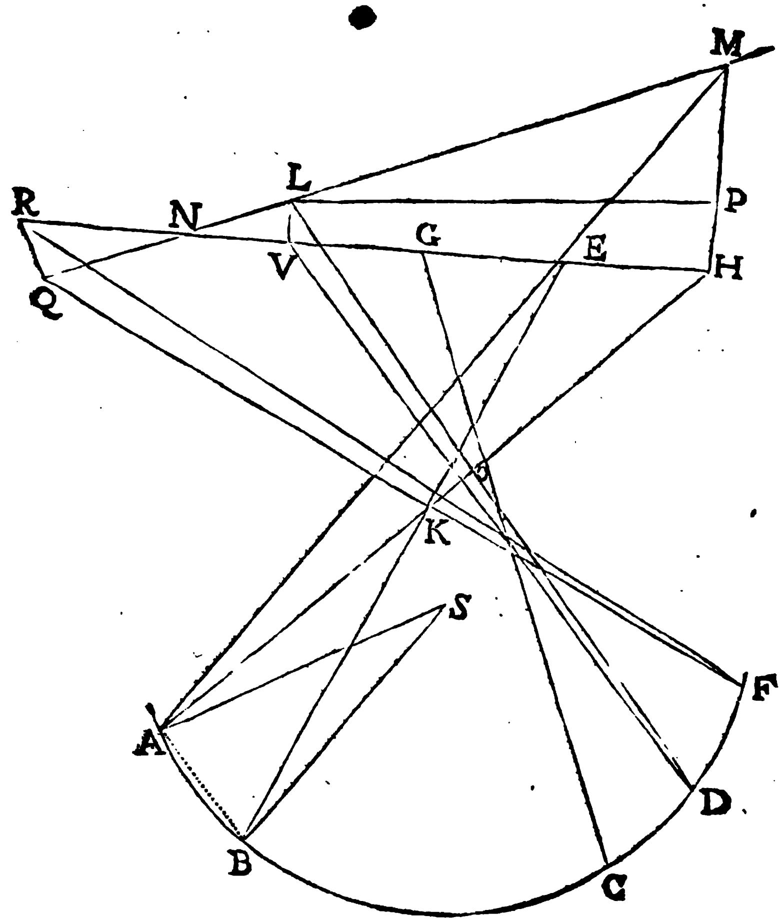


terræ in obſervatione tertiâ, T locum terræ in obſervatione ultimâ, & T♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈TV æqualis angulo ♈QF, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in T. Jungatur ac, & producatur ea ad g, ut ſit ag ad ac ut AG ad AC, & erit g locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur g♈ ipſi T♈ parallela, & capiatur angulus ♈gV angulo ♈QG

130. (b) * *Uti modò expoſui.* (128).

♈ QG æqualis, erit hic angulus ♈ ϱV æqualis longitudini cometæ è loco ϱ ſpectati; & angulus $TV\varrho$ parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco ϱ in locum T: ac proinde V locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic ([c]) autem locus V orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet. Idem

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.



(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta H V, referat veſtigium cometæ in plano Eccliptìcæ, ſintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano Eccliptìcæ præcedenti methodo inventa. Sit S, ſol, A B C D, orbis magnus, ſintque A, B, C, D, quatuor terræ loca ad tempora obſervationum nota. In triangulo A S B, dantur latera S A, S B, daturque angulus A S B; differentia ſcilicet locorum terræ è ſole viſorum; quarè dabuntur anguli S A B, S B A, notaque erit in partibus ſemidiametri orbis magni recta A B, chorda nempè arcûs à tellure interim percurſi. Rurſus in triangulo K A B, dantur omnes anguli, nam datur angulus K A B, qui eſt ſum- 131.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. ([d]) Pergunt hæc

132. ſumma vel differentia notorum angulorum S B A, S B K. Quarè datur ratio laterum A K, A B, ſed data eſt ratio rectarum S A, A B, dabitur itaque ratio S A ad K A. At (131.) nota eſt ratio inter K O & K H, innoteſcet igitur ratio inter S A & K H; Quarè datur A H, diſtantia cometæ à terrâ in partibus ſemidiametri orbis magni. Simili planè modo invenientur aliorum locorum diſtantiæ à terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi cometa videri deſinit, ex datis obſervationibus inito computo per methodum expoſitam, orbe Jovis inferior eſſe ſolet.

132. Cometæ veſtigium in plano Eclipticæ jam determinavimus, ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum Eccliplicæ erecta intelligatur normalis H M, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum obſervationis tempus poſito A H, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; Eſt enim poſitio rectæ A H, ejus longitudo & angulus M A H, latitudo. Similiter in loco V, ad idem Eccliplicæ planum erigatur normalis V L, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus obſervatæ, ſumpto D V, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta L M, eſt ipſa trajectoria quæſita. Patet autem diſtantiam loci M, ab A, ſivè rectam A M, eſſe ad rectam A H, ut ſecans latitudinis in H, ad radium, & ità porrò de aliis cometæ locis.

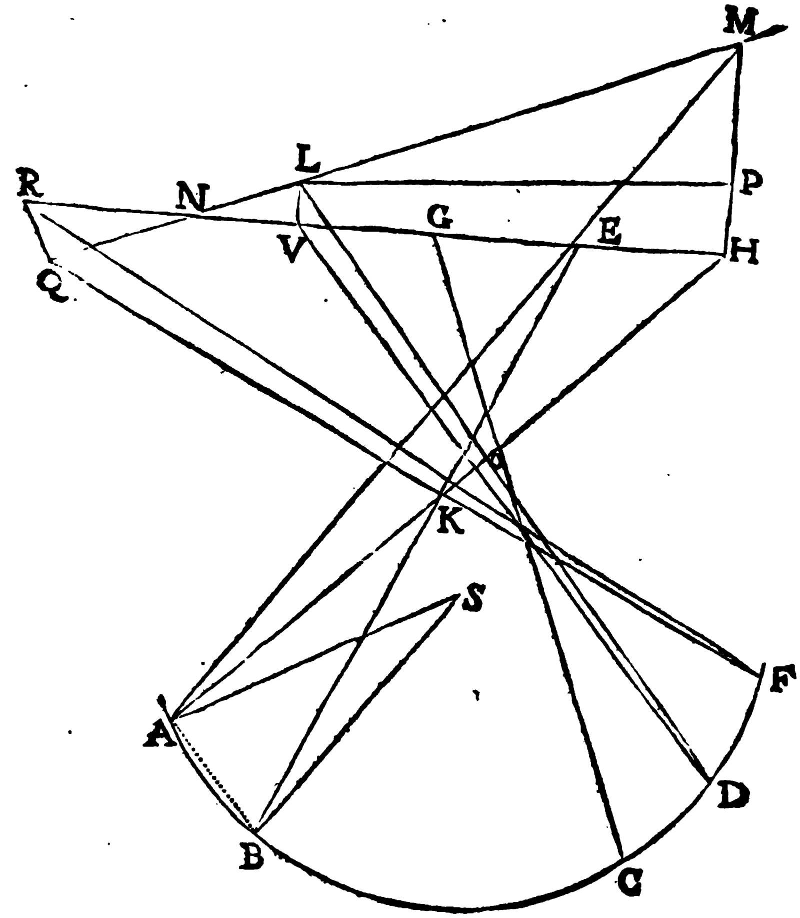
133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur L M, recta ſcilicet percurſa à cometa, dum tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim L P ipſi V H parallela cum rectâ M E concurrens in P. In triangulo P L M, præter angulum rectum in P, datur latus L P, æquale lateri V H, atque etiam datur latus P M, æquale differentiæ rectarum datarum M H, L V, quarè dabitur L M. Producatur M L, donec cum H V, concurrat in N, erit N nodus. Præterea N V erit ad V L, ut V H ad P M, itemque L N ad L V ut L M ad M P, & ideò dabuntur L N, L V, capiatur tempus quod ſit ad tempus inter obſervationem in M, & obſervationem in L, ut N L ad L M, habebitur tempus inter obſervationem in L, & appulſum cometæ ad nodum, cum enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri ſupponatur, tempora ſunt ut ſpatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo verſantis, cum enim detur punctum N, & propter tempus cognitum inter obſervationem in L, & appulſum cometæ ad nodum, detur quoque locus terræ pro hoc momento, dabitur poſitio rectæ hæc puncta jungentis, hoc eſt longitudo cometæ in nodo exiſtentis. Tandem ob datam diſtantiam nodi à loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo ſphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum ac proinde innoteſcit inclinatio hypothenuſæ, id eſt, ſemitæ ipſius cometæ ad Eccliplicam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propoſitum definiri poſſint locus cometæ è terrâ viſus, illiuſque diſtantia à terrâ. Determinentur ut ſuprà veſtigium orbitæ in plano Eccliplicæ H E V R, ipſaque vera cometæ orbita M L N Q. Capiatur H R ad H V, ut ſpatium inter obſervationem primam tempuſque datum ad ſpatium inter obſervationem primam & quartam. Dato terræ loco ad tempus propoſitum, putà F, datus poſitio rectæ F R, ac proindè datur longitudo cometæ quæſita (132). Præterea fiat R Q ad R N, ſicut M H ad H N, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri poteſt diſtantia cometæ à terrâ (ibid.) in hâc ergò hypotheſi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari poſſunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re conſulat Lector opuſculum Clariſſ. Viri Dominici Caſſini de cometâ an 1664, Davidis Gregorii Aſtronomiam Phyſicam & Caſſini filii Theoriam cometarum in monumentis Pariſ. an. 1727.

(d) * *Pergunt hæc corpora.* Eſt & alia parallaxis proveniens ex motu terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum reſpicit, hoc eſt, diſtantiam eorum ab Eccliplicâ verſus Boream aut auſtrum, unde fit ut cometæ in ſphærâ fixarum à curſu cir-

haec corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.



circulari deflectere & lineam admodum irregularem videantur deſcribere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano Eccliptic in quo terra fertur, non coincidat, cometa modò ſuprà Eccliptìcam in Septentrionem aſcendit, modò infrà Eccliptìcam in auſtrum deſcendit. Quia tamen in eodem plano ſemper incedit, orbem circularem, tellure quieſcente, videretur deſcribere, ſed quoniam tellus ipſa movetur in plano Eclipticæ, cometa pro diverſis terræ locis obſervatus, modò versùs Boream altius aſcendere, modò versùs auſtrum inferius deſcendere apparebit. Obſervationibus compertum eſt cometas propèmodum in 1346

DE MUNDI SYSTEMATE. totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra jovem. Unde conſequens eſt quod in perigæis & periheliis, ubi propiùs adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à ſole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum

135. circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine curſûs deflectere ſolent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipſâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quarè deinceps trademus normam computi quo Newtonus diſparentes cometas ſatis longè infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis & inferiorum planetarum deſcenderunt.

(e) 135. (*) *Ex Luce capitum.* Intelligantur duæ ſuperficies ſphæricæ concentricæ, minor una, major altera, & in centro utriuſque conſtitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios ſuos per omnem circuitum diffundit, evidens eſt eandem radiorum quantitatem in concavâ ſuperficie utriuſque ſphæræ contineri, ideóque denſitates radiorum erunt in ratione ſuperficierum ſphæricarum inversè, hoc eſt, in ratione duplicatâ ſemidiametrorum ſive diſtantiarum à corpore lucido inversè (14. lib. 1.). Quarè nullâ diſtantiarum habitâ ratione, ſenſatio quæ à radiis nervos opticos percutientibus excitatur, eſt ut quadratum diſtantiæ inversè. Sed quò remotius eſt lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione diſtantiarum (loco ſuprà cit.) hoc eſt, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quarè, componendo, corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in ratione quadruplicatâ diſtantiæ. Erit itaque quadratum diſtantiæ cometæ à ſole ad quadratum diſtantiæ planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Undè diſtantia cometæ à Sole eſt ad diſtantiam planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione ſubduplicatâ Lucis planetæ ad Lucem cometæ.

cum ſexdecim pedum à *Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis ſuperabat caput cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus ſaturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia cometæ ad diſtantiam ſaturni ut 1 ad √4 inversè, & 12″ ad 30″ directè, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus cometa anni 1665 menſe aprili, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſuâ pene fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum ſaturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter capillitii cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimùm ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raró conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt, quod cometæ omnes in periheliis vel infrà Saturnum collocandi ſint, vel non longè ſuprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quam planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur à ſtellis fixis.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem cometarum per fumum illum maximè copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtusè ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tantò propius

DE MUNDI SYSTEMATE.

pius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexæ planetas æmuletur. Inde veriſimile fit cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia cometarum, ne fumus à capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, (g) Jovem ipſum ſplendore ſuo multùm ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à ſole, ideoque erit ſoli multò propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem

835. (f) * *Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi*, ut poſteà probabitur.

(g) * *Jovem ipſum ſplendore ſuo.* Id variis obſervationibus confirmat Newtonus in opuſculo de mundi ſyſtemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. & 15. ſtilo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat & Luci multorum Jovium per tantum ſpatium diffuſæ àc dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut obſervabat *Flamſtedius*, cedebat Jovi, adeóque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17ª menſis hujus, ubi terræ propior erat, apparuit Caſſino per teleſcopium Ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8ª. menſis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem & latam & quaſi ex corpore ſolis jamjam orituri exeuntem, ad inſtar nubis inſolito more fulgentis, nec priùs diſparentem quam ſol ipſe inciperet ſuprà horizontem conſpici. Superabat igitur hic ſplendor Lucem nubium uſque ad ortum ſolis, & immediato ſolis ſplendori ſolum cedendo vincebat longe lucem omnium ſtellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipſa Luna in tantâ ſolis orientis vicinitate cerni ſolet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari & in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari & ſplendore longè fortiori jam reddita magis conſpicua, Mercurium longè ſuperabit, adeóque erit ſoli vicinior. Diebus 12. & 15. ejuſdem menſis, cauda hæc per ſpatium longe majus diffuſa apparuit rarior, & luce tamen adeò forti ut ſtellis fixis vixdum apparentibus cerneretur & mox trabis mirum in modum fulgentis ſpeciem exhibuit.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu cometarum à terrâ ſolem versùs, ac decreſcente in eorum receſſu à ſole verſus terram. Sic enim cometa poſterior anni 1665. (obſervante *Hevelio*) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo apparente, ideoque præterierat perigæum; ſplendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum cometa radiis ſolaribus obtectus deſiit apparere. Cometa anni 1683 (obſervante eodem *Hevelio*) in fine menſis Julii, ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6'. 5'' incluſa coma, at *Sept* 2. eſſe 9'. 7''. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in viciniâ ſolis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à ſole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad terram. Cometa anni 1618. circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680. circa finem ejuſdem menſis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis ſolaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate ſolis. Caput cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & à *Flamſtedio* obſervatum eſt caput cometæ poſterioris in diſtantia novem graduum à ſole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta ſolem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſimè

motus

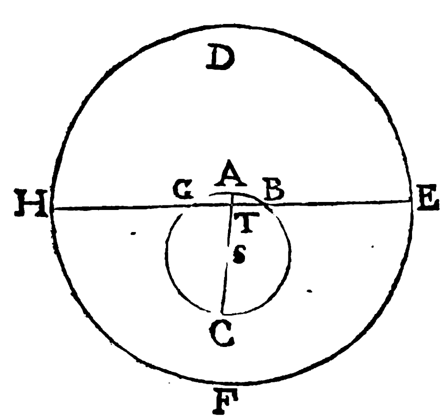
motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à terrâ diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maximè ſplenduêre, ex altera perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis & cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſimè moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quâtenus ea major eſt in vicinia ſolis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce ſolis à ſe reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem ſolis. Si cernerentur in regionibus longè

135. (h) * *Luce Solis à ſe reflexâ.* Nam à terrâ recedentibus cometis & ad ſolem accedentibus, augetur eorum ſplendor, decreſcente licet diametro, ut ex præcedentibus obſervationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S ſolem, T, terram, circulus DFFH, ſphæram fixarum. Quoniam cometæ ſplendent luce ſolis à ſe reflexâ, (cor. 1), ii non videbuntur, niſi à ſole ità illuſtrentur ut oculi noſtri hâc luce moveri poſſint. Præterea cometæ per caudas ſuas maximè fiunt conſpicui, has autem caudas non emittunt priuſquam ad ſolem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas ſeſe conſpicuos non præbere niſi ad definitam quandam à ſole diſtantiam accedant. Ponatur itaque ſphæra ABCG, ſoli concentrica ad talem diſtantiam deſcripta ut nullus cometa propter illuſtrationis defectum, detegi poſſit, priuſquam ad ſphæræ hujus ſuperficiem pervenerit, juncta recta ST, producatur utrinque donec ſuperficiei huic occurrat in A, & C Per T, ductum intelligatur planum HE, cui normalis eſt recta AC, planum illud ſphæram dividet in duo hemiſpheria quorum unum HFE, eſt verſus ſolem, alterum verò HDE, ſoli opponitur. Cometæ omnes in ſphæ-



ræ ſegmento BCG, exiſtentes, videbuntur in hemiſphærio verſus ſolem, omnes autem qui verſantur in ſegmento BAG videbuntur in hemiſphærio quod ſoli opponitur.

longè ultra ſaturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus ſoli oppoſitis Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illà majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.

Corol. 3. Hinc (k) etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui

tur. Quarè ſi ſegmentum BCG, majus ſit ſegmento BAG, plures cometæ videbuntur in hemiſpherio verſus ſolem quam in oppoſito.* Jam verò cometæ nudis oculis ſe priùs detegendos non exhibent quam ſint Jove propiores; ponatur itaque SA, circiter $\frac{3}{2}$ diſtantiæ Martis à ſole, hoc eſt, SA ſit circiter dupla ipſius ST, erit ſegmentum BGC pluſquam quadruplo majus ſegmento BAG, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemiſpherio verſus ſolem quam in hemiſpherio oppoſito. At ſi cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret SA, longè major quam ST, & ideò cometæ ſæpiùs deberent apparere in partibus ſoli oppoſitis, forent enim terræ viciniores qui in ſegmento BAG, verſantur, cæteros verò in ſegmento BCG, ſol interpoſitus obſcuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperé frequentant regionem Solis.

(k) * *Hine etiam manifeſtum eſt.* Clariſſ. Caſſinus in mon. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingenioſè reduxit. Obſervatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras 135.
eſſe apparentias conjectatur, non ſecus ac directus planetarum circumſolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujuſce Aſtronomi judicium maxime veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà ſeriem ſignorum curſum tenuiſſe conabimur oſtendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, poſtquam ſcilicet tradiderimus motuum cometarum elementa Obliquas eſſe nonnunquam cometarum vias & curſui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Carteſiani Verùm quá ratione diverſi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari poſſint difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum deſcendant, neceſſe videtur ut rapidiſſimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque deſtruantur, ac tandem cometæ hujuſce torrentis vi rapiantur. At ſummè regulares eſſe cometarum motus & contrà curſum planetarum diutiſſimè conſervari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

DE MUNDI SYSTEMATE.

curſui planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos, etiam contra curſum planetarum diutiſſimè conſervant. ([l]) Fallor ni genus planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod ſcriptores aliqui meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. ([m]) Capita cometarum atmoſphæris ingentibus cinguntur; & atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic terra ſi è planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum jovis copus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum ſub atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

([n]) Patet per corol. 1. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII. XII. & XIII. libri tertii.

Co-

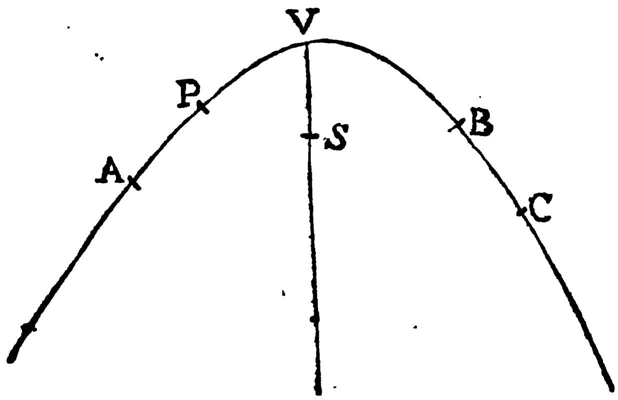
135. (l) * *Fallor, ni genus planetarum ſint.* Quam gravibus fundamentis nitatur hæc ſententia manifeſtum erit poſteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capite cometarum* atmoſphæris ingentibus cingi variis argumentis impoſterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipſis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decurſu conſtabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmoſphæras tribuit.

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu ſuo lineas curvas circà ſolem deſcribunt, ut ex obſervationibus conſtat, vi aliquâ à motu rectilineo detorquentur (per leg. 1.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas à lineis rectis detorquet maximè tendit versùs ſolem ut potè corpus cætera omnia ſyſtematis ſolaris corpore longè ſuperans, eadem quoquè vis in cometis ſolem maxime debet reſpicere. Sed vis acceleratrix in planetis eſt in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole inverſâ (prop. 8. lib. 3.). Quarè eandem quoquè legem obſervare debent cometæ quæ ſunt corpora planetis ſimilia ac proindè (cor. prop. 13. lib. 1. & prop. 13. lib. 3.) come-

Corol. 1. Hinc ſi cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica pla neta

Liber Tertius. Prop. XL. Theor. XX.



cometæ non ſecus ac planetæ in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moventur & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribunt. Hæc ità ſe habent, ſi ſol è loco ſuo nullatenus moveatur; ſed quamvis ſol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longè recedit à communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus à ſole maximè diſſitis commorantur, non magnopere hujus centri ſitum turbare poſſunt. Quarè orbitarum ſuarum umbilicus non longè diſtabit à centro ſolis, ac proindè propoſitio hæc vera eſt quamproximè. Quantum accuratè obſervatis cometarum motibus congruat patebit deinceps.

136. Keplerus aliique poſt eum aſtronomi non pauci cometas in lineis rectis moveri poſuerunt, & indè cometarum quorumdam loca obſervationibus ſatis congrua calculo inveſtigârunt. Res ità ſuccedere poteſt, ſi obſervetur cometa in eâ tantùm orbitæ ſuæ parte quæ à rectâ non multum differat. Sit APVBC, Sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum ſit ſolis centrum. Ponamus cometam obſervari, dum orbitæ ſuæ partem AP, deſcribit, fieri 136.
poteſt ut reliquo tempore, dum ſcilicet à loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotiſſimas abiens oculis ſe ſubducat & ſub radiis ſolaribus deliteſcat reſpectu obſervatoris in tellure circà ſolem S motâ, vel etiam accidere poteſt ut, motu telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem APVB, ſub ſolaribus radiis abſcondatur & tunc primum obſervetur cum ad locum B pervenerit, lineam BC deſcripturus. In hoc utroque caſu via cometæ à lineâ rectâ parum differet. In primo caſu, cometæ à Sole abſorpti credentur, quia ad ſolem accedentes, pro deſtructis habebuntur. In altero caſu, è ſole videbuntur emergere, quia tunc primum ſeſe conſpicuos præbuerunt, dum à Sole in remotas regiones diſcedebant. Porrò dum cometa verſus ſolem deſcendit, putà dum AP percurrit poſteà ad ſolem accedens ſub ejus radiis latet, putà dum PVB deſcribit, tandemque dum ad alteras ſolis partes ſubitò emergit, uſurpatur ſæpè pro novo cometa à priori in AP diverſo, & duæ rectæ AP, BC pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, obſervatis cometarum motibus ple-

DE MUNDI SYSTEMATE.

netarum in (o) axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. (P) Ideoque cometæ maximâ ex parte ſupra planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1. ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. (p) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad (q) velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in quâ terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & (r) terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes

$101364\frac{1}{2}$.

136. plerumque reſpondeant. Id fit ſcilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At ſi tota ſimul conſideretur tam in aſcenſu verſus ſolem quam in deſcenſu, aliam nullam præter Sectionem conicam ſatisfacere conſtabit.

(o) * *In axium principalium ratione ſeſquiplicatâ.* (Prop. 15. lib. 1.).

(P) * *Ideóque cometæ* maximâ ex parte ſuprà planetas verſantes, quo tempore ſcilicet oculos noſtros fugiunt & eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ deſcribentes tardius revolventur.

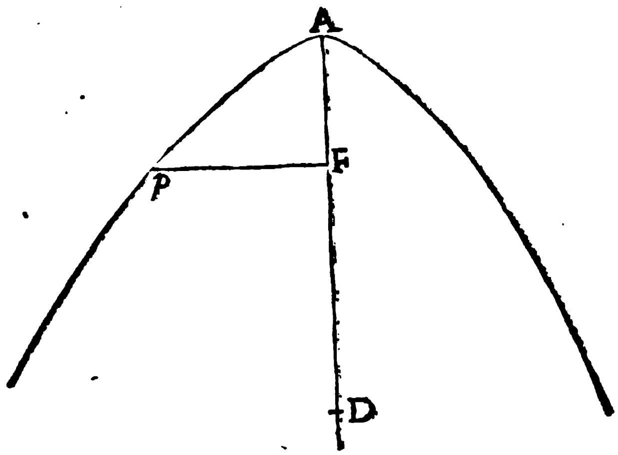
(p) * *Orbes autem parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum ſunt admodum excentrici, ut ex obſervationibus colligitur, & valdè exigua eſt portio orbis quem toto apparitionis tempore deſcribunt, exiguo enim temporis ſpatio ſeſe conſpicuos præbent. Verum ſi in ellipſi centrum ad infinitam ab umbilico diſtantiam removeatur, portio ellipſis cujus abſciſſa finita eſt, abit in parabolam. Quare elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujuſvis* circà ſolem in circulo revolventis, hoc eſt, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et terra.* Fiat hæc analogia: ut eſt tempus periodicum terræ circà ſolem ad totam peripheriam circuli 3.141, ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ deſcriptam.

101364½. (ſ) In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum reciprocè, ideoque datur. LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.

Corol. 4. (t) Unde ſi latus rectum parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area quam cometa radio ad ſolem ducto ſingu-



(ſ) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. prop. 4. & prop. 15 lib. 1. vel per cor. 6. prop. 16. ejuſdem libri.).

(t) * *Undè ſi latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A p F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti ſeu radio A F deſcripti (theor. 2. de parabolâ lib. 1.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam ſi radius circuli ſumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum ſub ordinatâ p F & abſciſſâ F A, eſt dimidium hujus quadrati, hoc eſt 2, & area parabolica A p F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc eſt $\frac{4}{3}$ (per theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè area parabolica A p F, eſt ad aream circuli radio A F, deſcripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Si igitur velocitas cometæ revolventis in parabolâ eadem eſſet cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa deſcribit arcum parabolæ A p, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ eſt ad velocitatem planetæ in eâdem diſtantiâ à ſole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda eſt prior ratio. Undè tempus quo cometa deſcribit arcum parabolicum A p, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3 \times \sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9 \times 2}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159.

De Mundi Syſtemate. ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quàvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione ſubduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Caſ.

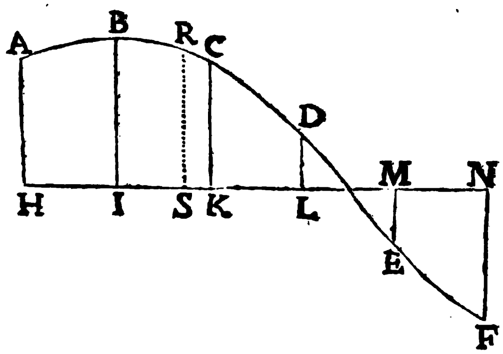
136. Jam tempus periodicum terræ circà ſolem ſit 365.2565 dier. & cometa in perihelio ad diſtantiam æqualem diſtantiæ terræ à ſole ſupponatur, tempus quo cometa deſcribet arcum parabolicum A p, per hanc analogiam invenitur: ut eſt 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæſitum quod erit 109. dier. 14 hor. 46′. Si quadratum radii ponatur eſſe partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad ſolem ductis deſcribit diebus 109. hor. 14.46′. Quarè area quam cometa ſingulis diebus deſcribit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in diſtantiis inæqualibus areas parabolicas ſimiles deſcriberet, ſunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione diſtantiarum ſeſquiplicatâ (cor. 6. prop. 4. lib. 1.), id eſt, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream ſimilem deſcribat, minus autem in minori, ac proinde cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris & majorem parabolæ minoris deſcriberet, idque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum inverſâ, hoc eſt, poſitâ ratione diſtantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore deſcriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ ſimiles parabolarum inæqualium ſunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. lib. I.). Sive diſtantiarum quæ ſunt laterum rectorum pars quarta (cor. 2. theor. 1. de parab. lib. 1.). Quarè ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda eſt, totaque ratio compoſita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ eſt ratio ſubduplicata diſtantiarum ſive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione ſubduplicatâ, ſi ratio ſeſquiplicata diſtantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum ſeu diſtantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. lib. 2.

Caſ. 1. Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH-BI=b$, $BI-CK=2b$, $CK-DL=3b$, $DL+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, dein $b-2b=c$, &c. & ſic pergatur ad

b		2b		3b		4b		5b
	c		2c		3c		4c	
		d		2d		3d		
			e		2e			
				f				

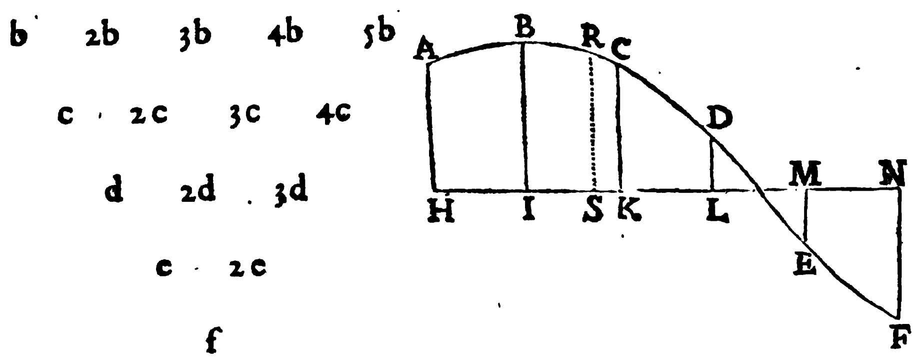


differentiam ultimam, quæ hic eſt f. Deinde erecta quacunque perpendiculari RS, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates eſſe, & dic $AH=a$, $-HS=p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS=q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK=r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL=s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM=t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum ME, & præponendo ſigna negativa terminis HS, IS, &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas per intervalla bina diviſa c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna diviſas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas e, $2e$, &c. & ſic

De Mundi Syſtemate.

ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis



differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, p in $-IS=q$, q in $+SK=r$, r in $+SL=s$, s in $+SM=t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproximè. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum area curvæ illius quadrandæ. (y) Poteſt autem parabola per methodos notiſſimas ſemper quadrari Geometricè.

LEM-

136. (y) * *Poteſt autem Parabola*, per methodos notiſſimas (165. lib. 1.) ſemper quadrari geometricè. Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ tranſibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quam proximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura ſunt puncta curvæ propoſitæ per quæ tranſit curva Parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Deſignent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter obſervationes *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* obſervatas quinque longitudines cometæ, *HS* tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata *R S*, erit RS longitudo quæſita.

Eâdem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

L E M-

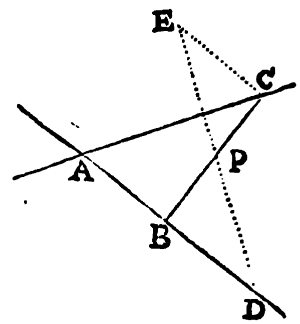
(z) 137. * *Si longitudinum obſervatarum*, (patet per not. in cor. præc.). Methodus Lemmatis præcedentis quæ methodus interpolationum dici ſolet, in rebus Aſtronomicis uſus habere poteſt eximios. Hanc methodum adhibuit Clariſſ. Maierus tom 2. Comment. Acad. Petropol. ad inveſtiganda ſolſtitiorum momenta. Circà tempus ſolſtitii obſerventur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illaſque Solis altitudines repræſentent quædam ordinatæ, & tempora inter obſervationes elapſa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde tranſeat Parabola per extremitates ordinatarum, abſciſſa quæ correſpondet minimæ ordinatæ, tempus ſolſtitii determinabit. Cæterum definiri poteſt tempus ſolſtitii per plures obſervationes & parabolam plurium dimenſionum, vel per tres obſervationes duntaxat & parabolam conicam, uti fecit Halleïus. Verùm in quocumque caſu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias obſervatas ſenſibiliter majores eſſe erroribus qui in ipſâ obſervatione committi poſſunt, hâc autem adhibitâ curâ, ſatis accurate determinari poterunt plurima aſtronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantiſſimum ejuſdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mon Pariſ. an. 1736., ubi determinandæ telluris figuræ modum exponit ex menſurâ plurium meridiani arcuum in diverſis latitudinibus captâ. 137.

De Mundi Systemate.

LEMMA VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus poſitione datis* AB, AC *abſciſſæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD, & producatur eadem verſus rectam alteram AC uſque ad E, ut ſit PE ad PD in datâ illâ ratione. Ipſi AD parallela ſit EC; & ſi agatur CPB, erit PC ad PB ut PE ad PD. *Q. E. F.*



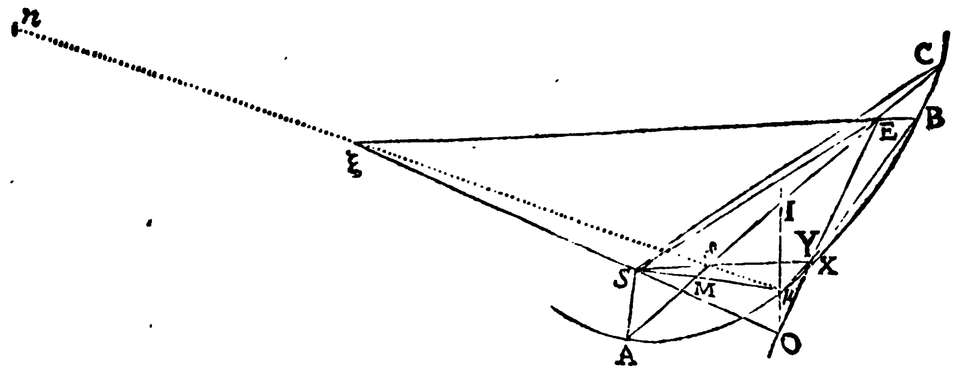
LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chordâ* AC *biſectâ in* I *abſcindatur ſegmentum* ABCI, *cujus diameter ſit* $I\mu$ *&* *vertex* μ. *In* $I\mu$ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipſius* $I\mu$. *Jungatur* OS, *&* *producatur ea ad* ξ, *ut ſit* $S\xi$ *æqualis* 2SO. *Et ſi cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *&* *agatur* ξB *ſecans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abſcindet de chordâ* AC *ſegmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim EO ſecans arcum parabolicum ABC in Y, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ EO occurrat in X; & (a) erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut AE ad AC. Ideoque cum trian-

137. (a) * *Et erit area.* Quoniam chorda AC biſecta eſt in I, erit ſemiſegmentum $A\mu I$ æquale ſemiſegmento μIC. Item quia μX tangit parabolam in μ, erit μX, parallela chordæ AC (per Lem. 4. de conic. lib. 1.) ac proinde triangulum

triangulum ASE ſit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCY\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO ſit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eâdem ratione, erit SX ipſi EB parallela: & propterea ſi jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale.

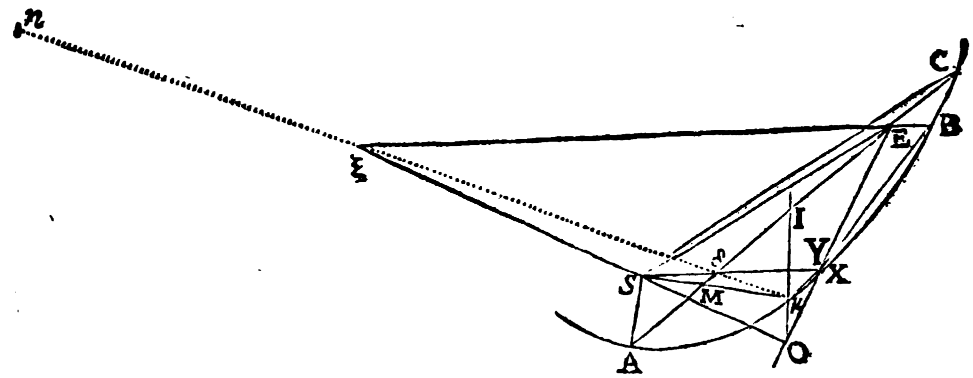


Unde ſi ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de ſumma auferatur triangulum SEB. manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis eſt area $ASBY\mu A$ (b) quamproximè, & hæc area $ASBY\mu A$ eſt ad aream $ASCY$

lum O I E ſimile eſt triangulo O μ X, ideóque ob I O triplam ipſius μ O, erit triangulum I O E trianguli μ O X, noncuplum & triangulum I O E trapezii IμXE, ſeſquioctavum. Prætereà triangulum IAO, eſt trianguli I A μ, ſeſquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confuſionem) cum idem ſit trianguli utriuſque vertex A, ſitque baſis O I ſeſquialtera baſis μ I; triangulum verò A μ I, ſubſeſquitertium eſt ſemiſegmenti A μ I (prop. 24. Archimed. de parab vel theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè triangulum A O I eſt ſeſquioctavum ſemiſegmenti A μ I, hoc eſt, in ratione compoſitâ ex rationibus ſeſquialterâ & ſubſeſquitertiâ ac proinde triangulum A O I, eſt ad ſemiſegmentum A μ I, ſicut triangulum IOB, ad trapezium μ X I E, & viciſſim trapezium μ X I E eſt ad ſemiſegmentum AμI ut I E ad A I, ac proindè, componendo, area curvilinea A μ X E, eſt ad ſemiſegmentum A μ I, ut A E, ad A I, ideóque area curvilinea A μ X E eſt ad ſegmentum totum A μ C ut A E ad A C. 137

(b) * *Quamproximè*. Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

DE MUNDI SYSTEMATE. $ASCY\mu A$, (c) ut tempus deſcripti arcus AB ad tempus deſcripti arcus totius AC. Ideoque AE eſt ad AC in ratione temporum quamproximè *Q. E. D.*



Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, eſt AE ad AC in ratione temporum accuratè (d).

Scho-

138. (c) * *Ut tempus deſcripti arcûs.* (prop. 1. lib. 1.).

(d) * *Accuratè.* Ideò enim in caſu Lemmatis hujus A B non eſt ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X μ A, ſumpta eſt æqualis areæ A S B Y μ A, quod verum eſt duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quarè in hoc caſu A E eſt ad A C, in ratione temporum accuratè.

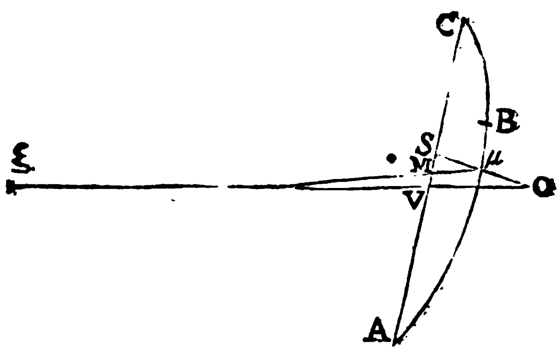
138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iiſdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm; quò propius erit punctum B vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo ſegmenta quæ temporum rationem habeant. Obſervandum eſt chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, ſi B diſtet à vertice μ verſus C quam ſi ab eodem vertice μ, verſus A, æquali intervallo diſtet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior eſt, ea ſit curvior & à tangente μ X, magis deflectit quam portio μ C, à vertice μ, remotior. Quarè ſi inveſtiganda ſint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, verſatur ità ut A E ſit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, ſumenda ſunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones aſtronomicis obſervationibus ſubjectas,

pune-

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ ſecans *AC* in δ, & in ea capiatur ξn, quæ ſit ad μB ut 27 *MI* ad 16 $M\mu$: acta *Bn* ſecabit chordam *AC* in

punctum E, non multum diſtat à chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior eſt, paulò majus eſſe altero; cometa enim exiſtente in μ, ubi chorda A C, dividitur accuratè in ratione temporum; erit recta E C, major quam A E, hoc eſt, tempus quo cometa tunc tardior (cor. 3. prop. 40. lib. huj.) deſcribit arcum BC, majus eſt tempore quo idem cometa factus velocior deſcribit arcum B A. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat verſus C, quam verſus A, ob rationem modò allatam.



139. Si vertex μ, ſegmenti parabolici $A\mu C$ parum diſtet à vertice principali, ſitque punctum B proximum puncto μ, recta $S\mu$, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam A C, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta $S\mu$, admodum magna reſpectu abſciſſæ μI, erit S V, tripla ipſius M V. Quoniam enim rectæ S V O, $SM\mu$; in hoc caſu pro parallelis haberi poſſunt, erit I V ad V M ut I O ad μO, hoc eſt, (per conſtr. Lem. 8.) ut 3 ad 1.

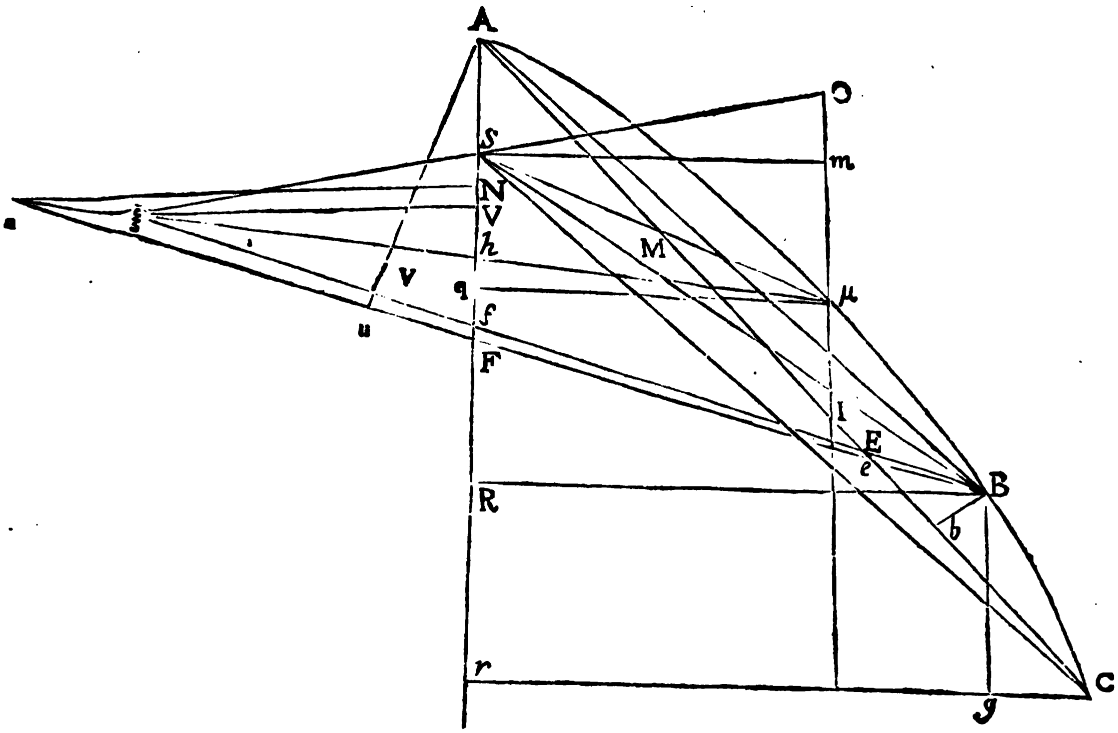
141. Iiſdem poſitis, erit $V\xi = 3\,VS + 3\,I\mu$; quoniam enim (per conſtr.) $S\xi = 2\,SO$, erit $O\xi = 3\,SO = 3\,SV + 3\,VO$. Jam utrinque auferatur V O, fiet $V\xi = 3\,SV + 2\,VO$. Sed ob rectas VO, $M\mu$ parallelas, V O eſt ad $M\mu$, ut I O ad $I\mu$, hoc eſt, ut 3 ad 2, ideóque $2\,VO = 3\,M\mu$. Præterea rectæ $S\mu$, $I\mu$, æquales conſtituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ eſt chordæ A C parallela (per theor. 3. de parab. & lem. 4. de conic.). Quare æquales ſunt anguli $MI\mu$, $IM\mu$, ac proindè recta $M\mu = I\mu$; undè fit $3\,I\mu = 2\,VO$, & $V\xi = 3\,VS + 3\,I\mu$. 141.

DE MUNDI SYSTEMATE. in ratione temporum (e) magis accuratè quam priùs. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, ſi punctum B magis diſtat à

142. (e) 142. * *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis parabolæ, S umbilicus, $AS = f$, ideóque latus rectum principale $= 4f$. Ponatur $RB = y$, $rC = x$, erit area $ASBC = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, & area $ASBA = \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (theor. 4. de parab.); ac proinde area $ASBC$, eſt ad aream $ASBA$, ut $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3+12f^2y}{24f}$, ſeu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id eſt, in ratione temporum accuratè. Præterea eſt $AC = \sqrt{Ar^2 + rC^2} = \frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$; quarè ſi fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$ ad $AE = \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f(x^3+12f^2x)}$, erit quoque recta AC ad hanc rectam AE, in ratione temporum accuratè.

Jam verò inveſtigandus eſt valor rectæ AE, qui prodit ex conſtructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μO perpendicularis Sm, hæc erit æqualis ordinatæ $q\mu$. Deindè (theor. 1. de parab.) $q\mu$, dimidia eſt ipſius rC, ſeu $\frac{1}{2}x$, & $\mu m = qS = \frac{xx-16ff}{16f}$. Præterea eſt $\mu I = 2\mu O$ (per conſtr.) & $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 & theor. 2. de parab.). Sed eſt $AI^2 = \frac{x^4+16f^2x^2}{64f^2}$, & $S\mu^2 = \left(\frac{x^2-16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare eſt μO ſeu $\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}$, ideóque $SO = \sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$, & $\xi O = 3\sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$. Inſuper ex puncto ξ, ad abſciſſam AR erectâ perpendiculari ξV, ob ſimilitudinem triangulorum SmO, $S\xi V$, fit $SO : q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Præterea $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, & $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum ſimilitudinem $\xi V (x) : BR (y) = Vf : Rf$, & componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quarè $Rf = \frac{VR + BR}{\xi V + BR}$, datur itaque Rf, per x & y. Præterea $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, ſed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$, & hinc $\xi B = \sqrt{RB^2+Rf^2} + \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo ABC, dantur latera AB, AC, & præterea datur latus BC; ductâ enim Bg perpendiculari ad rC, erit $BC = \sqrt{Bg^2 + gC^2} = \sqrt{Rr^2 + (RB - rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \sqrt{\frac{3}{4}BC^2}$. Inſuper ducatur AV perpendicularis ad AB, ob ſimilitudinem triangulorum AVf, BRf, erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB \times Af}{Rf}$. Denique ductâ Bb, perpendiculari ad AC, ſimilia erunt triangula EAV, Bbe, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, & invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atquè, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE =$ Ab

à vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, ſi minus diſtat ab eodem vertice.



$\frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco Ab, Bb, AV, ſubſtitutis eorum valoribus modò inventis prodit AE, paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Inveſtigandus ſupereſt valor rectæ Ae, qui prodit ex conſtructione ſcholii hujus. Quoniam ſimilia ſunt triangula ξSh, $\xi O\mu$, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; Sed inventa eſt ſuprà recta Sq, invenietur itaque qh, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Præterea $\xi S : SO = \xi h : h\mu$, quarè $\xi h = \frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota 142.
recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$.

Deindè (per conſtr.) fit $\xi n = \frac{27\, MI \times \mu B}{16\, M\mu}$.

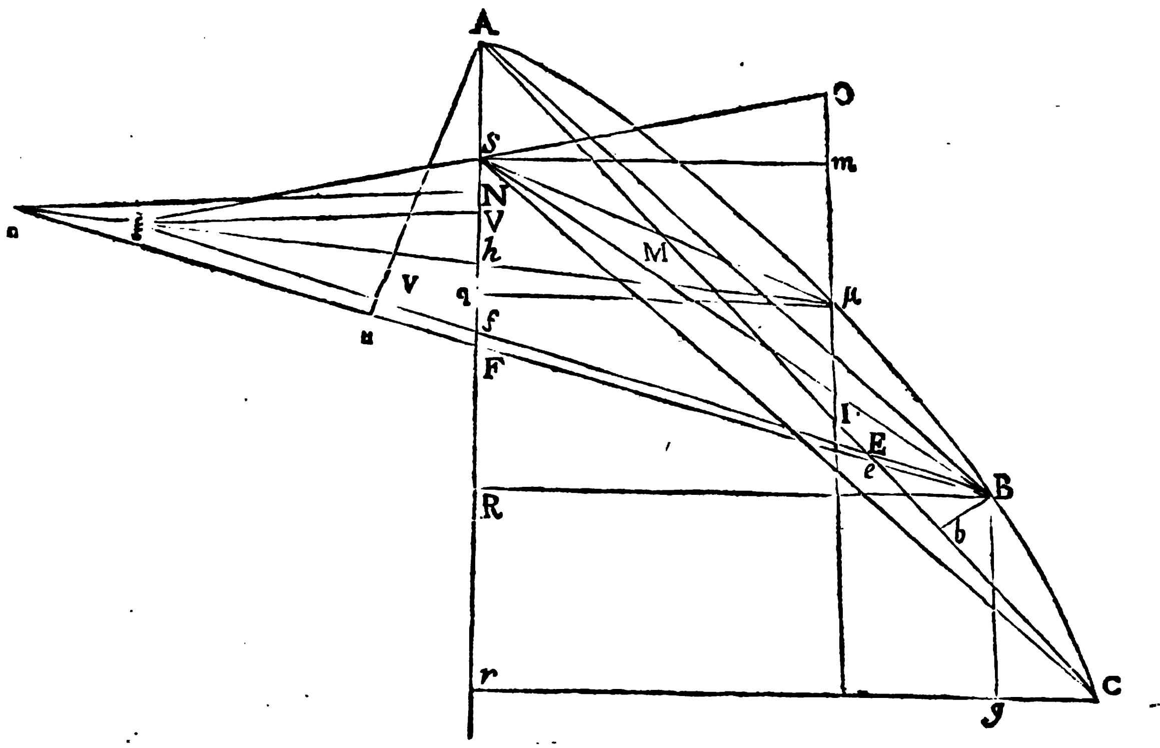
Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque MI, ideóque tota recta $n\mu$. Inſuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque hN, ac proindè & Nn, ob triangulum hrN, rectangulum.

De Mundi Syſtemate.

lum. Præterea (ex præced.) inventa eſt hR, ideóque etiam datur nR. Jam fiat rN : NF = BR : RF, & invertendo NF : RF = rN : BR, atque componendo NF + RF : RF = rN + BR : BR, hinc

142. $RF = \frac{BR \times NR}{rN + BR}$, ideóque datur $BF = \sqrt{BR^2 + RF^2}$. Deinde BF : BR = rF : FN, & inde $rF = \frac{BF \times FN}{BR}$, atque recta tota $rB = \frac{BF \times FN}{BR} + \sqrt{BR^2 + RF^2}$.

Ducatur recta A u, perpendicularis ad AB, erit ob triangulorum AuF, RBF, ſimilitudinem AF : Au = RF : RB, ideó-



que $Au = \frac{RB \times AF}{RF}$, & hinc prorſus ut ſuprà habetur $Ae = \frac{Ab \times Au}{Bb + Au}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas AE, Ae, per x, y, & quantitates conſtantes. Jam loco Ab, Bb, Au, ſubſtitutis eorum valoribus analyticis, fit Ae, paulò major quam AE, & paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Quarè recta Bn, ſecabit chordam AC, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξ B.

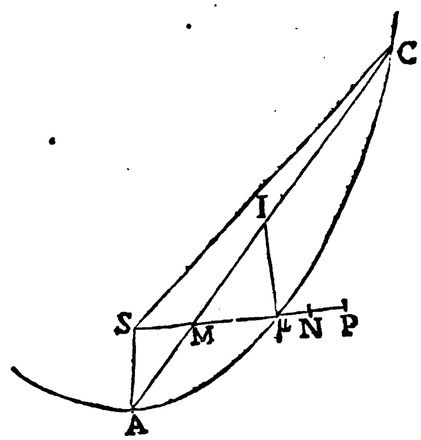
Idem ſcholium faciliùs demonſtrari poteſt hoc modo. Quoniam $Ae = \frac{Ab \times Au}{Ab + Au} = Ab - \frac{Ab \times Ab}{Au + Bb}$ (ex dem.) erit Ae ſemper minor quam Ab. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12f^2x : y^3 + 12f^2y = \sqrt{}$

LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.

(f) LEMMA IX.

Rectæ I μ *&* μ M *& longitudo* $\frac{AIq}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam 4 $S\mu$ eſt latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *ſit pars tertia ipſius* μ I, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* S μ. *Cometa, quo tempore deſ-*

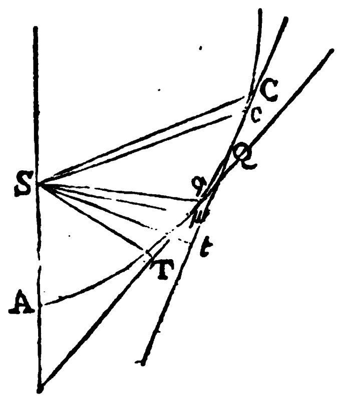
$\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f} : \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$, ſi A e æqualis foret huic quarto termino haberetur ratio temporum accuratè (prop. 1. lib. 1.). Sed quartus ille terminus major eſt rectâ Ae; nam terminus ille major eſt quam chorda AB, eſt enim AB $= \frac{\sqrt{y^4+16f^2y^2}}{4f} = \sqrt{x^3+12f^2x} \times \frac{\sqrt{y^4+16f^2y^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$ hæc autem quantitas minor eſt quam $\frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$. Sed (per conſtr.) ità ducitur μn, ut recta nB 1426 ſemper ſecet chordam AC in puncto e, quod proximius eſt puncto C quam punctum E; quarè cum recta Ae ſemper minor ſit verâ, major tamen quam AE, hæc magis quam illa ad juſtum valorem accedet, ac proindè recta nB, ſecat chordam AC, in ratione temporum magis accuratè quam recta ξB. Res eodem modo demonſtratur, ubicumque ſumatur punctum A.

(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139. lib. huj. & theor. 1. & 2. de parab. lib. 1.).

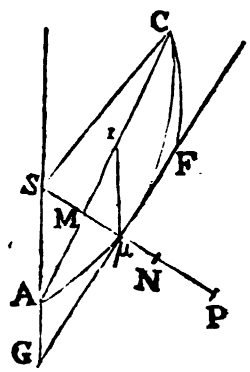
De Mundi Systemate.

deſcribit arcum A μ C, *ſi progrederetur eâ ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ *ASCμ*. (h) Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcriptâ & longitudine *Sμ*



142. (g) * *Area quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μQ, quæ parabolam tangit in μ, area SμQ, quam radio ad punctum S, ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ ASCμ, quam eodem tempore deſcribit. Sumantur enim lineolæ Cc, qμ, à cometa deſcriptæ & à parabolæ umbilico S, ad tangentes Ct, μT, erigantur perpendiculares St, ST, velocitas in C, eſt ad velocitatem in μ, ut ST ad St (cor. 1. prop. 1. lib. 1.) ſed velocitates in C, & μ, ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa, putà Cc & qμ; eſt igitur Cc ad μq ut ST ad St. Quarè triangulum Sμq, æquale eſt triangulo CSc. Iſtud autem ubique obtinet in triangulis minimis trilinea ASCμ, SμQ conſtituentibus. Quia verò æqualia inſumuntur tempora ad percurrendas lineas AC, μQ (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur ſpatia ASCμ, SμQ, ac proinde triangulum SμQ, æquale eſt areæ parabolicæ, ASCμ.

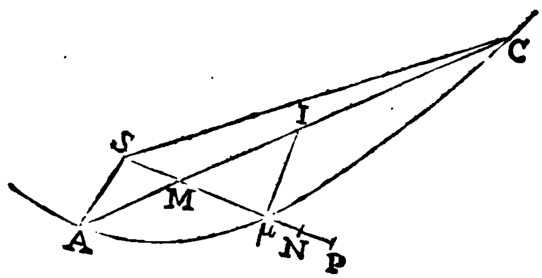


(h) * *Ideóque.* Quoniam recta Sμ, cum tangente in μ, & chordâ AC, æquales conſtituit angulos (Lem. 4. de conicis), ſpatium contentum ſub longitudine deſcriptâ in tangente & rectâ Sμ, erit ad ſpatium contentum ſub chordâ AC, & rectâ SM, ut area ASCμ, ad triangulum ASC, id eſt, ut triangulum SAC + ſegm. parab. CAc ad triangulum SAC, id eſt, ut triangulum SAC + $\frac{2}{3}$ paral-

lelo-

$S\mu$ eſſet ad contentum ſub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id eſt, ut SN ad SM. Quare AC eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP ſit (per corol. 6. prop. XVI. lib. 1.) ad ejus velocitatem in

LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.



altitudine $S\mu$, in ſubduplicatâ ratione SP ad $S\mu$ inversè, id eſt, in ratione $S\mu$ ad SN; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hâc novâ veloci-

lelogrammi AGFC, ad triangulum ASC, hoc eſt, ut $AC \times \frac{1}{2} SM + AC \times \frac{2}{3} I\mu$ ad $AC \times \frac{1}{2} SM$, ſivè ut $SM + \frac{4}{3} I\mu$ ad SM. Sed μN, ſumpta eſt æqualis $\frac{1}{3} I\mu$, & eſt $M\mu = \mu I$ (num. 139.). Quarè $MN = \frac{4}{3} I\mu$. Eſt igitur ſpatium contentum ſub longitudine deſcriptâ in tangente & rectâ $S\mu$, ad ſpatium contentum ſub chordâ AC, & rectâ SM, ut $SM + MN$ ad SM, hoc eſt, ut SN ad SM: Unde ſi longitudo deſcripta in tangente dicatur L, erit $L \times S\mu : AC \times SM = SN : SM$, ideóque longitudo deſcripta in tangente erit ad chordam AC, ut $\frac{SN}{S\mu}$ ad $\frac{SM}{SM}$, hoc eſt, ut SN ad $S\mu$. 140

(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iiſdem temporibus uniformi motu deſcriptæ, ſunt ut velocitates (5. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE. locitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eâdem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in ſolem, & eâ ſemper vi uniformiter continuatâ urgeretur in ſolem, quâ urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis, quo in orbe ſuo deſcribit arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

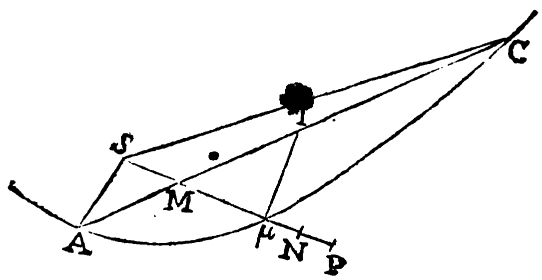
Nam cometa, quo tempore deſcribit arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) eodem tempore in circulo, cujus ſemidiameter eſſet SP, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum, cujus longitudo eſſet ad arcus parabolici chordam AC, in ſubduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in ſolem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in ſolem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius ((l) per corol. 9. prop. IV. lib. 1.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. (m) Unde cùm pondus co-

342. (k) * *Corol.* Si $S\mu$, ſit admodum magna reſpectu μN, tres geometricè proportionales $S\mu$, SN, SP, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id eſt NP, æquabitur μN, ſivè trienti ipſius $I\mu$, ideóque μP, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipſius $I\mu$. Quarè patet collarium.

(l) * *Per corol. 9. prop. IV. lib. 1.* Vel per num. 201. ejuſdem lib.

(m) * *Undè cum pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ verſus Solem in diſtantiâ SN, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in diſtantiâ SP, ut SP^2 ad SN^2, hoc eſt, ob proportionales SP, SN, $S\mu$, ut SP ad $S\mu$.

cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcri- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.



bet ſpatium $\frac{AIq}{4\,S\mu}$, (n) id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

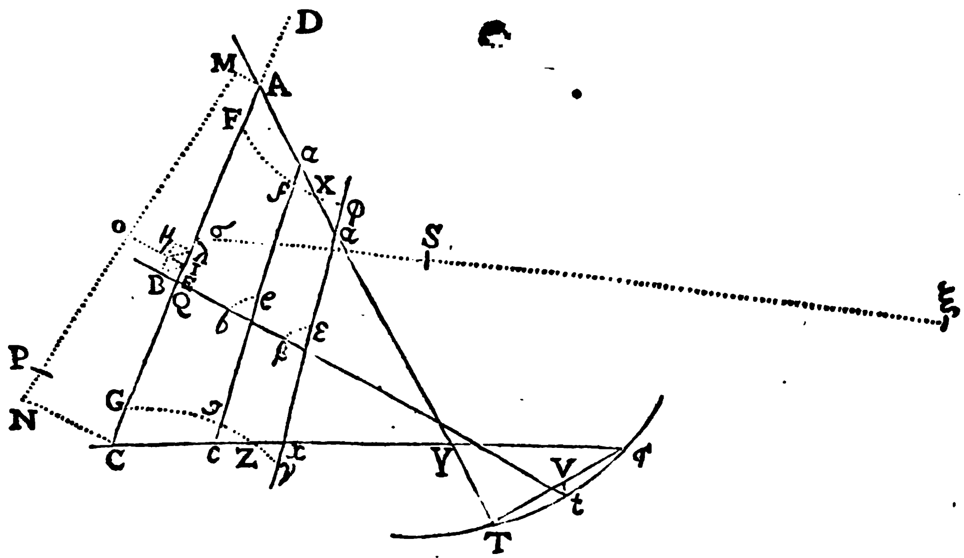
Problema hocce longè difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes (o) æqualibus temporum intervallis

(n) * *Id eſt.* (Lem. IX.).

(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 142.

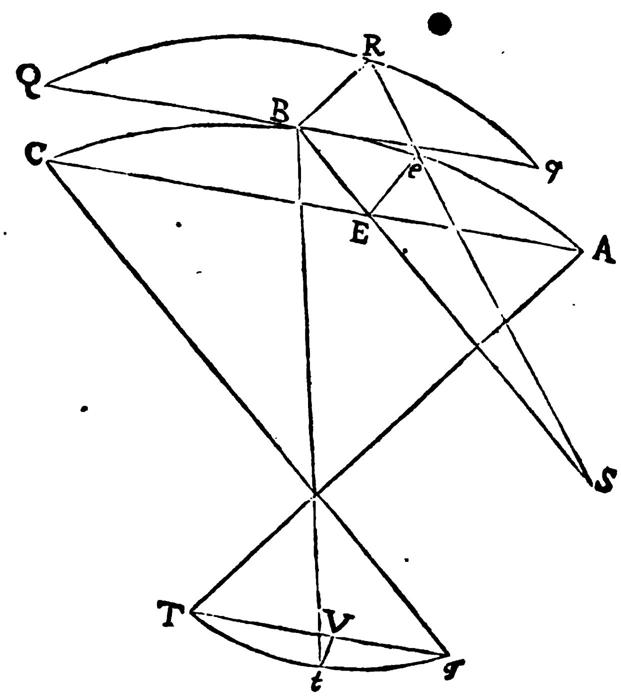
vallis ab invicem quamproximè diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.) incidat in punctum *M* quamproximè, & inde aberret verſus *I* potius quam verſus *A*. (P) Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus cometæ locus per lemma ſextum.



Deſignet *S* ſolem, *T*, *t*, *τ* tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, *τC* obſervatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter obſervationem primam & ſecundam, *W* tempus inter ſecundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à ſole diſtantiâ, deſcribere poſſet, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda eſt, & *tV* perpendiculum in chordam *Tτ*. In obſervatâ longitudine mediâ *tB* ſumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano eclipticæ, & inde verſus

142. (p) * *Si tales obſervationes.* (Ibid.).

verſus ſolem S ducatur linea BE, quæ ſit ad ſagittam tV, ut contentum ſub SB & St *quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt SB & (q) tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecundâ ad radium tB. Et per punctum E agatur (per hujus lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC, ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & (r) & erunt A & C loca cometæ in plano eclip- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



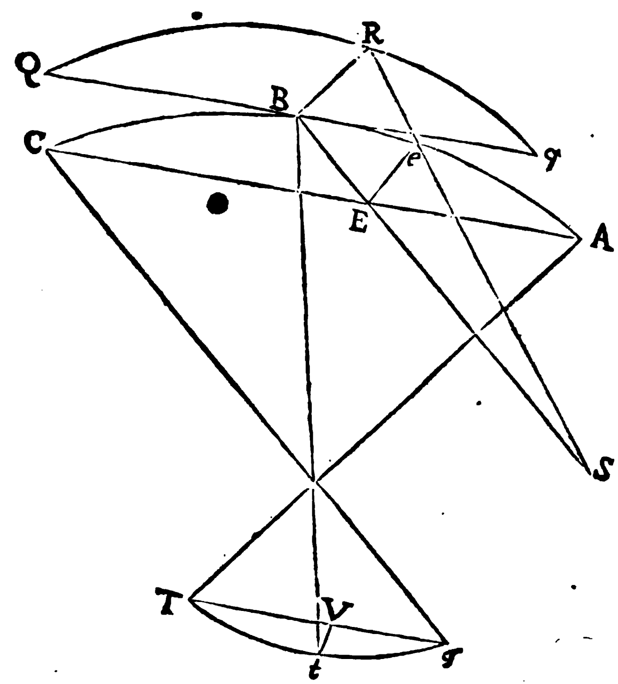
(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum Eccliptica erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in ſecundâ obſervatione, ſumpto t B pro radio.

(r) * *Et erunt A & C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp.) B eſt veſtigium cometæ in plano Eccliptica, & BR ad planum Eccliptica normaliter ducta, tangens latitudinis obſervatæ ex t ad radium t B, patet punctum R eſſe verum cometæ locum, atque RS diſtantiam cometæ à Sole in obſervatione ſecundâ. Per E, agatur E e, ad BR, parallela quæ (per prop. 8. lib. XI. elem.) normalis eſt ad planum Eccliptica, jacetque in plano trianguli SBR, occurrat hæc ipſi SR in e. Jam verò recta R e, eſt ad rectam t V, in ratione compoſitâ ex R e, ad B E, & B E ad t V. Sed (per prop. 11. lib. 6. elem.) R e eſt ad B E ut RS ad BS & BE eſt ad t V, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quare R e eſt ad t V, in ratione compoſitâ ex ratione S R ad BS, & ratione

142

De Mundi Systemate. eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modo *B* ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

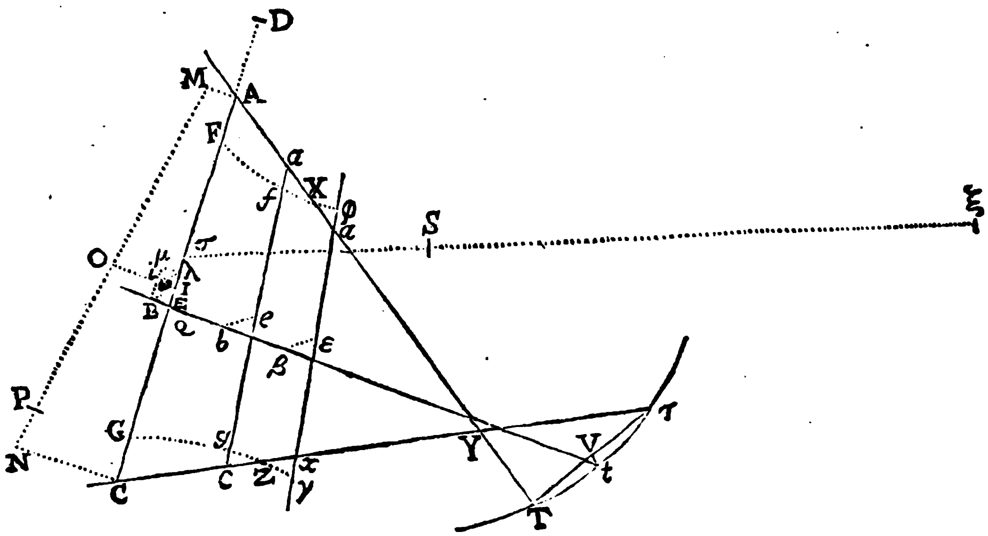
Ad



142. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SR; ratio autem quæ ex iſtis binis componitur eadem eſt cum ratione St^2 ad SR^2, hinc Re eſt ad BE, ut St^2 ad SB^2. Quia verò tV eſt æqualis quamproximè quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviſo (182. lib. I.) erit recta tV, quamproximè ſpatium per quod terra e quiete demiſſa vi ſuæ gravitatis caderet verſus Solem, dum ſemiſſem arcûs Tt, deſcribet, ſi eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. I.). Præterea gravitas acceleratrix verſus ſolem in loco t, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco R, ut SR^2 ad St^2, & ſpatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorſum verſus Solem, deſcripta, ſunt inter ſe ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quare recta Re, eſt ſpatium per quod cometa è quiete ex R demiſſus verſus Solem caderet ſemiſſe temporis quo Terra deſcribit arcum Tt, hoc eſt, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit trajectoriæ ſuæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, eſt in arcûs iſtius chordâ. Undè ſi tam arcûs trajectoriæ QRq binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur veſtigia normalibus ad planum Eeclipticæ demiſſis ſigna a, nempè A, B, C & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Eclipticam reductus, deſcribit arcus AB, BC, (165.) & (per conſtr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hiſce conditionibus poteſt ſatisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui

eſt

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per ſolem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem

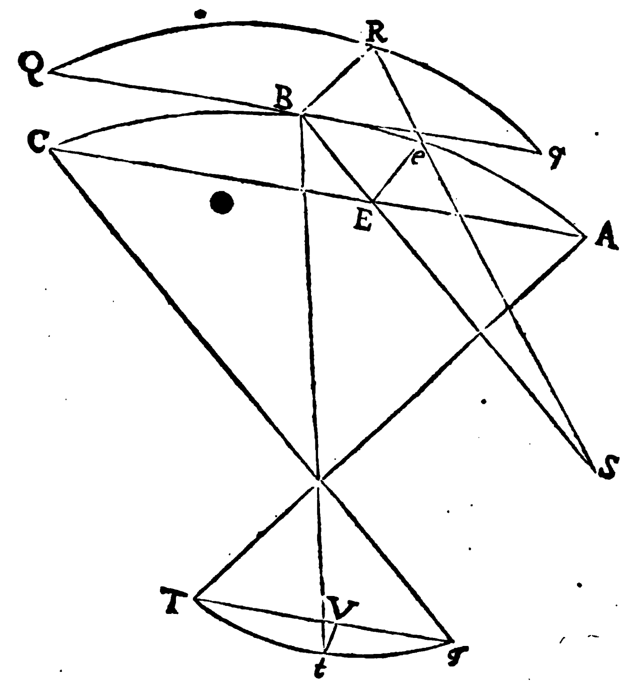


$3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tem-

eſt veſtigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, à rectis T A, T C terminari & per E tranſire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta A C haſce conditiones ſola & unica obtineat, evidens eſt rectam A C eſſe chordam prædicti arcûs, ac proinde puncta A & C ſunt quamproxime veſtigia cometæ in plano Eclipticæ in obſervationibus primâ & tertiâ, ſi modò B, ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ. 142.

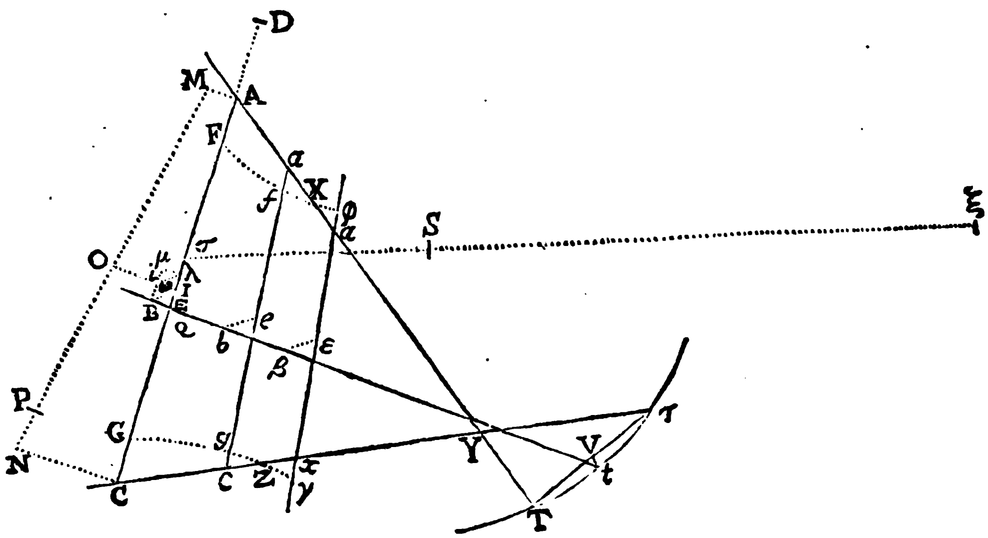
DE MUNDI SYSTEMATE. eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modo *B* ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

Ad



142. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SB; ratio autem quæ ex iſtis binis componitur eadem eſt cum ratione St^2 ad SR^2, hinc Re eſt ad BE, ut St^2 ad SB^2. Quia verò tV eſt æqualis quamproximè quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviſo (182. lib. I.) erit recta tV, quamproximè ſpatium per quod terra è quiete demiſſa vi ſuæ gravitatis caderet verſus Solem, dum ſemiſſem arcûs Tt, deſcribet, ſi eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. I.). Prætereà gravitas acceleratrix verſus ſolem in loco t, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco R, ut SR^2 ad St^2, & ſpatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorſum verſus Solem, deſcripta, ſunt inter ſe ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quare recta Re, eſt ſpatium per quod cometa è quiete ex R demiſſus verſus Solem caderet ſemiſſe temporis quo Terra deſcribit arcum Tt, hoc eſt, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit trajectoriæ ſuæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, eſt in arcûs iſtius chordâ. Undè ſi tam arcûs trajectoriæ QRq binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur veſtigia normalibus ad planum Eclipticæ demiſſis ſignata, nempè A, B, C & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Eclipticam reductus, deſcribit arcus AB, BC, (165.) & (per conſtr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hiſce conditionibus poteſt ſatisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui eſt

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per ſolem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem



$3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tem-

eſt veſtigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, à rectis T A, T C terminari & per E tranſire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta A C haſce conditiones ſola & unica obtineat, evidens eſt rectam A C eſſe chordam prædicti arcûs, 142.
ac proinde puncta A & C ſunt quamproxime veſtigia cometæ in plano Eccliptiçæ in obſervationibus primâ & tertiâ, ſi modò B, ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

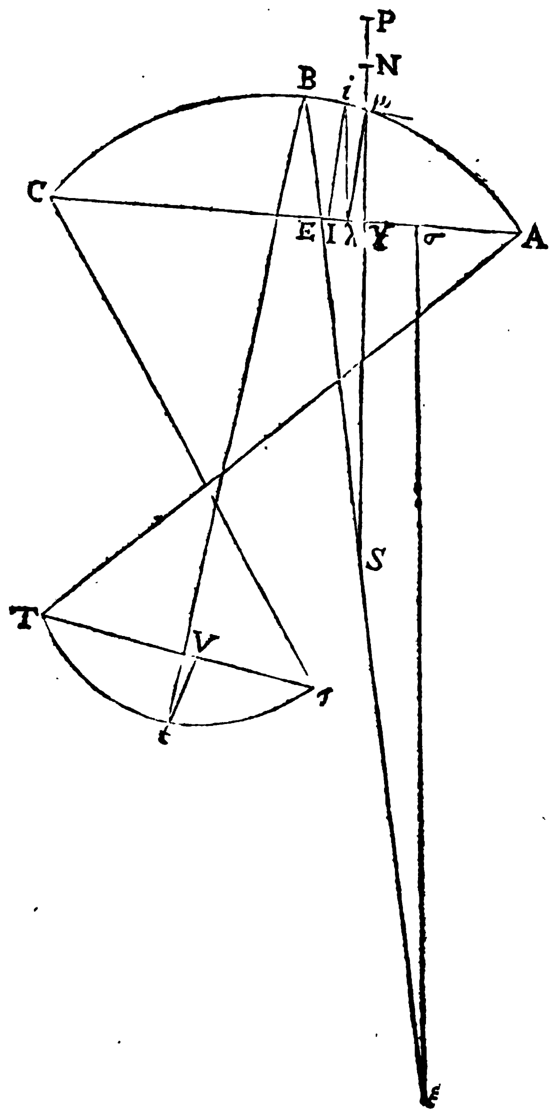
tempora inter obſervationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ (f) magis accuratè.

Ad

142. (f) * *Magis accuratè.* Quoniam (per conſtr. præced.) aſſumptus eſt locus B vero non ſatis proximus, & licet accuratè ſumptus fuiſſet, tamen loca A & C, indè deducta non ſunt ſatis accuratè definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente conſtructione Newtonianâ, concipiantur demiſſa à ſingulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum Eccliptica, prædictis perpendiculis in plano Eccliptica ſignabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehenſi chorda eſt quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.). Jam verò in prædicto arcu ſumptum eſt punctum B, non procul à vertice ſegmenti A B C, nam capta ſunt tria obſervationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem diſtantia, ita tamen ut tempus ſit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta eſt recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ à puncto I ad rectam C A, junctaque eſt ſecans Si, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò reſpectu immenſæ Solis diſtantiæ, evaneſcit diſtantia punctorum I, μ; erit μ ferè vertex ſegmenti A B C. Jungatur μS, ſecans chordam A C in Y, erit μY, ferè parallela iλ, ob immenſam puncti S diſtantiam, ideóque λY, æqualis rectæ iμ, ac proindè & ipſi iλ. Sed (ex conſtr.) Iσ ſumpta eſt tripla ipſius iλ, quarè eſt etiam tripla ipſius λY & reliquæ Yσ, ideóque juncta σS, (165) ea ipſa eſt recta σS, quæ exhibetur in Lem, 8. id eſt, in rectâ σS, productâ verſus S, reperitur punctum ξ, à quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A ſecans, chordam ſecat in ſegmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus reſpondentes arcus à cometâ deſcribuntur. Sed (ex conſtr.) $\sigma\xi = 3S\sigma + 3\,i\lambda$ & $i\lambda = I\mu$, ſunt enim rectæ iλ, Iμ, diametri ejuſdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\xi = 3\,\sigma s + 3\,I\mu$. Quarè (140) punctum ξ, ſuprà inventum, illud eſt ex quo ducta utcumque recta dividit chordam CA in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eádem rectâ productâ notatæ, à cometâ deſcribuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confuſionem, priore BE verſus S ductâ, acta eſt nova verſus ξ, quæ eſt ad priorem ut quadratum ipſius SB, ad quadratum ipſius $S\mu + \frac{1}{3}\,i\lambda$, hoc eſt propter æquales iλ, Iμ, ad quadratum ipſius $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$, & SB eſt quamproximè æqualis ipſi Sμ. Quarè nova BE, eſt ad priorem BE, ut $S\mu^2$, ad SN^2, poſitâ μN triente ipſius Iμ, ſivè iλ, ut in conſtr. Lem. X. Deindè gravitas acceleratrix verſus Solem in loco N, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco B, vel μ, ut SB^2 vel $S\mu^2$ ad SN^2. Præterea gravitates acceleratrices verſus ſolem in diſtantiis diverſis, manentibus dictis viribus, ſunt ut ſpatia eodem tempore verſus ſolem cadendo deſcripta; eſt igitur nova BE, ad priorem BE, ut ſpatium verſus ſolem cadendo percurſum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit arcum longitudinibus T A, T C, comprehenſum, ad ſpatium eodem tempore verſus ſolem cadendo deſcriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales ſunt hujus analogiæ conſequentes, quarè æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta BE æquatur ſpatio à grave cadente verſus ſolem percurſo, ſemiſſe temporis quo cometa arcum ABC, in Eccliptica deſcribit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in diſtantiâ S N, à ſole obtinet. At (Lem. XI.) ſpatium per quod corpus decidit verſus ſolem ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit arcum A B C, cum urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N ob-

tinet

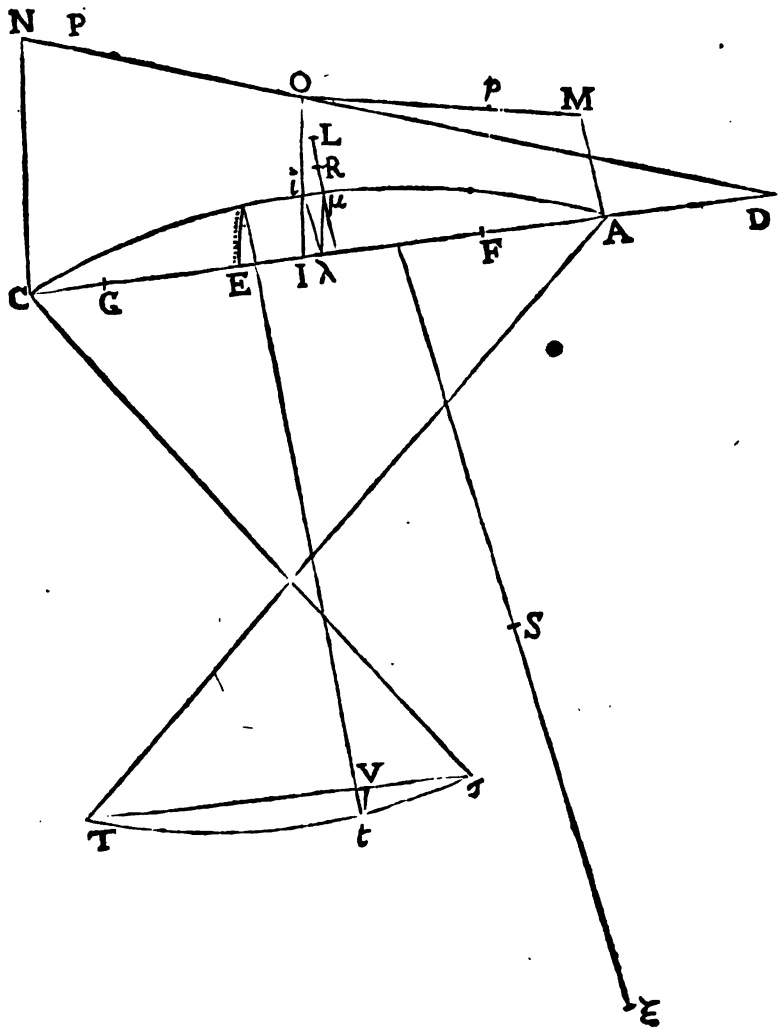
Ad AC biſectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quorum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione primâ ac tertiâ ad radios TA & τC. Jungatur MN ſecans



tinet, æquale eſt rectæ μ Y, ſegmento ipſius μ S, inter verticem μ & chordam A C intercepto, ac proinde æquatur quamproximè ipſi B E ſegmento rectæ B ξ, inter punctum B ipſi μ proximum & chordam A C comprehenſo. Unde punctum E eſt in chordâ A C magis accurate quam anteà, hoc eſt, chorda arcûs qui eſt veſtigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano Eccliptica, inter longitudines T A, T C interceptæ, per punctum E ultimò inventum tranſit quamproximè. Porrò chorda prædicta per E traducta inter T A, T C, ità locari debet ut A E, ſit ad E C, ſicut tempus quo cometa deſcribit Eccliptica arcum inter longitudines T A & t B, ad tempus quo arcum inter t B & T C deſcribit (Lem. 8.) ſed A C ità (per Lem. 8) acta eſt per E, ut A E ſit ad E C in eâdem illâ ratione, nempè ſicut tempus inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Rectè igitur acta eſt A C, per E ſcilicet tranſiens & diviſa in E ut oportebat, ac proinde ſi modò punctum B, rectè fuerit aſſumptum pro cometæ veſtigio in obſervatione ſecundâ, puncta A, C ſunt ejuſdem veſtigia quamproximè in obſervationibus primâ & tertiâ.

De Mundi Syſtemate. cans IO in O. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA productâ capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicatâ ratione mediocris diſtantiæ telluris à ſole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ,

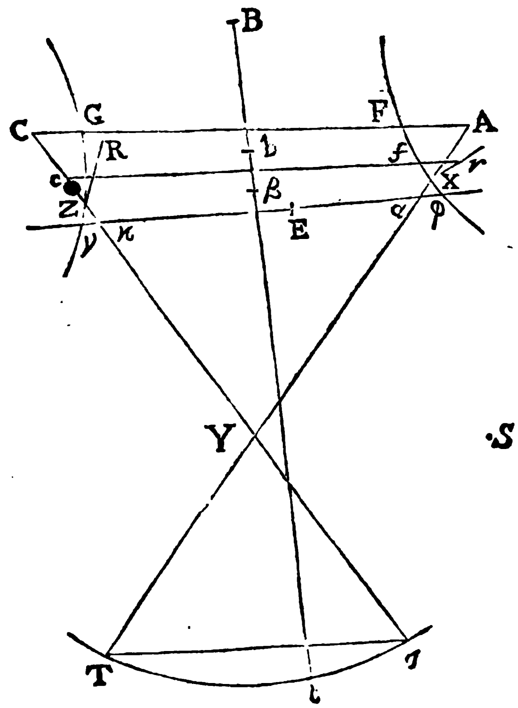
142. (t) * *Erunt A, B, C.* Supereſt jam ut dignoſcatur an punctum B in mediâ longitudine recte fuerit aſſumptum cometæ veſtigium, ut error hinc ortus, ſi quis fuerit, corrigatur, reliquis quæ hactenus facta ſunt manentibus. Deleto priore parallelogrammo $iI\lambda\mu$, ad priorem minuſque accuratam chordam CA conſtituto, deſcribatur alterum ad poſteriorem & accuratiorem chordam CA, eâdem adhibitâ conſtructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad CA normales AM, IO, CN, ſitque AM tangens notæ latitudinis in obſervatione primâ ad radium TA, & CN tangens latitudinis in obſervatione tertiâ ad radium τC; jungatur MN ſecans IO in O. Si erigatur trapezium ACNM normaliter ad planum Eccliptícæ manente rectâ CA, erunt puncta M, N loca vera cometæ, ſi modò punctum B ſit ejus veſtigium in plano Eccliptícæ in obſervatione ſecundâ, & planum tranſiens per tria puncta M, O, N, eſt planum trajectoriæ cometicæ, ideoque recta MN eſt chorda arcus trajectoriæ parabolicæ à cometâ deſcriptæ inter obſervationem primam & tertiam, & SM, SN ſunt diſtantiæ cometæ à ſole in obſervatione primâ & tertiâ reſpectivè, hoc eſt, diſtantia vera cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à Sole eſt hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia à ſole veſtigii illius puncti in plano Eccliptícæ, alterum autem eſt perpendiculum ex iſto veſtigio normaliter ad planum Eccliptícæ excitatum & ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex iſtis perpendiculis ſunt longiora ut NC, quædam breviora ut MA, inter hæc medium quoddam uſurpetur, putà hic IO. Et univerſaliter loquendo, diſtantia cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à ſole erit quamproximè hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia puncti analogi in veſtigio trajectoriæ deſcripto & alterum latus eſt ipſa recta IO. Quibus poſitis in IA, eâve productâ capiatur $ID = S\mu + \frac{2}{3} i\lambda = SR$, factâ $LR = L\mu$, & jungatur DO, hæc quamproximè æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ eſt veſtigium diſtantiæ à ſole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum iſtud & chordam arcûs trajectoriæ, ipſam ſcilicet MN in trapezio ACNM, id eſt, recta DO æqualis eſt rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipſi SR in ejus veſtigio in plano Eccliptícæ, hoc eſt DO æqualis eſt rectæ SR in parabolâ (Lem. X.). Jam (per cor. 3. prop. 40.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ ſuâ trajectoriâ movetur in diſtantiâ à ſole æquali rectæ DO, cum velocitate telluris circà ſolem, & definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo tellus arcum $\tau t T$ deſcribit, ſivè toto tempore quo cometa arcum ABC in Eccliptícâ percurrit, in partibus arcûs $Tt\tau$ à tellure interim percurſi. Id autem facilè præſtatur modo ſequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs $\tau t T$ à tellure deſcripti inter obſervationem primam & tertiam, poſito quovis numero rotundo pro mediocri diſtantiâ terræ à ſole, longitudo putà MP quæ eſt ad longitudinem priùs inventam X, in ſubduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam DO, quæque proinde datur, eſt ipſa longitudo quæſita, ea nempè quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam ſuam parabolicam deſcribens habet ad diſtantiam à ſole æqualem rectæ DO, percurreret tem-



tempore quo cometa arcum cujus chorda MN reverâ percurrit. Nam (per cor. 3. prop. 40.) velocitas cometæ in hâc diſtantiâ DO, eſt ad velocitatem telluris in prædictâ ratione Sed (per Lem. X.) dicta longitudo MP æqualis eſt chordæ arcûs quem cometa iſto tempore reverâ deſcribit; Quarè ſi reperiatur MP æqualis chordæ MN, hoc eſt, ſi punctum P 142
incidat in punctum N recte aſſumptum fuit punctum B in longitudine ſecundò obſervatâ pro veſtigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano Ecclipticæ deſcribi debet.

DE MUNDI SYSTEMATE.

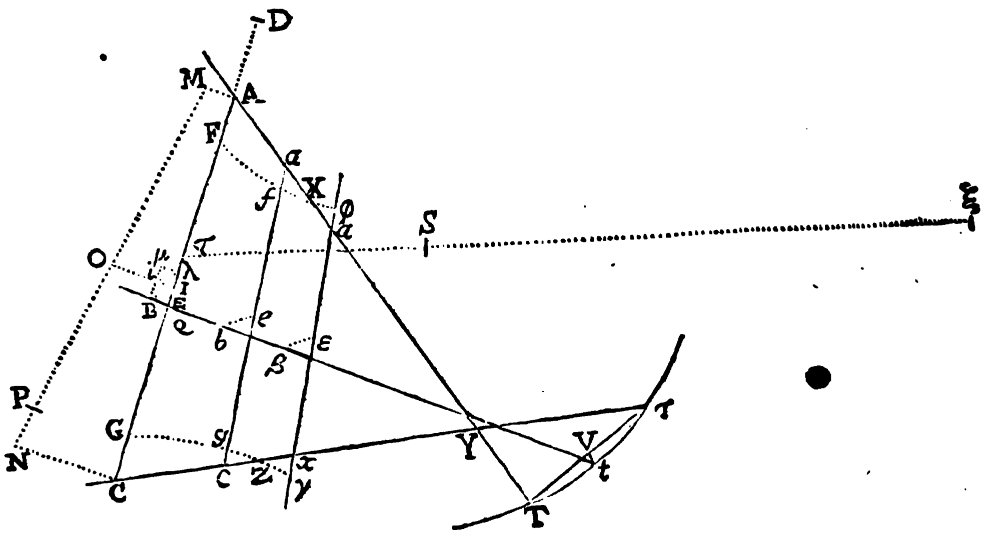
tæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ deſcribi debet. (u) Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in rectâ *AC* capiatur *CG* ipſi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad eaſdem partes rectæ *NC* jaceant. Ea-



142. (u) * *Sin punctum* P, non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, ſi opus eſt, (vid. fig. præced) capiantur M P, N P æquales longitudini priùs inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, itâ ut G & P ad eaſdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex aſſumpto puncto B, inventa ſunt puncta E, A, C, G, ex aſſumptis aliis punctis b & β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Quod ſi longitudo prius inventa M P, minor fuerit quam M N, aut A G, vel C F, punctum b, ſumendum erit propius puncto Y, in quo C τ & A T concurrunt, & itâ porrò, itâ ut ſaltem αγ, minor fiat quam ακ. Per puncta G, g, γ, deſcribatur circulus qui rectam τ C, ſecabit inter G & κ, putà in Z, ſi puncta nova b, β, ſumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, deſcribatur circulus rectam T A, interſecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad Eclipticam reducta, ſivè cometæ veſtigia in obſervatione primâ & tertiâ, ſi B ſit ejuſdem veſtigium in obſervatione ſecundâ. Idem ſimiliter obtinet in a, c, & b, item in α, κ & β. Jam verò demonſtratum eſt locum B, eſſe veſtigium cometæ in obſerva-

Eadem methodo, quâ punctâ *E*, *A*, *C*, *G*, ex aſſumpto puncto *B* inventa ſunt; invenientur ex aſſumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g & ε, α, κ, γ. Deinde ſi per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et ſi in

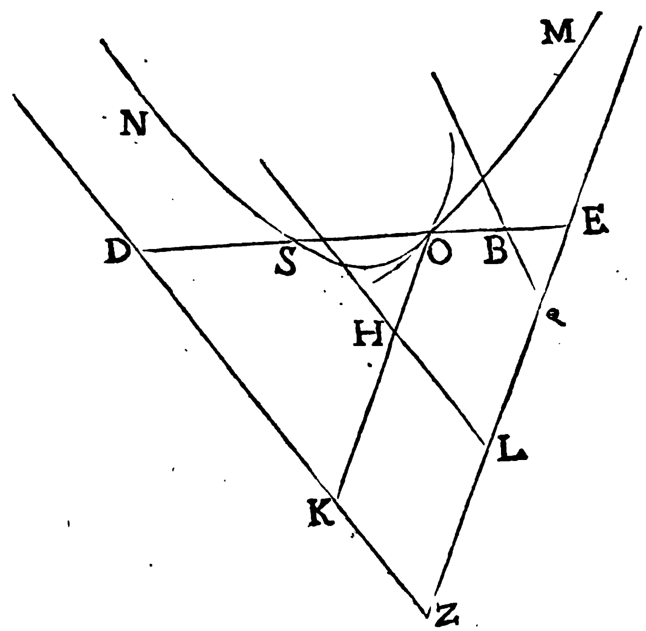
LIBER TERTIUS. PROP. XII. PROBL. XXI.



ſervatione ſecundâ, ſi puncta N, P, coincidant, itemque A & F; quarè ſi reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, veſtigium cometæ in obſervatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, veſtigium cometæ in obſervatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus eſt circulus tranſiens per tria puncta G, g, γ, rectam τ C, ſecans in Z. Cùm igitur punctum Z, ſit tam in loco punctorum C, nempè rectâ τ C, quam in loco punctorum G, nempè circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id eſt, in iſto caſu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z eſt verum cometæ veſtigium in plano Eccliptică in obſervatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requiſitæ. Similiter ob eaſdem rationes, punctum X eſt verum cometæ veſtigium in obſervatione primâ. Quarè ſi ex puncto Z, ad planum Eccliptica excitata intelligatur normalis Z R 1422
æqualis tangenti latitudinis notæ in obſervatione tertiâ ad radium τ Z, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum Eccliptica erigatur perpendicularis X Y, æqualis tangenti latitudinis in obſervatione primâ ad radium T X, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quarè (per prop. 19. lib. 1.) umbilico S, per loca bina R, r, deſcribatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, & umbilico S, deſcriptæ duplex poſitio eſſe poteſt (ut patet ex conſtr. prop. 19. lib. 1.) ex eodem umbilico S, & binis punctis R, r, duæ deſcribi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ ſumenda ſit ex aliâ quâvis cometæ obſervatione manifeſtum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum obſervato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam obſervationibus congruet.

De Mundi Systemate. *AC*, *aε*, *ακ* capiantur *AF*, *af*, *αφ* ipſis *CG*, *cg*, *κγ* reſpectivè æquales, & per puncta *F*, *f*, *φ* ducatur circumferentia circuli *Ffφ*, ſecans rectam *AT* in *X*; erit punctum *X* alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta *X* & *Z* erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios *TX* & *τZ*; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico *S*, per loca illa duo deſcribatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

(x) Conſtructionis hujus demonſtratio ex lemmatibus conſequitur: quippe cum recta *A C* ſecetur in *E* in ratione temporum,

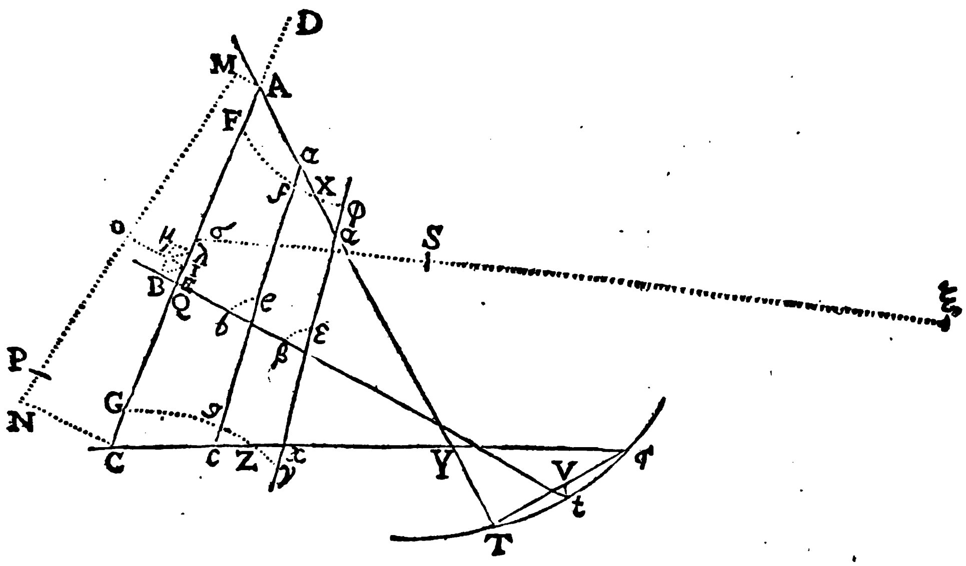


143\. (x) * *Conſtructionis hujus demonſtratio.* Patet ex notis præced.

143\. Lemma. Sit angulus rectilineus A Q B datumque punctum S; item ſit curva M O N, talis ut per S ductâ quâvis rectâ SE ſit BE, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ SO, erit curva MON, hyperbola. Nam ducatur S L, ad B Q, parallela, occurrenſque ipſi A Q in L, in rectâ Q L productâ capiatur L Z = L Q, agaturque Z D ad Q B parallela, itemque ducatur O K parallela ad Q Z: ob S O = B E (per hyp.) erit H O = Q E. Quare cum ſit S H : H O = SL : L E = S L — S H : L E — H O = L H : L Q = L H : H K, erit S H × H K = H O × L H, hoc eſt,

SL

rum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & BE per lem XI. ſit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per corol. lem. X.) lon- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



gitudo ſit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modo B ſit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

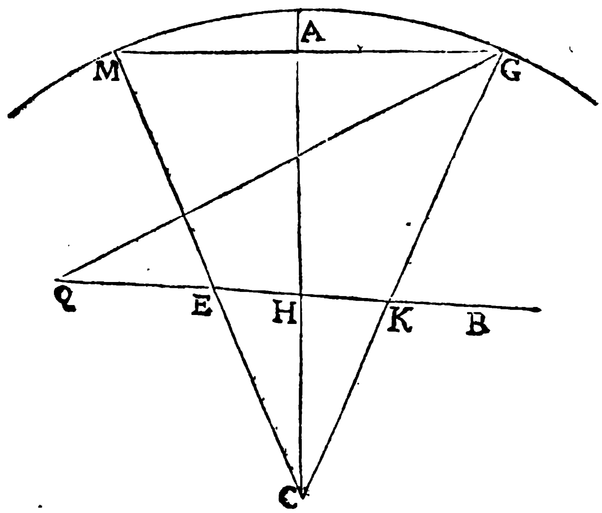
Cæterum puncta B, b, β non quælibet, ſed vero proxima eli-

SL×HK − LH×HK = KO×LH − HK×LH. Unde erit SL×HK = KO ×LH, vel ZL×LS = ZK×KO, ideóque curva MON, eſt hyperbola cujus aſymptoti ZA, ZS (Lem. 1. de con.).

144. Corol. Hinc per datum punctum S, recta linea duci poteſt ità ut pars rectæ BE, lateribus anguli dati EQB, intercepta, æqualis ſit rectæ datæ. Nam deſcriptâ hyperbolâ MON, centro S, intervallo datam rectam æquante, deſcribatur circulus hyperbolam interſecans in O, & producatur SOE, erit BE, æqualis rectæ datæ SO (143). 144.

De Mundi Systemate.

(y) eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veſtigium orbis in plano eclipticæ deſcriptum ſecat rectam tB, præter propter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ



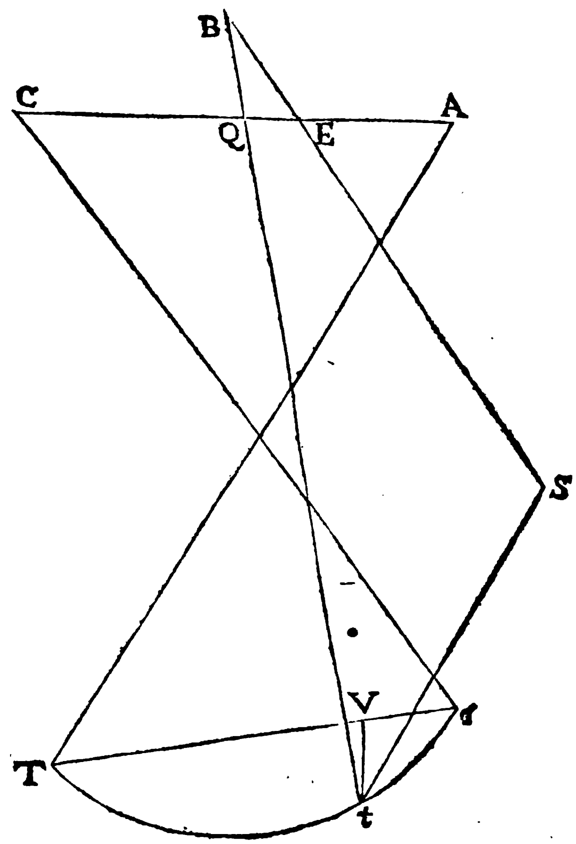
145. 145. Newtonus in arithmeticâ univerſali præcedentis corollarii conſtructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam eſſe ait conſtructioni quæ Sectiones Conicas adhibet. Quare veterum conſtructionem utpote ſimpliciorem hic quoque ſubjungemus. Sic autem deſcribitur conchois. Agatur nempè recta Q B, ad quam erigatur normalis A H, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ quotcumque C M, rectam Q B ſecantes in E, ut ſemper ſit F M, æqualis rectæ datæ A E, curva in quâ ſunt puncta M, A dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli G Q B, ducere oporteat rectam G K, quæ tranſeat per punctum datum C, & æqualis ſit rectæ datæ C K, puncto C tanquam polo & intervallo dato A H = C K deſcribatur conchois quæ occurrat rectæ C G, in G patet fore K G, æqualem rectæ datæ C K. Q. E. F.

(y) * *Eligere convenit.* Si præter propter innoteſcat angulus quem veſtigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ terram & cometam in obſervatione ſecundâ conjun-

quæ ſit ad $\frac{4}{3}$ $T\tau$ in ſubduplicatâ ratione SQ ad $S\tau$. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini $V\tau$, determinabi-

145.

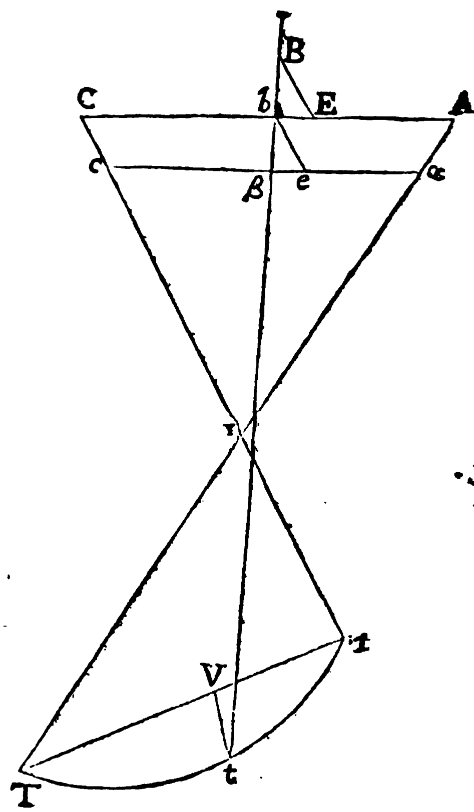
jungente, ſive huic æqualis angulus A Q t (Lem. 4. de con.) quem chorda A C continet cum rectâ t B, id quod præſtari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò aſſumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta A C, rectis poſitione datis T A, T C utrinque comprehenſa, rectamque t B, poſitione datam, in angulo æquali dato in Q interſecans quæ ſit ad $\sqrt{2} \times T t$, hoc eſt, proximè ad $\frac{4}{3}$ T t, in ſubduplicatâ ratione S t ad S Q, & agatur per S, recta S E B, tali ut pars E B à cruribus anguli A Q B intercepta, æqualis ſit rectæ t V (144. 145.) punctum B, ità definitum, eſt illud ipſum quod commodè primâ vice uſurpari poterit pro veſtigio cometæ in plano Eccliptícæ. Ponatur B, eſſe veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ & arcum parabolicum per A, C, B tranſeuntem eſſe veſtigium arcûs trajectoriæ inter obſervationem primam & tertiam deſcripti. Jam verò in hypotheſi quod gravitas acceleratrix versùs ſolem eâdem ſit in diſtântiâ telluris à ſole, atquè in diſtantiâ cometæ ab eodem, quæ eſt hypotheſis Galilæi de gravitate à verâ non multum diſtans, æquales erunt B E, t V, ut potè ſpatia cadendo versùs ſolem eodem tempore percurſa à cometâ & à tellure, ac proindè erit A C chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times T t$ chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in ſubduplicatâ ratione rectæ S t, ad rectam S E, (Cor. 7. prop. 16. lib. 1). Sed ſumpta eſt A C ad $\sqrt{2} \times T t$ in ſubduplicatâ ratione S t ad S Q, & A C ſecat rectam t B in angulo A Q t, ſicut oportebat, atquè B E æqualis eſt ipſi t V; Quare recta A C obtinet quamproximè omnes conditiones requiſitas ut ſit chorda arcûs qui eſt veſtigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam T A, & tertiam interceptæ ac proindè punctum B, habet omnes conditiones ut ſit proximè veſtigium cometæ in obſervatione ſecundâ. Rectè igitur determinatum eſt punctum B, quod primâ vice uſurpare licet.



DE MUNDI SYSTEMATE.

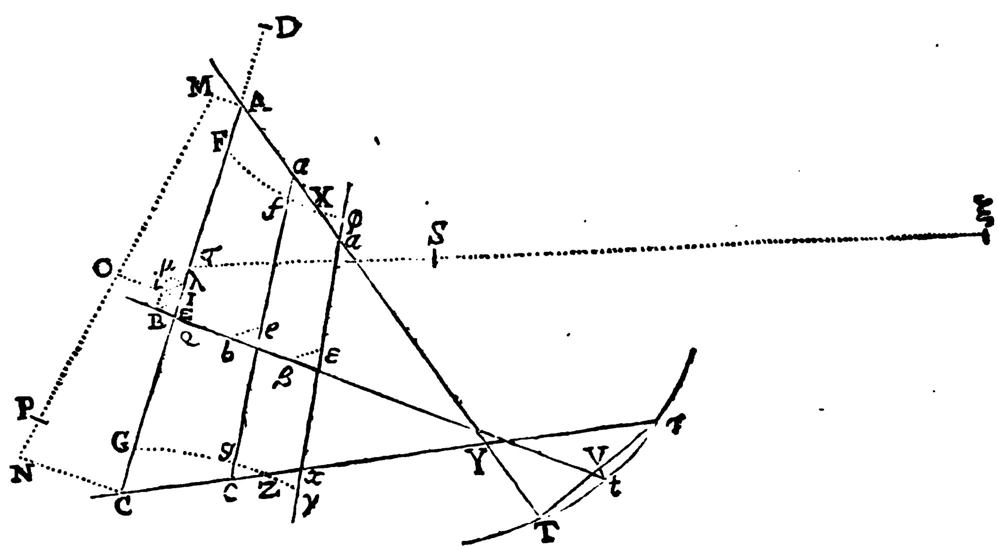
nabitur punctum *B* quod primâ vice uſurpare licet. (z) Tum rectâ *A C* deletâ & ſecundùm præcedentem conſtructionem iterum ductâ, & inventâ inſuper longitudine *MP*; in *t B* capiatur punctum *b*, e lege, ut ſi *TA*, *τ C* ſe mutuò ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Y b* ad diſtantiam *YB*, in ratione compoſitâ ex ratione *MP* ad *MN* & ratione ſubduplicatâ *SB* ad *Sb*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* ſi modo

145. (z) * *Tum rectâ AC, deletâ.* Determinato puncto B, quod primâ vice licet uſurpare, cætera quæ deinceps aſſumuntur puncta nempè b, *β*, aliam conſtructionem poſtulant. Nec ſatis eſt quod punctum b, ſumatur propius puncto Y, dum linea M P, minor eſt quam A C vel M N (in fig. Newt.) & contrà. Sed quia ducere oportet rectam A C, quæ ſit æqualis longitudini M P, capiatur in t B. punctum b, eâ lege ut ſit diſtantia Y b, ad diſtantiam YB, in ratione compoſitâ ex ratione M P ad A C, & ratione ſubduplicatâ S B ad S b. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cum enim invenienda ſit A C, quæ ſit longitudini M P æqualis, ſi illa hàc ſit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per ſolam priorem rationem ſi M P foret conſtans. Quia verò variante A C, perpetuò quoque variabilis eſt recta M P, ideò adhibenda eſt altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, & a, b, c, deſcriptis, chordæ arcuum A B C, a b c, in quibus æquales ſunt rectæ B E, b e, ad umbilicum S tendentes inter verticem & chordam interceptæ, ſunt in ratione ſubduplicatâ rectarum S B, S b (ut colligitur ex theor. 1. & 2. de parab.). Præterea (ex dem.) æquales ſunt rectæ B E, b e quamproxime; ſunt enim ſpatia à cometâ verſus ſolem cadendo in diverſis ab illo diſtantiis eodem tempore percurſa, & veſtigium cometæ in obſervatione ſecundâ proximum eſt vertici arcûs A B C, ſeu veſtigii portionis trajectoriæ à cometâ inter obſervationem primam & tertiam deſcriptæ. Quarè habetur punctum b, co-



metæ

dò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia $B\,b$ perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta F, f & G, g,



actæ rectæ Ff & Gg ſecabunt TA & τC in (*) punctis quæſitis X & Z.

Exem-

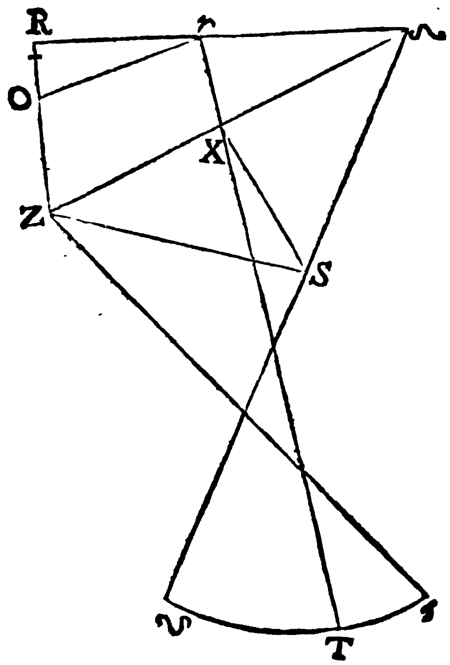
metæ veſtigium in plano Eclipticæ, non tamen accuratum, ſed verò proximum duntaxat.

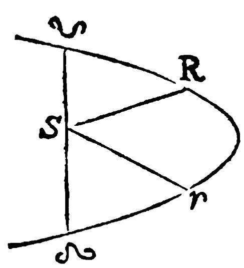
(*) * *In punctis quæſitis X & Z.* (Ut patet ex notâ u, in hanc prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè obſervationibus ſatisfacere deprehendatur, ea ſic poterit deſcribi. Reperiatur veſtigium cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione ſecundâ, eundem ordinem ſitumque obtinet veſtigium illud inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, κ, vel X, inter A, a, α. Ex veſtigio ſic invento, ad planum Eclipticæ erigatur normalis quæ eſt tangens latitudinis in obſervatione ſecundâ ad radium æqualem diſtantiæ inter locum t, dictumque veſtigium. Hujus perpendiculi extremum punctum ſignabit locum cometæ in orbitâ propriâ ſecundò obſervatum. Deniqüe umbilico S, per puncta X, Z, & punctum modò inventum deſcribatur ellipſis (prop. 20. lib. 1.), hæc erit quæſita cometæ trajectoria. 146

De Mundi Systemate.

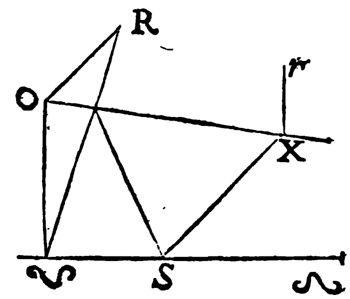
147. 147. Ex præcedentis problematis ſolutione colligi poſſunt poſitio lineæ nodorum trajectoriæ & tempus quo cometa nodos tenet. Iiſdem manentibus, & per eaſdem litteras deſignatis ut ſuprà, producantur rectæ ZX, Rr, donec concurrant in ☊, junganturque SZ, SX, S☊. Jam verò (ex præced.) data ſunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli SZX, tam latera quam anguli ac proindè innoteſcit etiam angulus SX☊. Ex loco r, ducatur rO, ad ZX parallela rectæ RZ, occurrens in O, erunt triangula ROr & & rX☊, æquiangula, ideóque cum ex notis lateribus Or = ZX, & OR, differentiâ notarum rectarum RZ & rX unà cum angulo recto ROr, innoteſcant reliqua latera & anguli, dabuntur quoque anguli trianguli rX☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum Xr, dabuntur ergò & reliqua nempè X☊ & r☊. Deinde in triangulo ☊XS, nota ſunt latera XS, X☊, cum angulo intercepto SX☊, innoteſcet itaque angulus XS☊. Sed datur (per obſerv.) poſitio rectæ SX, ſivè angulus quem facit cum TX. Nam in triangulo XTS, dantur latera TS, TX & angulus XTS, diſtantia inter locum ſolis cognitum locumque cometæ primò obſervatum. Unde innoteſcit TXS, ac proinde & poſitio rectæ ☊S☋, hoc eſt, dabuntur loca nodorum è ſole viſa. Quod ſi æquales fuerint rectæ ZR, Xr, nodorum linea parallela eſt rectæ ZX, ideóque poſitione cognita.

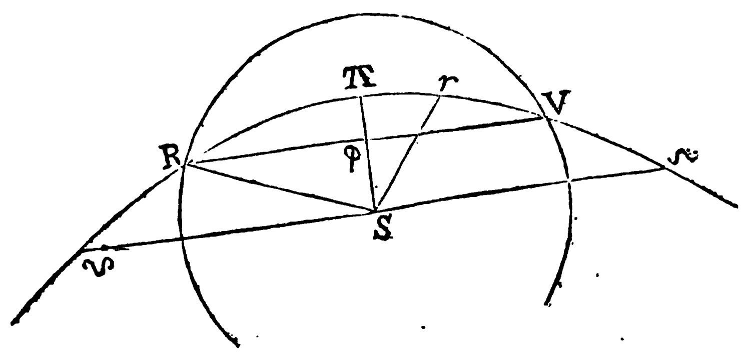




Ad determinandum tempus quo cometa in nodo verſatur, ſit Rr, trajectoria cometæ (per prop. præced.) deſcripta, ſitque ſuperius inventa nodorum linea ☊S☋, trajectoriæ in ☊ & ☊ occurrens, erit (prop. 1. lib. 1.) intervallum temporis inter obſervationem primam & momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter obſervationem primam & tertiam ut area r☊S, ad aream RSr; ſed arearum r☊S, RSr, nota eſt ratio (per theor. 4. de parab. vel num. 142.) notum igitur eſt tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innoteſcit tempus quo cometa ad nodum alterum ☋ appellit.

148. Iiſdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eccliptica. Ex puncto O ad ♑ S ♌, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ♑, jungaturque R ♑. In triangulo O S ♑, præter rectum ad ♑, dantur (147.) angulus O S ♑ & latus O S, quare datur O ♑. Deinde in triangulo R O ♑, dantur latera circà rectum O R & O ♑, ideóque notus erit angulus O ♑ R, qui eſt inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eccliptica. 148.





149. Facilè obtineri poteſt tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, deſcribatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, deſcribatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quam ex puncto S demittatur perpendicularis S φ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; & proindè recta ipſius S π quadrupla, erit ejuſdem latus rectum principale. Cum enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S deſcriptus, parabolam interſecabit in duobus punctis ab axe æqualiter diſtantibus ac proindè axi normalis erit R V interſectiones conjungens; Quare S φ eſt axis & π vertex parabolæ, ſive trajectoriæ perihelium & quadrupla S π parameter diametri cujus π eſt vertex (theor. 2. de parab.) hoc eſt, latus rectum principale.

Jam capiatur tempus cujus intervallum ab obſervatione primâ, dum cometa verſabatur in r, eſt ad intervallum temporis inter obſervationem primam & tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipſum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejuſque tempus determinabitur. Cum enim detur tempus inter obſervationem primam & tertiam interceptum, quo ſcilicet data area r R S, à cometa radio ad ſolem ducto deſcribitur, data quoque erit area uno die ſimiliter deſcripta. Præterea datur r, locus cometæ in obſervatione primâ, quarè dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies ſingulos. Sed dantur loca telluris in orbitâ ſuâ, notuſque eſt ſitus mutuus inter telluris orbitam & cometæ trajectoriam. Undè innoteſcet tempus quo cometa eſt terræ proximus, hoc eſt, tempus quo cometa in perigæo verſatur.

Exem-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

	Tem. appar.	Tem. verum	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28. 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11. 6.44	♒ 5. 8.12	21.42.13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14. 9.26	18.49.23	25.23. 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16. 9.22	28.24.13	27. 0.52
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19.19.43	♓ 13.10.41	28. 9.58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20.21. 9	17.38.20	28.11.53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15. 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0.29. 2	18.44. 4	24.11.56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16.45.36	♉ 9.35. 0	17.56.30
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24.46.59	15.13.53	16. 4. 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27.49.51	16.59. 6	15.27. 3

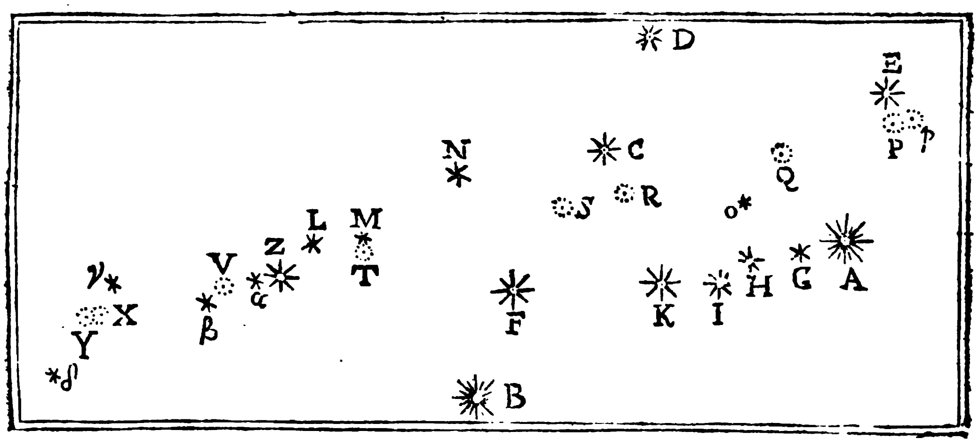
His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h. . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumen-

tis

tis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam quartæ magnitudinis in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* ο) *B* ſtellam ſequentem tertiæ magnitudinis in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C* ſtellam ſextæ magnitudinis (*Bayero* *n*) in talo ejuſdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ ſtellas alias minores in eodem pede.



Sintque 𝔭, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$ *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$ *AK* $38\frac{2}{3}$ *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta tranſibat inter ſtellas *D* & *E*, ſic ut diſtantia ſtellæ *D* ab hâc rectâ eſſet $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in tabulam ſequentem retulit.

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26.41.50	12. 8.36
B	28.40.23	11.17.54
C	27.58.30	12.40.25
E	26.27.17	12.52. 7
F	28.28.37	11.52.22
G	26.56. 8	12. 4.58
H	27.11.45	12. 2. 1
I	27.25. 2	11.53.11
K	27.42. 7	11.53.26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29 . 33 . 34	12. 7.48
M	29 . 18 . 54	12. 7.20
N	28 . 48 . 29	12.31. 9
Z	29 . 44 . 48	11.57.13
α	29 . 52 . 3	11.55.48
β	♊ 0 . 8 . 23	11.48.56
γ	0 . 40 . 10	11.55.18
δ	1 . 3 . 20	11.30.42

Poſitiones vero cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in *p* exiſtentis diſtantia à ſtellâ *E* erat minor quam $\frac{3}{13}$ *A E*, major quam $\frac{1}{5}$ *A E*, ideoque æqualis $\frac{3}{14}$ *A E* proxime: & angulus *A p E* nonnihil obtuſus erat, ſed ferè rectus. Nempe ſi demitteretur ad *p E* perpendiculum ab *A*, diſtantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *p E*.

Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in *P* exiſtentis diſtantia à ſtellâ *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *A E*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *A E*, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *A E*, ſeu $\frac{8}{39}$ *A E* quamproximè. A perpendiculo autem à ſtellâ *A* ad rectam *P E* demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ *P E*.

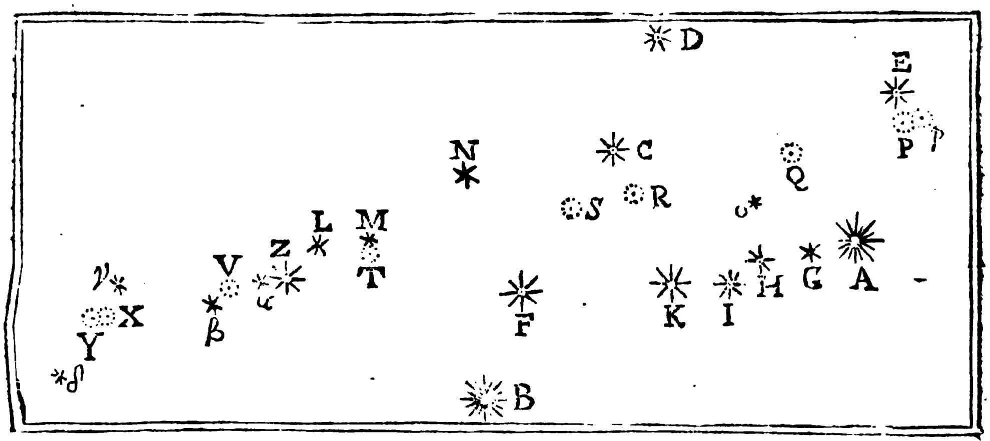
Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in *Q* exiſtentis diſtantia à ſtellâ *O* æquabat diſtantiam ſtellarum *O* & *H*, & recta *Q O* producta tranſibat inter ſtellas *K* & *B*. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in *R* exiſtens, ſtellis

ſtellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{5}$ *CK*, & paulo minor quam $\frac{1}{5}$ *CK* + $\frac{1}{8}$ *CR*, ideoque æqualis $\frac{1}{5}$ *CK* + $\frac{1}{16}$ *CR* ſeu $\frac{16}{45}$ *CK*.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in *S* diſtantia à ſtellâ *C* erat $\frac{4}{9}$ *FC* quamproximè. Diſtantia ſtellæ *F* à rectâ *CS* productâ erat $\frac{1}{24}$ *FC*; & diſtantia ſtellæ *B* ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.



Die ſaturni *Mart.* 5. hor. 11½. p. m. cometâ exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}$ *ML*, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens à *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

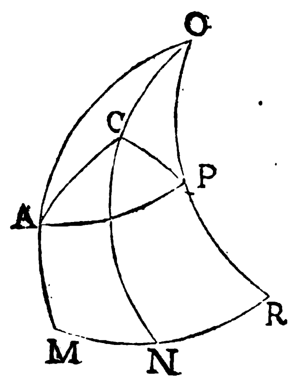
Die lunæ *Mart.* 7 hor 9½ p. m. cometæ exiſtente in *V*, recta *Vα* producta tranſibat inter *B* & *F*, auferens à *BF* verſus *F* $\frac{1}{10}$ *BF*, & erat ad rectam *Vβ* ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ *αβ* erat $\frac{1}{2}$ *Vβ*.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in *X*, recta γX æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γX erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometa exiſtente in *Y*, recta γY æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum à ſtellâ δ ad rectam γY æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam diſtinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes derivabam (a) longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noſter ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur ſupra. Micrometro parùm affa-



149. (a) 149. * *Longitudines & latitudines.* Si obſerventur diſtantiæ cometæ à duabus fixis quarum longitudines & latitudines notæ ſunt, invenientur cometæ longitudo & latitudo ad tempus obſervationis. Referat M R, portionem Eclipticæ cujus polus O, ſint A, P duæ ſtellæ quarum longitudines & latitudines datæ ſunt, ſitque C cometa cujus diſtantia à duabus ſtellis A, P nota ſit. In triangulo AOP, ex datis A O, P O complementis latitudinum ſtellarum & angulo A O P cujus menſura eſt arcus M R differentia longitudinum, dabitur A F diſtantia ſtellarum, atque innoteſcet angulus O P A. Jam verò in triangulo A C P dantur omnia latera, unde invenietur angulus C P A, quo ſubtracto ex angulo O P A relinquetur angulus O P C. Quare dabitur angulus P O C cujus menſura eſt arcus N R differentia ſcilicet longitudinum ſtellæ P & cometæ C. Item innoteſcet arcus OC, qui eſt complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorſus ratione, ſi obſerventur diſtantiæ cometæ à duabus fixis quarum aſcenſiones rectæ & declinationes notæ ſunt, inde colligentur aſcenſio recta & declinatio cometæ.

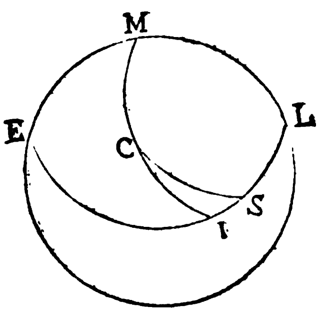
150. Datis declinatione & aſcenſione rectâ alicujus ſtellæ fixæ, inveniri poſſunt declinatio & aſcenſio recta cometæ, modò tamen ſtella & cometa tranſire viciſſim poſſint per campum teleſcopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis & aſcenſionis rectæ inter fixam & cometam (39. lib. 3.) & hinc dabuntur cometæ longitudo & latitudo (17. lib. 3.)

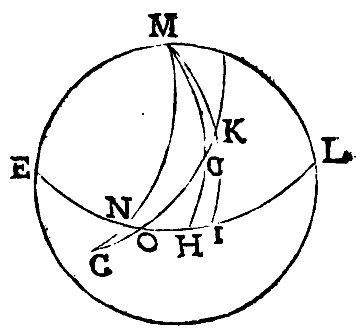
151. Datis cometæ longitudine & latitudine, ſimulque notâ longitudine ſolis, datur diſtantia cometæ à ſole. Sit enim E L portio Eclipticæ, Sol in S, latitu-

affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quâtenus ex obſervationibus noſtris oriantur) minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.

LIBRI TERTII. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Jam





do cometæ C I; in triangulo C I S, ad I rectangulo (7. lib. 3.) datur latus C I, itemque notum eſt latus I S differentia longitudinum ſolis & cometæ, ideóque innoteſcit diſtantia cometæ à ſole C S.

152. Si duobus diebus ſeſe invicem immediatè ſubſequentibus obſerventur longitudines H, I & latitudines C H, K I cometæ alicujus, dabitur arcus K C quem cometa motu diurno proprio deſcripſit. Quoniam enim in triangulo K M C, datur angulus quem metitur arcus I H longitudinum differentia, ſimulque nota ſunt latera K M, C M, quæ ſunt datarum latitudinum K I, C H complementa, innoteſcet arcus K C. Si verò altera latitudo fuerit auſtralis, putà C H, altera Borealis ut G N, latus G M eſt ſumma latitudinis G N & quadrantis N M, ac proindè etiam in hoc caſu dabitur arcus C G.

153. Iiſdem manentibus, inveniri poteſt nodus O orbitæ cometæ datis enim in triangulo M C K lateribus M C, M K, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia H I, dabitur angulus M K C, qui ex 180°. ſubductus, relinquit angulum O K I. Jam verò datis triangulo OKI, ad I rectangulo, latitudine IK, & angulo OKI, invenitur angulus IOK, daturque arcus OI, quo addito longitudini I, obtinetur diſtantia nodi O à principio arietis. Ex præcedentibus patet datis duabus aſcenſionibus rectis & declinationibus inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem & punctum in quo orbita illa æquatorem interſecat. 152.

154. Iiſdem poſitis ſit K locus cometæ primò obſervatus, à loco nodi O ſubtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus OI. Datis in triangulo KOI, ad I rectangulo, lateribus K I, O I, dabitur arcus K O quem cometa à primo obſervationis die uſque ad Eccliptıcam deſcripſit. Jam verò arcus K O conferatur cum arcubus deſcriptis ab initio obſervationis cometæ in K, ad datum uſque aliquod momentum ſingulis diebus pro arbitrio aſſumptum. Hinc proportionali parte adhibitá, circiter colligetur tempus quo cometa ſecuit Eccliptıcam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jam ad orbem cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis, tres quas *Famſtedius* habuit *Dec.* 21. *Jan.* 5. & *Jan.* 25. (b) Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE primâ vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413 BE ſecundâ vice 421, OD 10186, X 8528,4 MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam tb 5640. Et per hanc operationem tandem diſtantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ♋ & aſcendentem in ♑ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61 gr. 20′ $\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8 gr. 38′, & eſſe in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7 gr. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabulâ ſinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis $16\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tan-

156. 155. Si cometa primò obſervetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis obſervetur, accurate trajectis per quatuor illas ſtellas duobus filis in ſuperficie globi cœleſtis, interſectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore obſervationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius ſemita in ſuperficie globi cœleſtis delineabitur.

156. Accuratè deſignatis in ſuperficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propemodum tranſire videbitur; Hæc igitur loca fere ſunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quare ſi filum per duo loca tranſiens extendatur donec Eclipticam & æquatorem ſecet, habebuntur locus nodi, & inclinatio orbitæ cometicæ, ſimulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

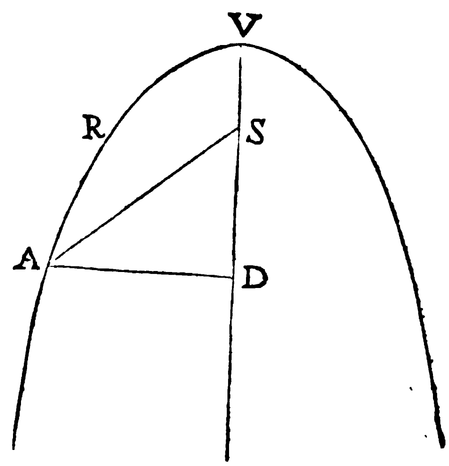
(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione ſequentes determinationes poſſint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex conſtructione prop. præced. & ex iis quæ huic propoſitioni addidimus.

Tandem ut conſtaret an cometa in orbe ſic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in tabulâ ſequente videre licet.

	Diſtant. Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obſ.	Lat. Obſ	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6 . 32′	8 . 18$\frac{1}{2}$′	♑ 6.31$\frac{1}{3}$	8.26	+ 1	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13 . 13$\frac{2}{3}$	28 . 0	♓ 13.11$\frac{3}{4}$	28.10$\frac{1}{12}$	+ 2	− 10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29$\frac{2}{3}$	♉ 16.59$\frac{7}{8}$	15.27$\frac{2}{5}$	+ 0	+ 2$\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29 . 19$\frac{3}{4}$	12 . 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3$\frac{1}{2}$	− 1	+ $\frac{1}{2}$

Poſtea vero *Halleius* noſter orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quam per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′

(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus inſtituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, ſitque VS, diſtantia umbilici à vertice $= f$, erit parabolæ latus rectum principale $= 4f$. Fiat $AD = x$, erit ſpatium $VRAS = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà bb, habebitur æquatio $24fbb = x^3 + 12f^2x$. Reſolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per conſtructionem geometricam, adhibitis parabolâ & circulo, innoteſcet ordinatim applicata A D. Datâ autem AD, dabitur VD, (per theor. 2. de parab.) quarè nota quoque erit recta compoſita ex DV & VS, cui æqualis eſt recta S A. (ibid.), ideóque recta illa dabitur magnitudine. Præterea datur etiam D A, quarè nota eſt ratio inter S A & A D, id eſt, inter radium & ſinum rectum anguli A S D, quem ſcilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data eſt S A longitudine, quare rectæ S A longitudo & in-

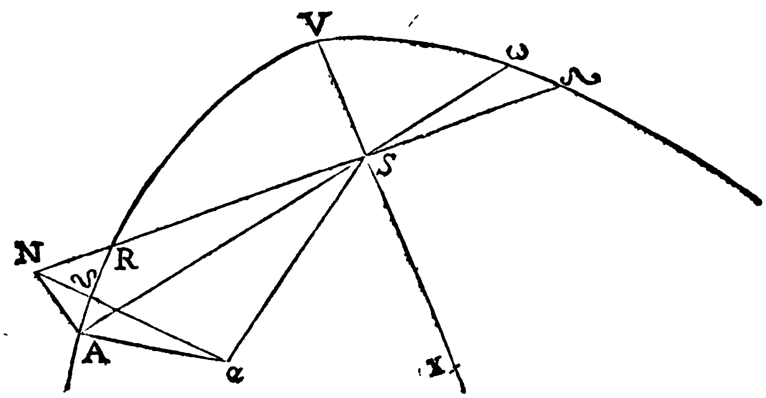


clinatio ad axem calculo determinari poſſunt.

De Mundi Systemate.

$20'\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* $8^{d}.\ 0^{h}.\ 4'$: diſtantiam vero perihelii a nodo aſcendente in orbitâ cometæ menſuratam invenit eſſe $9^{gr}.\ 20'$, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tem-



158. 158. Referat ♌ ω V, Cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, ſitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum obſervationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus ſit axis V X poſitione datus; innoteſcat tempus quo cometa in perihelio V verſatur, ſitque ♌ ♈ linea nodorum poſitione cognitâ. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur ſpatium quod ſit ad ſpatium ω V S, cognitum (per theor. 4. de parab.) ut intervallum inter tempus datum & ſuprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum & obſervationem cometæ in ω; ponatur ſpatium illud dato rectilineo, putà bb, æquale. Deinde (157.) ipſi bb æquale fiat ſpatium parabolicum V R A S, & inveniatur tam poſitio quam magnitudo rectæ S A reſpectu S V, cujus poſitio & magnitudo reſpectu diſtantiæ aphelii terræ à ſole priùs notæ ſunt. At ſi cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in prop. 31. lib. 1. expoſitas, ducatur recta SA, talis ut area V R A S, ſit ad totam ellipſeos aream, ſicut intervallum inter tempus datum & momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum eſt, dabiturque rectâ S A tam poſitione quam magnitudine. Jam verò in utroque caſu ex A ad nodorum lineam ♈ ♌ erigatur normalis A N, rectæ ♈ ♌ occurrens in N; ex eodem A, ad Eclipticæ planum demittatur perpendicu-

lum

Tempus verum.			Diſtantia Cometæ à ☉	Long. comp.		Lat. comp.	Errores in. Long.	Lat.
	d.	h. ′			gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec.	12.	4.46	28028	♑	6.29.25	8.26. 0 Bor.	− 3. 5	− 2. 0
	21.	6.37	61076	♒	5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+ 1. 7
	24.	6.18	70008		18.48.20	25.22.40	− 1. 3	− 0.25
	26.	5.21	75576		28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+ 0.44
	29.	8. 3	14021	♓	13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+ 0.12
	30.	8.10	86661		17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	− 0.33
Jan.	5.	6. 1½	101440	♈	8.49.49	26.15.15	+ 0.56	+ 0. 8
	9.	7. 0	110959		18.44.36	24.12.54	+ 0.32	+ 0.58
	10.	6. 6	113162		20.41. 0	23.44.10	+ 0.10	+ 0.18
	13.	7. 9	120000		26. 0.21	22.17.30	+ 0.33	+ 0. 2
	25.	7.59	145370	♉	9.33.40	17.57.55	− 1.20	+ 1.25
	30.	8.22	155303		13.17.41	16.42. 7	− 2.10	− 0.11
Feb.	2.	6.35	160951		15.11.11	16. 4.15	− 2.42	+ 0.14
	5.	7. 4½	166686		16.58.25	15.29.13	− 0.41	+ 2.10
	25.	8.41	202570		26.15.46	12.48. 0	− 2.49	+ 1.14
Mar.	5.	11.39	216205		29.18.35	12. 5.40	+ 0.35	+ 2.24

Apparuit etiam hic cometa menſe *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxoniâ* à D^{no}. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

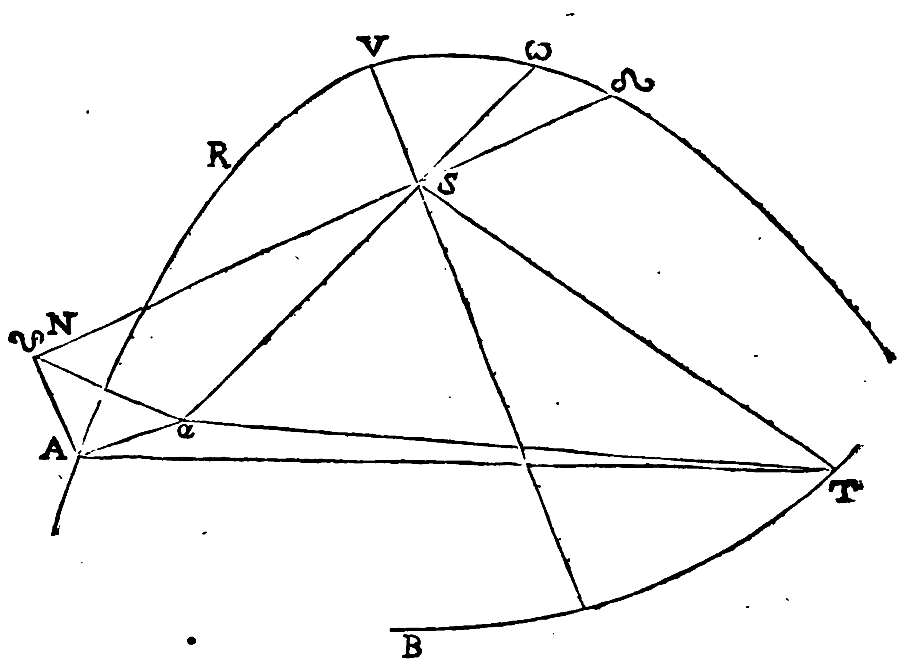
No-

lum eidem rectæ occurrens in a, junganturque a N, a S, erit angulus A N a, inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ ac proindè cognitus (146). Deindè quoniam noti ſunt anguli V S A, V S N, notus quoquè erit angulus NSA, horum ſumma vel differentia. Quarè in triangulo rectangulo N a A, datis latere N A, & angulo A N a, innoteſcent reliqua latera N a & A a. Præterea in triangulo rectangulo S N a, dantur latera S N & N a, ideóque dabuntur latus S a, & angulus N S a. 158. Sed (145.) datur poſitio rectæ S N, quarè nota erit poſitio rectæ S a, hoc eſt, cometæ longitudo heliocentrica, ſive locus cometæ heliocentricus ad Eclipticam reductus. Denique in triangulo S A a rectangulo ad a, nota ſunt omnia latera, ac proindè dabitur angulus A S a, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet viciſſim invèniri poſſe tempus quo cometa datum in orbe ſuo locum tenet.

DE MUNDI SYSTEMATE. *Novem.* $3^d. 17^h. 2'$, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29gr. 51'. cum lat. bor. 1gr. 17'. 45'',

Novem. $5^d. 15^h. 58'$ cometa erat in ♍ 3gr. 23' cum lat. bor. 1gr. 6'.

No



159. 159. Iiſdem manentibus ſit BT orbis magnus, ſitque tellus in T ad tempus datum. Jungantur T A, T a, erit planum trianguli T A a, ad planum Eccliptic æ normale (prop 18. lib. 11. elem.). Jam in triangulo T S a, in plano Eccliptic æ datur latus S a, (158.), notumque eſt latus S T, ex theoriâ telluris, & utrumque latus in partibus mediocris diſtantiæ telluris à ſole expreſſum habetur. Præterea ob latera illa poſitione cognita, datur angulus T S a, ab illis comprehenſus, quarè innoteſcent latus T a, & angulus S T a; Sed datur T S poſitione, nempe locus ſolis ad tempus datum, nota igitur eſt poſitio rectæ Ta, hoc eſt, cometæ longitudo geocentrica, ſive locus cometæ geocentricus ad Eccliptica m reductus. Deindè in triangulo rectangulo A a T, dantur latera duo in partibus mediocris diſtantiæ telluris à ſole expreſſa (158 & ex theoriâ telluris). Quarè innoteſcet angulus A T a, hoc eſt, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenuſa T A, diſtantia ſcilicet cometæ à terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data obſervationum tempora, inſtituto calculo, loca cometæ poſſint computari. Clariſſ. Halleius iiſdem uſus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas conſtruxit. Harum tabularum normam videat Lector in ejuſdem Celeberrimi Viri opuſculo quod inſcribitur:

come-

Novem. 10^d. 16^h. 31$'$ cometa æqualiter diſtabat à ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abſuit ab eâ. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15$'$ cum lat. bor. 1gr. 41$'$ ferè, τ verò ♍ 17gr. $3\frac{1}{2}$, cum lat auſtr. 0gr. 34$'$. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15gr. $39'\frac{1}{4}$, cum lat. bor. 0gr. $33\frac{1}{2}$. Sit diſtantia cometæ à rectâ illâ 10$'$ vel 12$'$ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7$'$, & differentia latitudinum $7'\frac{1}{2}$, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15gr. 32$'$ cum lat. bor. 26$'$ circiter.

Obſervatio prima ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas abundè ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in obſervatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30$'$. 22$''$. latitudo borealis 1gr. 25$'$. 7$''$. & diſtantia ejus à ſole 115546.

Porro *Halleius* obſervando quod cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſs.* anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & inſigni (præterquam quod ſub mortem

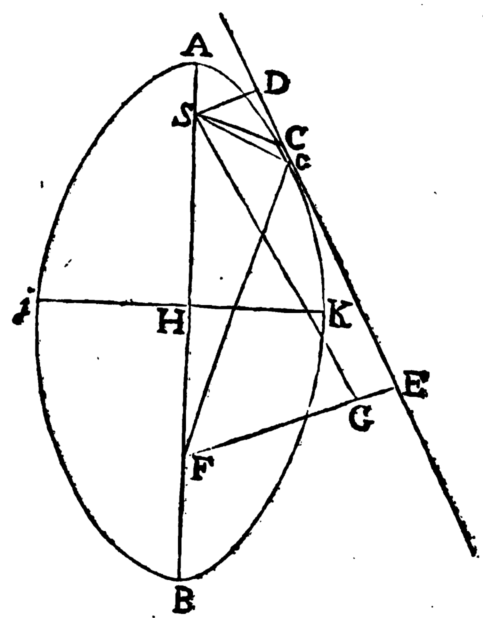
cometographia, ſeu Aſtronomiæ cometicæ Synopſis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas deſcribere & duas Kepleri leges obſervare ponantur, hoc eſt, ſi temporum periodicorum quadrata ſint ut cubi mediocrium diſtantiarum à ſole & areæ ellipticæ radiis ad ſolem ductis ſint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omneſque motûs cometarum circumſtantiæ definientur, quod elegantiſſime præſtitit D. Bouguer in monum. Pariſ. an. 1733. Clariſſimi Viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus obſervationibus à ſe invicem parum diſtantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ ſuæ loco, & exigua ejuſdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria obſervationum tempora parum à ſe invicem diſtant, portio orbitæ hoc temporis intervallo deſcripta conſiderari poterit tanquam linea recta vel ipſamet tangens orbitæ motu uniformi percurſa, ideoque portio hæc rectilinea orbitæ & ipſa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem 4. & per ea quæ huic lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantiſſimâ methodo quæ in monum. Pariſ. loco citato legitur. 160.

De Mundi Systemate.

tem *Cæſaris*, cauda ob incommodam telluris poſitionem minùs ap-



160 His præmiſſis, ſit S ſol, C c exigua orbitæ cometicæ portio ex tribus obſervationibus determinata. Quoniam nota eſt S C, diſtantia ſcilicet cometæ à ſole atquè etiam innoteſcit angulus S C D, dabitur perpendicularis SD, hujus anguli SCD ſinus, ſumpto S C, pro radio. Dicatur S C $=a$, S D $=b$, deſignet e, ſpatiolum C c, tempuſculo f percurſum, ſitque $x=$ A B, ſeu axi principali ellipſeos quam cometa circà ſolem in umbilico S, poſitum integro tempore periodico t, deſcribit. Ut determinentur quantitates x & t, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit q axis principalis ellipſeos quam planeta deſcribit, n tempus periodicum, dicaturque p peripheria circuli cujus diameter eſt q. Quoniam axis principalis ellipſeos eſt ſumma maximæ & minimæ diſtantiæ planetæ à ſole, erit diſtantia mediocris planetæ à ſole æqualis dimidio axi principali, hoc eſt $\frac{1}{2}x$ eſt diſtantia mediocris cometæ, & $\frac{1}{2}q$ diſtantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t=\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda ſupereſt altera expreſſio temporis periodici t. Quoniam C c, eſt portio orbitæ admodum exigua, ſector C S c, conſiderari poterit inſtar trianguli evaneſcentis cujus area $\frac{1}{2}$ S D $\times$ C c $=\frac{1}{2}be$. Quarè, per alteram Ke-

plerii

apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet par- Liber Tertius. Prop. XLI. Probl. XXI.

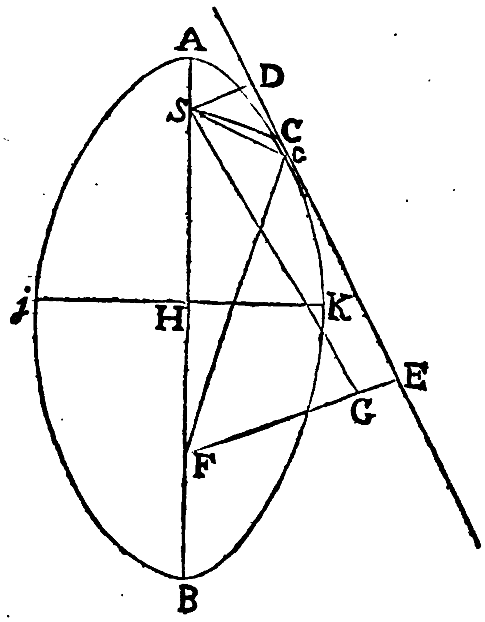
pleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}$ $b\,e$ eſt ad f, ut area tota ellipſeos A C B I, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t = \frac{f}{\frac{1}{2}be} \times$ A C B I. Nunc ut obtineatur area A C B I, ex puncto C, ad alterum umbilicum F, agatur recta C F $=$ A B $-$ S C $= x - a$ (theor. 3. de ellipſi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem C c productam in E, demittatur perpendicularis F E, ſitque S G parallela rectæ D E, triangula rectangula S C D, F C E ſimilia ſunt, ob angulos S C D, F C E, æquales (theor. 4. de ellipſ.) ideóque S C (a) : S D (b) $=$ F C $(x-a)$: F E $= \frac{bx - ab}{a}$, ac proindè F G, ſeu F E $-$ S D $= \frac{bx - 2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum ſimilitudinem) S C (a) : C D $(\sqrt{a^2 - b^2})$ $=$ F C $(x-a)$: C E $= \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$, & hinc D E, vel S G, ſeu C E $+$ C D $=$ $\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2-b^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed F G $= \frac{bx - 2ab}{a}$ (ex dem.), quarè eſt S F $= \frac{\sqrt{b^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2 + a^2x^2 - b^2x^2}}{a^2} =$ $\sqrt{\frac{a^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque diſtantia S H vel F H umbilici alterutrius à centro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2 - 4ab^2x + 4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum S I H rectangulum in H, & per theor. 3. de ellipſi) erit I H $=$ $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{a^2x^2 + 4ab^2x - 4a^2b^2}{4a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{ax - a^2}$ ac proindè axis minor I K $= \frac{2b}{a}\sqrt{ax - a^2}$, & factum ex axe majori in minorem $=$ $\frac{2bx}{a}\sqrt{ax - a^2}$. Sed eſt factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumſcripti, & præterea (249. lib. 1.) area rectanguli hujus eſt ad aream ellipſeos ut quadratum axis A B, ad aream circuli huic quadrato inſcripti; quarè $q^2 : \frac{1}{4}qp = \frac{2bx}{a}\sqrt{ax - a^2}$: A C B I $= \frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax - a^2}$. Tandem in ultimâ expreſſione temporis periodici loco areæ A C B I, ſubſtituatur illius valor modo inventus, fiet $t = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax - a^2}$, collatiſque duobus ipſius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}} = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax - a^2}$, & reductâ æquatione $x = \frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2}$. Jam ſi in expreſſionibus axis minoris & temporis periodici ſubſtituatur valor ipſius x, erit axis minor I K $= 2ben\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q - ae^2n^2}}$ & tempus periodicum $= f^3p^3n \times \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\overline{f^2p^2q - ae^2n^2}|^{\frac{3}{2}}}$. Hinc patet determinari poſſe omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis & poſitivis exprimantur, orbita A C B I erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verè circulus eſt ſpecies quædam ellipſis, cometa circulum quoque poterit deſcribere, in eo autem caſu æquales erunt diſtantiæ S A, S C, S B, axiſque A B duplus fiet diſtantiæ S C, ac proindè $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q - ae^2n^2} = 2a$, & hinc $e = \frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor ſcilicet ſpatioli C c à cometa tempore f percurſi. Si $e\,a$ ſit cometæ velocitas ut fiat $ae^2n^2 = f^2p^2q$, tunc infinito æquales evadent expreſſiones axis majoris, minoris & temporis periodici; quare orbita cometæ mutabitur in ellipſim infinite oblongatam ſeu parabolam, ideóque cometa reditum non habet. Tandem ſi ae^2n^2, ſit major quam 161.

 f^2

DE MUNDI SYSTEMATE. partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole par-



162. f^2p^2q, negativa fit expreſſio axis majoris & orbita abit in hyperbolam ac proindè cometa nunquam futurus eſt iterum conſpicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum telluris motu conferatur. Sit q dupla diſtantia mediocris terræ à Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus ſydereus ſeu intervallum 365. dier. 6^{hor}. $9'$: fiat mediocris diſtantia telluris à ſole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, & $p = 62831853$, ſpatium C c unius diei intervallo cometa ponatur deſcripſiſſe. His valoribus ſubſtitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{5918265995\,3557939 \times a}{5918265995\,3557939 - ae^2}$ & $t = \frac{1859278095175402232 \times a^{\frac{3}{2}}}{\overline{5918265995\,3557939 - ae^2}^{\frac{3}{2}}}$. Jam nihil ampliùs faciendum ſupereſt, niſi ut in caſibus particularibus loco a, & e, ſubſtituantur valores per obſervationem determinati. Utrum verò cometa rediturus ſit vel non cognoſcetur, ſi quantitas ae^2, minor majorve reperiatur numero conſtanti 5918265995 3557939. Minùs prolixus fiet calculus, ſi diſtantiam mediocrem telluris à ſole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - ae^2}$, & $t = \frac{1859278095 \times a\sqrt{a}}{\overline{591826599 - ae^2} \times \sqrt{591826599 - ae^2}}$. Exemplo ſit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex obſervationibus Clariſſ. Caſſini colligitur die 13ª. Octobris an. 1729. diſtantiam S C cometæ à ſole, fuiſſe partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo deſcriptam, fuiſſe partium $122\frac{452}{10000}$, atque angulum D C S, fuiſſe 82°. 11′. Hinc invenitur quantitas ae^2 major quam 591826599, ideóque

(161)

partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61gr. 6′. 48″.; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7d. 23h. 9′; diſtantiam perihelii à nodo aſcendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex obſervationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ ſequente.

(161) orbita cometæ eſt hyperbola, ac proindè expectandus non eſt hujus cometæ regreſſus. Cæterùm hæc vera ſunt in eâ duntaxat hypotheſi quod cometæ duas Kepleri leges obſervent.

(d) 163. * *Revolvi poſſit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium diſtantiarum à ſole, tempus periodicum cometæ dicatur t, tempus periodicum terræ circà ſolem dicatur T, diſtantia mediocris terræ à ſole ſit D, axis major ellipſeos à cometa deſcriptæ ſit $2a$, ideóque mediocris diſtantia cometæ à ſole $= a$; 163.
erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat D = 10000 partibus T = 365 dieb. 6hor. 9′ = 525969′, t = 575 annis, invenietur $2a$, ſeu axis major ellipſeos à Cometâ deſcriptæ, partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantiâ telluris à ſole earumdem partium 10000. in hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi poteſt.

(e) * *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo Clariſſ. D. Bouguer num. 160. & ſeq.

Tem-

Tempus verum	Long. obſ.	Lat. Bor. obſ.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h.	gr.	gr.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47″	♌ 29.51′. 0″	1.17.45″	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52 15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17 38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20 40 23	23.43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26 18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.26	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hic rectè definitum fuiſſe.

In tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr.

30′.

30′. cum latitudine auſtrali 0gr. 30′. Eâdem horâ *Galletius A. venioni* (id eſt, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. ſine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 20′ *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine au ſtrali 1gr. 00′. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Aveni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1gr. ‹ Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ ‹ tâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit ir dio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt tri recta linea in virginis auſtrali manu *Bayero* ψ, & altera trema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12 cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *A* *gliâ* in latitudine $42\frac{1}{2}$ graduum, horâ quintâ matutinâ *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prop cum latitudine auſtrali 1gr. 30′, uti à cl. *Halleio* ac

Nov. 19. hora mat. $4\frac{1}{2}$ *Cantabrigiæ*, cometa (o vene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2gr. boreaz ſus. Erat autem ſpica in ♎ 19gr. 23′. 47″ ‹ 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* *gliâ*, cometa diſtabat à ſpica ♍ gradu uno ‹ dinum exiſtente 40′. Eodem die in Inſula diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradus unius. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. $38\frac{1}{2}$g tutinâ (id eſt, horâ 10ª *Londini*) cometar ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctur inter eoſdem quaſi $\frac{3}{4}$gr. Et (f) ex his ‹ collatis colligo quod hora 9.44′ *Londi* 18gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 25′

(f) * *Ex his obſervationibus inter ſe collatis* via cometæ inter ſtellas determinatur, & hinc colliguntur cometæ longitudo & latitudi tione nenſe

tem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine auſtrali 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, horâ ſextâ matutinâ *Venetiis* (id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat cometa à ſpicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. 7¼ cometam obſervarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ* cometa viſus eſt prope principium ſcorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum ſpicâ virginis, id eſt, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* in *Indiâ Orientali*, (id eſt ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta eſt diſtantia cometæ à ſpicâ ♍ 7gr. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter ſpicam & lancem, ideoque verſabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. auſtrali 1gr. 11′ circiter; & poſt horas 5 & 40′ (ad horam ſcilicet quintam matitunam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. auſtr. 1gr. 16. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine auſtrali 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♏ 2gr. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♏ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id eſt, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hockius* noſter cometam vidit in ♏ 3gr. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ tranſit per ſpicam virginis & cor leonis non exactè quidem, ſed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea à cometâ per ſpicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus cordis leonis interpoſito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & ſpicam virginis tranſiens, eclipticam ſecuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′.

Et

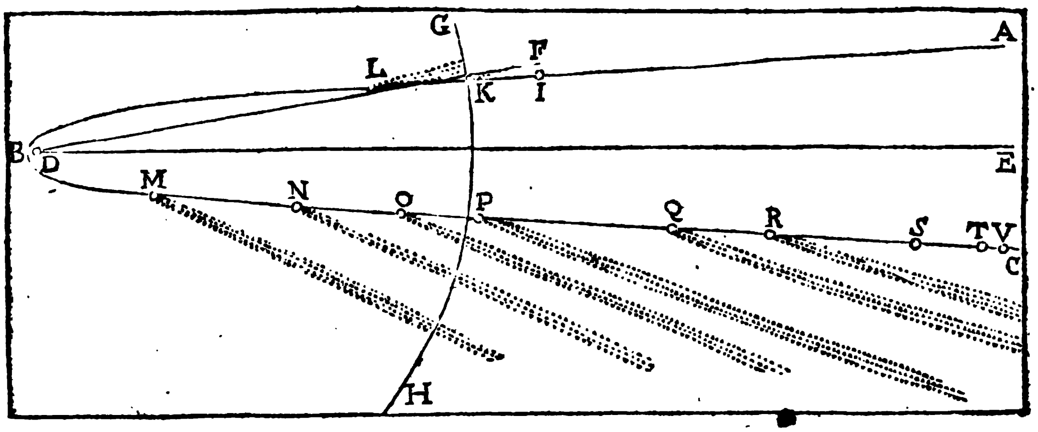
Et ſi cometa locatus fuiſſet in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuiſſet 2gr 26′. Sed cum cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hâc lineâ boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem ſpicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuò augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1gr. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad ſpicam ♍, declinans aliquantulum à ſtellâ iſtâ, juxta *Hockium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & cauda æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione ſolis boream verſus.

Nov. 23. ſt. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id eſt hora $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♍ 8gr. 8′, cum latitudine auſtrali 2gr. 31′, captis ſcilicet ejus diſtantiis à ſtellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum ſolis cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♍ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & ſpicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hockii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, ſine notabili errore, ſtatui poteſt 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam & decreviſſe volunt, & *Cellius* & obſervator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & obſervatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♍ 11gr. 45′; ideoque

oppoſita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali alâ, & deſinebat prope ſtellas *A*, α, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{2}$gr. cum latitudine boreali circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β,) deſinens in ♑ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longè ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}$gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtellâ ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à ſtellâ illâ 2gr. $\frac{1}{2}$ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeïæ*, æqualiter diſtans à β & *Schedir*, & diſtantiam ab utrâque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr. cum latitudine $47\frac{1}{2}$gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat 40gr.; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce

diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum theoriâ planetarum, & cum accuratis obſervationibus aſtronomicis accuratè congruit, non poteſt non eſſe vera. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



Cæterùm trajectoriam quam cometa deſcripſit, & caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *ABC* denotat trajectoriam cometæ, *D* ſolem, *DF* trajectoriæ axem, *DF* lineam nodorum, *GH* interſectionem ſphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejuſdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Decemb* 29, *P* locum *Jan.* 5. *ſequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Obſervationes vero ſequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non niſi ſemiſſem gradus unius longa tubo decempedali viſa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr. longa, ſolique directè

DE MUNDE SYSTEMATE.

calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio verſantem ex radiis ſolaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad ſolem concepit, & calorem illum diutiſſimè conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aëre conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id eſt, pedes plùs minùs 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: (k) & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porrò notandum eſt quod cometa menſe *Decembri*, ubi ad ſolem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea menſe *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem ſolis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus cometæ per calorem ſuum emittit. Cæ-

163. (k) * *Et optarim rationem veram.* Clariſſ. Hermannus Boerhaave in elementis Chemiæ, diligentiſſimis experimentis ſe inveniſſe refert eò diutiùs calorem in corporibus retineri quo majora ſunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejuſdem diametri, ejuſdemque caloris, diverſæ ſint denſitatis, quæ denſiora ſunt, caloris quoque ſunt tenaciora; denſitas enim ignem coercet, illiuſque egreſſum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter ſe permiſceri poſſunt, hinc patet in ipſâ caloris conſervatione non leves varietates oriri poſſe. Hæ ſunt fortaſsè latentes cauſæ quæ Newtonum in eam ſuſpicionem induxerunt durationem ſcilicet caloris augeri in minori ratione quam eſt diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc ſententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

Cæterùm de cometarum
jubar eſſe ſolis per tranſluci
vel oriri ex refractione lucis
tæ in terram, vel denique n
metæ jugiter ſurgentem &
Opinio prima eorum eſt qui
opticarum. Nam jubar ſolis
tur, niſi quatenus lux reflect
ticulis per aërem ſemper v
craſſioribus infecto ſplendidiu
aëre clariore tenuius eſt & æ
materiâ reflectente nullum e
tenus in jubare eſt, ſed quâte
tros. Nam viſio non fit niſi
gunt. Requiritur igitur mate
dæ, ne cœlum totum luce ſoli
Opinio ſecunda multis premit
variegantur coloribus: qui tan
tes inſeparabiles. Lux fixaru
tranſmiſſa demonſtrat medium
re. Nam quod dicitur fixas a
viſas fuiſſe, id, quoniam rari
nubium refractioni fortuitæ.
tillatio ad refractiones tum oc
dæ ſunt: quippe quæ admotis
ris & aſcendentium vaporum t
guſto pupillæ ſpatio per vices
vitri objectivi aperturâ neutiqu
priori caſu generetur, in poſte
poſteriore caſu demonſtrat reg
cœlos ſine omni refractione ſe
caudæ non ſoleant videri in c
ſatis fortis, quia tunc radii ſe
ad oculos movendos, & prop

De Mundi Systemate.

(m) ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa. Sic enim cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultrà: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulò ultrà: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de ſolis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. *Londini*, verſabatur in ♓ 8gr. 41′, cum latitudine boreali 28gr. 6′, ſole exiſtente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. *Dec.* 29 verſabatur in ♓ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, ſole etiam exiſtente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in caſu terra verſabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione ſolis aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à ſole averſas aſcen-

163. (m) * *Sciendum eſt* Ut notum eſt ex teleſcopiorum theoriâ apud omnes paſſim rerum opticarum & catoptricarum ſcriptores. Sed eâ potiſſimum legi merentur quæ de lucis intenſitate, viſionis diſtinctione & teleſcopiorum beneficiis dedit Clariſſ. Vir Robert Smith in eximio opere optico.

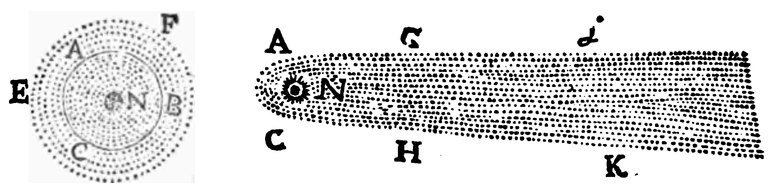
aſcendere confirmatur ex (a) legibus quas obſervant. Ut quòd in planis orbium cometarum per ſolem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione ſolis in eas ſemper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à ſole directè averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad ſolem propiùs accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: Præterea

(a) 164. * *Ex legibus quas obſervant.* Leges illæ quas obſervant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni ſententiâ apprimè congruunt. Cauda à cometæ capite vaporis inſtar in altum, id eſt, in partes à ſole averſas aſſurgens in plano orbis cometæ per ſolem tranſeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla eſt ratio cur ad hanc potius quam ad illam partem deflectat. Quia autem vapor à capite exiens duos motus ſimul componit, alterum ſcilicet aſcenſus recti à ſole, alterum verò progreſſus capitis, hinc fit ut cauda non directe à ſole averſa ſit, ſed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe ſuo progrediens relinquit; ſi tamen ſpectator in orbis cometici plano per ſolem tranſeunte conſtituatur, deviatio caudæ neutiquam ſentitur, quia tota in plano iſto jacet. Licet vapor aſſurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris reſiſtentiam, minus velociter quam caput ipſum progreditur, & quò altiùs aſcendit vapor eò fit rarior, id eſt, quò longior eſt cauda eò majorem experitur reſiſtentiam, ideóque præcedens caudæ latus quod ſcilicet proximum eſt partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, ſequens verò concavum ac proindè cauda non à ſole duntaxat averſa eſt, ſed etiam incurvatur. Hæc à ſole deviatio & curvatura eò minor eſt quò recta ſolem cometamque conjungens obliquior eſt ad cometæ orbitam; ſi enim cometa directè à ſole vel ad ſolem tenderet, cauda quoquè foret recta & à ſole directè averſa. Hinc patet in ipſo cometæ perihelio maximam eſſe caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta ſolem & cometam conjungens ad orbem cometæ normalis eſt. Prætereà ob prædictam licet admodum exiguam ætheris reſiſtentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens denſior eſt, ac proinde lucidior & diſtinctius terminata apparebit quam facies concava. Hæc ſunt præcipua caudarum phænomena quibus ſatisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas à capitibus oriri & in regiones à ſole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant.

165. Deſcriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda eſt illa quam Clariſſ. D. De Mairan in eximio opere de aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad ſolem proximè accedere obſervationibus compertum eſt; Hinc Newtonianæ attractionis legibus conſentaneum videtur ut aliquam ſolaris atmoſphæræ materiam cometa attrahat Cur autem materia hæc inſtar comæ vento agitatæ diſpergatur & ad ſolis oppoſitum dirigatur ex radiorum ſolarium impulſione oriri poteſt. Plurimis enim experimentis certum eſt ſolares radios omni prorſus impulſionis vi non carere. Clariſſ. Hombergius varia materiæ leviſſimæ filamenta radiis ſolaribus in vitri uſtorii foco objecta notabiliter impelli obſervavit. Lamellam quoque elaſticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una liberè penderet, collectis vitri uſtorii ope ſolaribus radiis expo-

DE MUNDI SYSTEMATE.

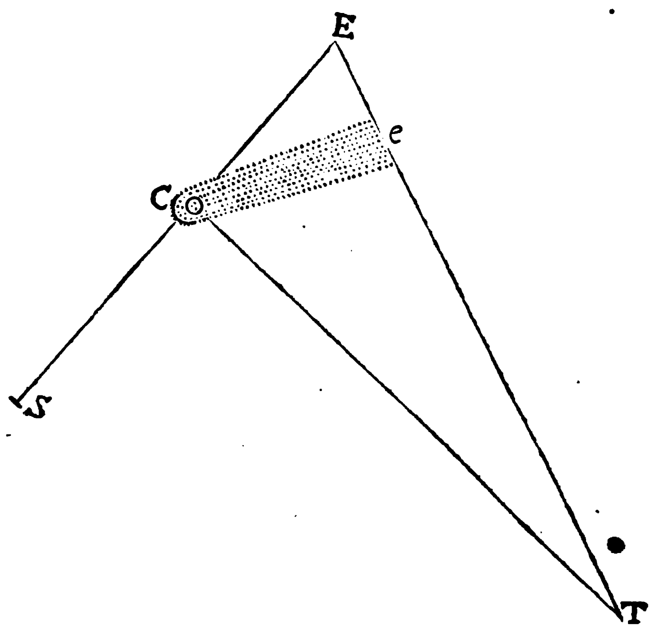
terea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ ſunt lineâ à ſole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſupe-



165. expoſita hæc lamella inſtar penduli ſenſibiliter ibat & redibat. Quamvis autem leviſſima ſit hic apud nos radiorum ſolarium impulſio, maxima tamen eſſe poteſt in ſpatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præſertim cum tenuiſſima ſit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti circtus atmoſphærâ EDF, in tranſitu ſcilicet propè ſolem collectâ, ità ut in majori à cometæ nucleo N, diſtantiâ levior rariorque ſemper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmoſphærâ ſolet obſervari. Sphæra interior ABC, ex iis ponatur conſtare particulis quæ radiorum ſolarium impulſioni poſſint reſiſtere, e contrà verò orbis ſuperior AFBDCE, leviores contineat particulas quæ huic impulſioni cedant, manifeſtum eſt radiorum ſolarium impulſione projici verſus ſolis oppoſitionem materiæ veſtigium BGHjK, quod figuram caudarum repræſentat. Ex dictis patet hanc ſententiam cum Newtonianis principiis conſentire; Et quidem Newtonus deſcribens poſteà Kepleri opinionem quæ eâdem ferè eſt, ab eâ non videtur alienus.

ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in ſolem, fumi & vapores aſcendere debent à ſole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectà petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



166. Longitudo caudæ hoc modo poteſt inveniri. Sit S ſol, C cometa cujus cauda Ce; ex cognitis ſolis & cometæ locis notus erit angulus TCE, dataque (per obſerv.) deviatione caudæ à ſolis oppoſito, dabitur angulus ECe, ac proinde innoteſcet angulus TCe, quem ſcilicet cauda efficit cum rectâ terram & cometam jungente. Præterea (per obſerv.) innoteſcit angulus ad terram CTe, quem cauda ſubtendit, quare (per theoriam cometæ) datâ cometæ diſtantiâ à terrâ, dabitur caudæ longitudo. 177.

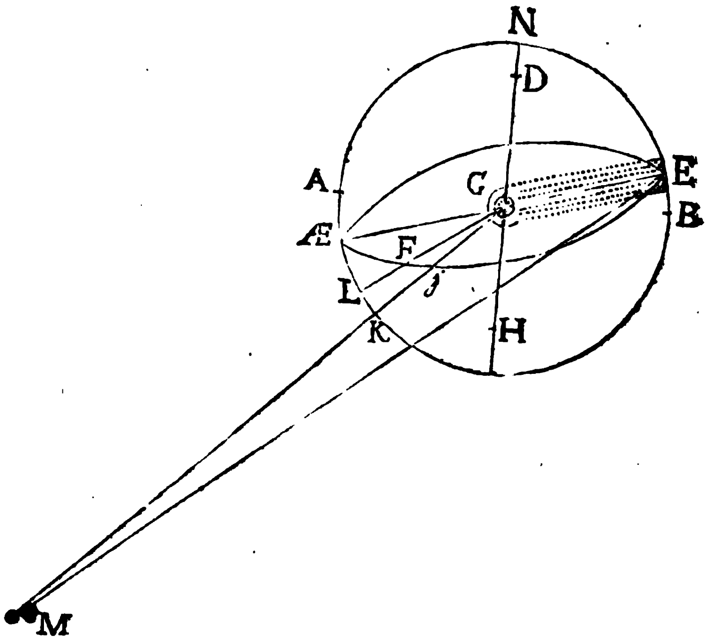
in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſiùs reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aëris noſtri, & motibus nubium caudas aliquâ ex parte obſcurantium oriantur; vel forte à partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aëris noſtri. Nam aër juxta ſuperficiem terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quàm aqua ejuſdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi

167. 167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiſcum, ſuâ humanitate, communicavit Clariſſ. Vir & in rebus Mathematicis Verſatiſſimus D. De Chezeaux. Methodum hanc deſcribere longius foret, paucis duntaxat exponemus quâ ratione longitudinem atque deviationem caudæ inveſtigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum deſcribatur ſphæra cujus radii GA, GE, ſint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hac ſphærâ planum Eccliptícæ parallelum habens polos in D & H, itemque concipiatur planum AKEB parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, ſit terra in M, ejus longitudo è cometâ viſa & ad planum orbitæ AKEB reducta, exprimetur per arcum KB, latitudo autem per arcum Kj. Quia verò datur (per obſerv.) longitudo cometæ é terrâ viſa, dabitur longitudo terræ è cometâ viſa; ſed datur latitudo cometæ (per obſerv.) & (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani AKEB, ad planum Eccliptícæ, itemque innoteſcit locus nodi B. Quare (per trigon. ſphær.) invenietur longitudo terræ reſpectu plani AKEB, cujus menſura eſt arcus BNAK, dabiturque latitudo Kj. Jam verò ductâ lineâ ME, ex terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo & latitudo è terra viſæ (per obſerv.) notæ ſunt, agatur GF parallela rectæ EM, eodem planè modo ac ſuprà innoteſcet poſitio puncti F in ſuperficie ſpheræ reſpectu plani AKEB, deſcriptoque arcu circuli maximi GFL, invenientur arcus BNAL & FL. Sed in triangulo ſphærico GjF, datis latere Gj, complemento ſcilicet ad jK, & latere GF, complemento ad FL, atque latere Fj, menſurâ anguli FGj, qui æqualis eſt angulo GME, invenietur angulus GFj. Tandem concipiatur planum circuli maximi tranſiens per puncta F, j, per centrum G, commune ſphæræ & cometæ atque per extremitatem caudæ E, cujuſque ſectio cum plano ANB, ſit recta EGÆ, formabitur alterum triangulum ſphæricum ÆFL, cujus

ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam *[b]) multis experimentis confirmatam, quod compreſſio aëris ſit ut pondus atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciprocè ut quadratum

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



jus jam innoteſcunt angulus ÆFL & latus FL, quarè dabitur latus ÆL, ac proindè etiam dabitur arcus BAÆ, ob datum arcum BAL; innoteſcet præterea arcus BE, atquè obtinebitur arcus ÆF, qui additus arcui Fj, dabit arcum Æj, ideóque dabitur arcus Ej, menſura anguli rectilinei jGE, vel MGE. Datis autem in triangulo rectilineo MGE, angulis MGE, GME & latere GM, dabitur latus GE, hoc eſt, longitudo caudæ. Si itaque habeatur diſtantia cometæ à terrâ in partibus mediocris diſtantiæ terræ à ſole expreſſa, in iiſdem quoque partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur diſtantia cometæ à nodo ex ſole viſa, ſi ex hâc diſtantiâ ſubtrahatur arcus BE, habebitur angulus quem recta per ſolem & cometam ducta comprehendit cum cauda GE, hoc eſt, deviatio cometæ à ſole. 167.

(b) * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt paſſim rerum Phyſicarum ſcriptores, ſed præterim Clariſſ. Muskembroek in Phyſicá. Videantur etiam tranſactiones Philoſophicæ an. 1671. num. 73.

De Mundi Systemate.

dratum diſtantiæ locorum à centro terræ) computationem (c) per corol. prop. XXII. lib II. ineundo, inveni quod aër, ſi aſcendatur à ſuperficie terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longè majori, quam ſpatii omnis infra orbem ſaturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aëris noſtri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes planetarum regiones uſque ad ſphæram ſaturni & longè ultrà. Proindè cum aër adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu atmoſphæra cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſuperficies nuclei deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quàm rariſſima. Et quamvis ob longè craſſiorem cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem ſolem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuò, fieri poſſit ut aër in ſpatiis cœleſtibus inque cometarum caudis non adeò rareſcat; perexiguam tamen quantitatem

168. (c) 168. * *Per corol. prop. XXII.* Sit (in figurâ prop. XXII.) S centrum terræ, SA ejuſdem ſemidiameter mediocris pedum 19615800 $= r$, AB pedum 850, & ideò SP $= 19616650 = a$, SF $= 2r$, dignitas hyperbolæ $fah = rr$, ideóque Aa $= r$, Ff $= \frac{1}{2}r$, & Bb $= \frac{rr}{a}$ ac proindè Aa $-$ Ff $= \frac{1}{2}r$ & Aa $-$ Bb $= \frac{ar - rr}{a}$. Denſitas AH ſeu St $= m = 33$, denſitas Bj, ſeu Su $= n = 32$, & denſitas FN, ſive SZ $= d$. His poſitis, (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyperbolâ), erit area thnz, ad aream thiu, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, & (per Cor. Prop. XXII. lib. 2.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Eſt autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{1961665}{170}$, & ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Denſitas ergò aeris in A ſeu in ſuperficie telluris ſe habet ad denſitatem aeris in F, ſeu in diſtantiâ ſemidiametri telluris ab eádem ſuperficie ut numerus reſpondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porro logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus reſpondet numerus 1617 & ideò logarithmo 3.20879349 reſpondere debet numerus unitate fere integrá major quam 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 reſpondet numerus major quam 1617 cum 151 zeris adſcriptis. Jam verò ſemidiameter terræ ſit ut prius 19615800 pedum Parallaxis ſolis ponatur 10″ cujus ſinus rectus eſt partium 485 poſito radio partium 10000000. Quoniam ſemidiameter orbis magni eſt ad ſemidiametrum terræ ut radius ad ſinum parallaxis ſolis (30. lib. 3.) erit ſemidiameter orbis magni pedum circiter 5000000000000. Sed ſemidiameter orbis Saturni circiter decuplo major eſt (phœn. 4.) erit igitur hæc ſemidiameter pedum

tatem aëris & vaporum ad
abundè ſufficere, ex hac c
& caudarum inſignis raritas
tibus. Atmoſphæra terreſtr
ſuâ paucorum milliarium, 8
curat & extinguit penitus:
tudinem, luce pariter ſolari
ritatis detrimento tranſlucer
let caudarum plurimarum ſple
cubiculo latitudine digiti unit
flectentis.

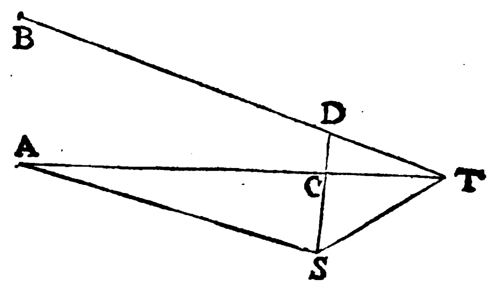
Quo temporis ſpatio vapo
cendit, (d) cognoſci ferè po

pedum 5000000000000, ideóque diar
ter ped. 10000000000000, ſive digitor
120000000000000. Eſt igitur ſphæra
turni ad globum cujus diameter eſt di
tus unus ut præcedentis numeri cubus
ve 1728 cum annexis 39 cyphris ad u
tatem; ſed ratio illa multò minor eſt
tione denſitatum modò inventâ; Q
globus aëris noſtri digitum unum latu
cum raritate quam haberet in altitu
ſemidiametri unius terreſtris impleret
nes planetarum regiones uſque ad ſphæ
Saturni & longe ultrà.

(d) 169. * *Cognoſci ferè poteſt.*
ferat S ſolem, A B trajectoriæ com
cæ portionem. Sit N cometæ nucl
ab A verſus B progrediens, C termi
caudæ. Ducatur recta à termino illo
ad ſolem, punctum d, ubi recta traject
riam ſecat, deſignabit locum ex quo
por in termino caudæ aſcendere cæpit
capite, ſi vapor ille rectà aſcendat à
le. Quia autem vapor non rectà aſcendi
ſole ſed vergit verſus partes A, quas com
reliquit (164) agatur recta S E, paral
la longitudini caudæ, vel potius (ob m
tum curvilineum cometæ) recta illa à
neâ caudæ divergat, atque trajectori
cometæ alicubi interſecet putà in D,
por qui nunc terminum caudæ conſtitui
nucleo cœpit aſcendere dum cometa

DE MUNDI SYSTEMATE.

dæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat à ſole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit à ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum cur-



170. 170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta ſunt, cometarum, quandiù nobis conſpicui ſunt, maxima poſſibilis diſtantia a ſole & terrâ definiri poteſt. Referat S ſolem, T terram, S T A diſtantiam cometæ à ſole, ſitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur à termino caudæ ſecundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, ſecans lineam T A in C, & quia cauda ſemper opponitur ſoli quam proximè, ideóque ſol, caput cometæ & terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ TA, in A, caput cometæ C neceſſariò reperietur inter T & A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, & lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci poſſunt, ſecant lineam T A, alicubi inter T & A. Quarè cometa non poteſt longius abeſſe à terrâ quam intervallo T A, nec à ſole quam intervallo S A ultrà ſolem, vel ST, citrà. Exemplo ſit cometa an 1680. cometa ille die 12. Dec. diſtabat 9°. à ſole & longitudo caudæ erat 35°. Quare conſtruatur triangulum TSA, cujus angulus T æqualis ſit diſtantiæ 9°. & angulus A ſeu angulus A T B æqualis ſit longitudini caudæ 35°., erit S A ad ST, id eſt, limes maximæ poſſibilis diſtantiæ cometæ à ſole ad ſemidiametrum orbis magni ut ſinus anguli T, ad ſinum anguli A, hoc eſt, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minùs diſtabat à ſole quam $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ terræ à ſole, & propterea verſabatur aut intrà orbem

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.

curvilineum cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. aſcendere cœperat à capite ante *Dec.* 11. ideóque aſcenſu ſuo toto, dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in viciniâ ſolis celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni conſtabat, qui à tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non priùs evanuit quam ob nimiam ſuam tam à ſole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuò à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et (e) hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolùm ſolida planetarum & cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt ac diutiſſimè conſervant.

bem Mercurii aut inter orbem illum & terram. Rurſus die 21. Decembr. diſtantia cometæ à ſole erat $32^\circ \frac{2}{5}$. & longitudo caudæ 70°. ergò ut ſinus $32^\circ \frac{2}{5}$. ad ſinum 70°, hoc eſt, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam & ſolem ad diſtantiam terræ à ſole & propterea nondum cometa exceſſerat ex orbe veneris. Die 28. Decembr. diſtantia cometæ à ſole erat 55°. & longitudo caudæ 56°. Quarè, iiſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, limes intervalli inter cometam & ſolem, nondum æquabat diſtantiam terræ à ſole & propterea cometa nondum exceſſerat ex orbe telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni opuſculo de mundi ſyſtemate deſcripſimus, aliorum cometarum diſtantias limitando inventum eſt cometas omnes, quandiù ſe nobis oſtendunt, verſari intrà ſpatium ſphæricum centro ſole & intervallo ſolis ac terræ vel duplicato vel ad ſummum triplicato deſcriptum. 170

(e) * *Et hinc rurſùs colligitur.* Legantur quæ dicta ſunt in ſcholio prop. XI. lib. 2.

Aſcenſum caudarum ex atmoſphæris capitum & progreſſum in partes à ſole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à (f) ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ impeditiſſimis in regionibus noſtris à radiis ſolis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à ſole aſcendere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideóque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum aſcenderit à ſole? Nam radii ſolares non agitant media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram æthereum cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam, quâ priùs tendebat in ſolem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa ſolem & eâ actione conantur à ſole recedere, at ſolis atmoſphæra & materia cœlorum vel planè quieſcit, vel motu ſolo quem à ſolis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in viciniâ ſolis, ubi orbes curviores ſunt, & cometæ intra denſiorem & eâ ratione graviorem ſolis atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus ſolem gravitando, movebuntur circa ſolem in ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in

170. (f) * *Non eſt a ratione prorſus alienum* (165.).

in ſolem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus ſolem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in ſolem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrimè ſervent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel indè poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad ſolem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubindè in periheliis cometarum illorum, qui ad uſque atmoſphæram ſolis deſcendent, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deindè paulatim in planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad conſtitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem ſolis vapores copioſè ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut (g) aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò creſcunt, dein magnâ ex

(g) * *Ut aliqui cum ratione philoſophantur.* Horumce philoſophorum rationes videre eſt paſſim apud omnes cultiores phyſicos. Legantur tranſact. philoſop. an. 1687. 1694. 1729 & monum. Acad. Pariſ. an. 1703.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ in dies augetur, & liquores, niſi aliundè augmentum ſumerent, perpetuò decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porrò ſuſpicor ſpiritum illum, qui aëris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

Atmoſphæræ cometarum in deſcenſu eorum in ſolem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (eâ certè in parte quæ ſolem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum à ſole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad ſolem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus à ſole ac terrâ diſtantiis obſcurius apparuit poſt perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novem.* 19. cometa hicce luce ſuâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat ſpicam virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *Montenaro Nov.* 20, ſt. vet. cometa apparebat major ſtellis primæ magnitudinis, exiſtente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longè cedere cometæ, qui menſe *Novembri* ante ſolis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſ-

obſcura & exigua. Nam anno 1668. *Mart.* 5. ſt. nov. horâ ſeptimâ veſpertinâ *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occaſum ſolis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſuprà modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubindè notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Undè etiam in *Luſitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infrà horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quod caput à ſole receſſit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106. *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum ſolis brumalem. Indè verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe ſoli vicinum. *A ſole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno, ab horâ tertiâ* (rectius ſextâ) *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante ſolem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia ſolem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ ſcilicet) *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* (cauda) *jam minus flagraret, reddita eſt* (capiti) *cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* (id eſt, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. olymp. 101.) *& aſcendens*

dens

dens uſque ad cingulum orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis ſolaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulò ſuperare videbatur, ſed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquaſſe traduntur.

(h) Diximus cometas eſſe genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa ſolem revolventium. Et quemamodum è planetis non caudatis minores eſſe ſolent, qui in orbibus minoribus & ſoli propioribus gyrantur, ſic etiam cometas, qui in periheliis ſuis ad ſolem propiùs accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne ſolem attractione ſuâ nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. (i) Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iiſdem orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PRO-

171. (h) 171. * *Diximus cometas eſſe genus planetarum*, idque graviſſimis rationibus confirmatur. Hác enim factá hypotheſi, computatiſque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis; hujuſmodi trajectoriæ ſemper cum phænomenis congruunt quamproxime. Clariſſ. Halleius ſuſpicatur cometam an. 1531. ab Appiano obſervatum, eundem fuiſſe cum illo qui anno 1607 deſcriptus eſt à Keplero & Longomontano & quem Halleïus ipſe redeuntem obſervavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, ſolaque periodorum inæqualitas adverſari videbatur. Verum tanta non fuit inæqualitas illa ut cauſis phyſicis adſcribi non poſſit. Saturni enim motus à cæteris planetis & præſertim à jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum ſit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit Clariſſ. Caſſinus in Mon. Pariſ. 1699. cometam diverſis temporibus obſervatum ideóque pro duobus cometis uſurpatum, unum eundemque eſſe poſſe, licet non conveniant inter ſe omnia motuum elementa; fieri ſcilicet poteſt ut unus idemque cometa bis obſervatus non ſecet Eccliptícam ſub eodem angulo & in iiſdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non ſit eadem. Talibus enim erroribus aliiſque plurimis Luna eſt obnoxia. Cæterum Clariſſ. Halleïus diligenter perpenſis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum eſſe prædixit.

(i) * *Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri poſſunt per methodum num 160. expoſitam.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Aſſumatur poſitio plani trajectoriæ, per propoſitionem ſuperiorem inventa; & ſeligantur tria loca cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quàmmaximè diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longè à perigæo abeſſe. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum ſolis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI. lib. I. inſtitutas, deſcribatur ſectio conica: (m) & ejus areæ, radiis à ſole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem pri-

(k) * *In perigæo verſari convenit.* Verſante enim cometa in perigæo vel ſaltem non longe à perigæo, illius motus magis accurate definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in prop. præced.) loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc eſt, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam reverâ habere obſervatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ ſemitâ ejuſque partium magnitudine reſpectu ſemitæ telluris ejuſque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam deſcribit ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui ſit ad 1, ut tempus inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam, hoc eſt, ut A ad B. Sumatur præterea G ad 1, ut areæ inter obſervationem primam & ſecundam ad aream inter obſervationem ſecundam & tertiam, id eſt, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad ſolem ductis deſcribentur. Sit S, tempus verum inter obſervationem primam & tertiam. Si reperiatur $T = S$, & $G = C$, inventa plani trajectoriæ poſitio vera erit & accuráta, nullâ indigens correctione. Sin aliter erit $T - S$, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam ortus nimirum ex poſitione plani trajectoriæ minus accuratâ, & $G - C$, erit error ex eâdem cauſâ ortus in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam, ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam, ut patet; nam in utroque caſu unitas uſurpatur pro conſequente rationis inter bina tempora.

171.

primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. I. inventa deſcribi debet.

Oper. 2. (n) Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut ſuprà: deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & (o) ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbiſque per loca illa tranſiens, (p) ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

(q) Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter

171. (n) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa

(o) * *Et ejuſdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres obſervationes radiis ad ſolem ductis deſcriptarum ratio ſit ut g, ad 1; ſitque t, tempus totum quo cometa utramque aream deſcriberet. Si deprehendatur t = S & g = C, aſſumpta plani poſitio vera erit & accurata. Sin aliter, erit, ut ſuprà in operatione 1ª, t—S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & g—C error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Uterque hic error oritur ex poſitione non ſatis accuratâ plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ.

(p) * *Ut & ejuſdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, ſitque τ tempus totum quo area tota $\delta+\varepsilon$, deſcribi debeat. Si fuerit $\tau = S$ & $\gamma = C$, aſſumpta plani trajectoriæ poſitio vera eſt & accurata. Sin contrà, erit $\tau - S$, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & $\gamma - C$, error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam.

(q) * *Jam ſit C ad* 1. Iiſdem ſervatis denominationibus quas adhibet Newtonus, inſtituatur operatio per regulam falſæ poſitionis. Ad inveniendum errorem ortum ex aſſumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum T − τ ad differentiam poſitionum T − S, ita

ter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis $+$ & $-$ probè obſervatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et ſi in operatione primâ I deſignet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. (r) Ac denique ſi in operatione primâ, ſecundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ deſignent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem latera tranſverſa reſpectivè: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum

itâ error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipſa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, error inclinationis plani in toto ſcilicet tempore inter obſervationem primam & tertiam. Simili modo dicatur, $G-\gamma : G-C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ error ejuſdem inclinationis in ratione inter bina trium obſervationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter obſervationem primam & tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t}\times P$, error verò in ratione inter bina tempora eſt $\frac{G-C}{G-g}\times P$. Eſt itaque vera & correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ $I+\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, ſive I [illegible] $\frac{\ldots C}{G-\gamma}\times Q$; & vera longitudo nodi eſt $K+\frac{T-S}{T-t}\times P$ vel $K+\frac{G-C}{G-g}\times P$. Jam verò quoniam corrigendus eſt error uterque tam in toto tempore quam in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{C-g}\times P$, ſeparatim æquari $m\times P$ hoc eſt $\frac{T-S}{T-t}=m$ & $\frac{G-C}{G-g}=m$.

171. Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q = n\times Q$, id eſt $\frac{T-S}{T-\tau}=n$, & $\frac{G-C}{G-\gamma}=n$. Hinc proveniet $mT-mt=T-S$ & $mG-mg=G-C$; item $nT-n\tau=T-S$, & $nG-ng=G-C$, undè fit $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, & $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$. Quare ſi tales quærantur numeri m & n, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{T-\tau}\times Q=n\times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{G-g}\times P=mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit n Q & error longitudinis nodi m P. Quarè vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ erit $I+nQ$, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes.

(r) * *Ac deniquè.* Nota ſint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, ſecundâ & tertiâ deſcriptarum. Deſignet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r ſecundæ, ϱ tertiæ, & trajectoriæ quam cometa deſcribit deſideretur verum latus rectum; per regulam falſæ poſitionis eâdem planè methodo quam modò adhibui-

DE MUNDI SYSTEMATE.

verum latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum latus tranſverſum trajectoriæ quam cometa deſcribit. (ſ) Dato autem latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera tranſverſa, haud ſatis accuratè determinabuntur, niſi per collationem cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ ſunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypotheſi quod ſint parabolicæ. Nam hujuſmodi trajectoriæ cum phænomenis ſemper congruent quàmproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſuprà contuli, ſed etiam ex eâ

172. hibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano exceſſus longitudinis aſſumptæ in plano ſecundo ſupra præcedentem ductus in m, & ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additur inclinationi plani primi, exceſſus inclinationis aſſumptæ in plano tertio ſupra inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejuſque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum Eclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano deſcriptæ ſive ipſi R, addi debet $mr-mR$, exceſſus ſcilicet lateris recti in plano ſecundo ſuprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere inſuper oportet $n\rho-nR$, qui eſt exceſſus lateris recti in plano tertio ſuprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit $R+mr-mR+n\rho-nR$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus tranſverſis in operatione primâ, ſecundâ & tertiâ reſpectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, eſſe verum latus tranſverſum trajectoriæ $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$.

(ſ) 172. * *Dato autem latere tranſverſo.* Accuratè deſcriptâ cometæ trajectoriâ (per metho[illegible] præced.) ſi deprehendatur ellipſim ſolis centro tanquam umbilico deſcriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta tranſire, cometa in orbem redibit & dato latere tranverſo trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit ſcilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici telluris circà ſolem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terreſtris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

eâ cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Heve io* obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, ſed minùs accuratè. Ex iiſdem obſervationibus *Halleius* noſter (u) loca cometæ hujus denuò computavit, & tum demum ex locis ſic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum aſcendentem in ♊ 21gr. 13′. 55″., inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ 21gr. 18′. 40″, diſtantiam perihelii à nodo in orbitâ 49gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine auſtrinâ heliocentricâ 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novemb.* 24^{d}. 11^{h}. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13^{h}. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, exiſtente mediocri terræ à ſole diſtantiâ 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum obſervationibus, patebit ex tabulâ ſequente ab *Halleio* ſupputatâ.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos ſuprà tradidimus, 172.

Temp. Appar. Gedani, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.	gr. ′ ″	Loca obſervata. gr. ′ ″	Loca computata in Orbe. gr. ′ ″
Decemb. 3d. 18h. 29½	à Corde Leonis	46 . 24 . 20	Long. ♎ 7. 1. 0	♎ 7. 1. 29
	a Spica Virginis	22 . 52 . 10	Lat. auſt. 21.39. 0	21 . 38 . 50
4 . 18 . 1½	à Corde Leonis	46 . 2 . 45	Long. ♎ 16.15. 0	♎ 6. 16. 5
	à Spica Virginis	23 . 52 . 40	Lat. auſt. 22.24. 0	22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	à Corde Leonis	44 . 48 . 0	Long ♎ 3. 0. 0	♎ 3. 7 . 33
	a Spica Virginis	27 . 56 . 40	Lat. auſt. 25.22. 0	25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	a Corde Leonis	53 . 15 . 15	Long. ♌ 2.56. 0	♌ 2 . 56 . 0
	ab Hum. Orionis dext.	45 . 43 . 30	Lat. auſt. 49 25. 0	49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	a Procyone	35 . 13 . 50	Long. ♊ 28.40 30	♊ 28. 43 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	52 . 56 . 0	Lat. auſt. 45.48 0	45 . 46 . 0
20 . 9 . 53½	a Procyone	40 . 49 . 0	Long. ♊ 13 3. 0	♊ 13. 5 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	40 . 4 . 0	Lat. auſt. 39.54 0	39 . 53 . 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis	26 . 21 . 25	Long. ♊ 2.16 0	♊ 2 . 18 . 30
	à Lucid. Mandib. Ceti	29 . 28 . 0	Lat. auſt. 33.41. 0	33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29 . 47 . 0	Long. ♉ 24 24. 0	♉ 24 . 27 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	20 . 29 . 30	Lat. auſt. 27.45. 0	27 . 46 0
26 . 7 . 58	à Lucida Arietis	23 . 20 . 0	Long. ♉ 9. 0. 0	♉ 9. 2 . 28
	ab Aldebaran	26 . 44 . 0	Lat. auſt. 12.36. 0	12 . 34 . 13
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis	[illegible] . 45 . 0	Long. ♉ 7. 5.40	♉ 7. 8 . 45
	ab Aldebaran	28 . 10 . 0	Lat. auſt. 10.23. 0	10 . 23 . 13
28 . 7 . 39	à Lucida Arietis	18 . 29 . 0	Long. ♉ 5.24.45	♉ 5 . 27 . 52
	à Palilicio	29 . 37 . 0	Lat. auſt. 8.22.50	8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	à Cing. Androm.	30 . 48 . 10	Long. ♉ 2. 7.40	♉ 2. 8 . 20
	à Palilicio	32 . 53 . 30	Lat. auſt. 4.13. 0	4 16 . 25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37½	à Cing. Androm.	25 . 11 . 0	Long. ♈ 28.24.47	♈ 28 24. 0
	à Palilicio	37 . 12 . 25	Lat. bor. 0.54. 0	0 . 53 . 0
13 . 7 . 0	à capite Androm.	28 . 7 . 10	Long. ♈ 27. 6.54	♈ 27. 6 . 39
	à Palilicio	38 . 55 . 20	Lat. bor. 3. 6.50	3. 7 . 40
24 . 7 . 29	a Cin. Androm.	20 . 32 . 5	Long. ♈ 26.29.15	♈ 26 . 28 . 50
	à Palilicio	40 . 5 . 0	Lat bor. 5.25.50	5 . 26 . 0
Feb. 7 . 8 . 37			Long. ♈ 27.24.46	♈ 27 . 24 . 55
			Lat. bor. 7. 3.26	7 . 3 15
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28.29.46	♈ 28 . 29 . 58
			Lat. bor. 8 12.36	8 10 25
Mar. 1 . 8 . 16			Long. ♈ 29.18.15	♈ 29 . 18 . 20
			Lat. bor. 8.36.26	8 . 36 . 12
7 . 8 . 37			Long. ♈ 0. 2.48	♉ 0. 2 . 42
			Lat. bor. 8.56.30	8 . 56 . 56

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. eScunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′.

17'. 18'' cum latitudine boreali 8gr. 28'. 16''. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. 24'. 45'' cum latitudine boreali 8gr. 28'. 33''. Cometa vero *Feb.* 7^d. 7'. 30'' *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7^d. 8'. 37'' *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtella γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & *A*, id eſt 1gr. 19'. 46'' in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. 20'. 26'' in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1gr. 20'. 26'', manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. 9'. 49''. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione cometam poſuit in ♈ 27gr. 0' circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. 59' 24''. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27gr. 4. 46''. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7gr. & 4' vel 5' boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet 7gr. 3'. 29'', exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & *A*.

Feb. 22^d. 7^h. 30' *Londini*, id eſt *Feb.* 22^d. 8^h. 46' *Gedani*, diſtantia cometæ à ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu 15'. 57''. Et diſtantia cometæ à linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4'. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. 29'. 46'', cum lat. bor. 8gr. 12'. 36''.

Mart. 1^d. 7^h. 0' *Londini*, id eſt *Mart.* 1^d. 8^h. 16' *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1gr. 33', ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ à ſecunda arietis erat 8'. 16'' ſecundum *Hookium*, vel 8'. 5'' ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8'. 10''. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die con-

fecti,

De Mundi Systemate.

fecti, id eſt 1′. 35″ circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta 1′. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

Mart. 7d. 7h. 30′ *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7d. 8h. 37′ *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantiâ cometæ à ſecundâ arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis à ſtellâ *A*, id eſt 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii* à ſe conſtructo incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Viſus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3′½ circiter.

Apparuit hic cometa menſes tres, ſignaque ferè ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoriâ à principio ad finem cum obſervationibus non minus accuratè congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo (x) angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) paral-

172. (x) * *Angulum illum* inter nodum aſcendentem & perihelium invenerat Halleïus 49°. 27′. 30″, conſtituto autem angulo illo 49°. 27′. 18″, computationibuſque repetitis, ſubducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, & theoriâ à prin-

parallaxis annua inſignis fuit, & (y) indè demonſtratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; diſtantia perihelia à ſole 56020, exiſtente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in tabulâ ſequente.

1683 Temp. Æquat		Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ Lat
	d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul.	13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
	15.11.15	2.5 .12	11.37.4	29.34. 0	11 39.43	29.34.50	+1.55	+0.50
	17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8 40	29.34. 0	+1.34	+0.30
	23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
	25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
	31 9.42	18. 9 22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26 22.25	−0.39	−0.27
	31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug.	2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25 17.28	−0.46	+1. 9
	4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
	6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
	9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
	15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3 26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
	16.15.10	3.48. 2	0 43. 7	9.34.16	0.41.5	9.34.13	−1.12	−0. 3
	18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15	♉ 24.49. 5	5. 9.11	−3.48	−2. 4
				Auſtr		Auſt.		
	22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	−0. 2	−0. 3
	23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.28
	26 16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16 38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus aſcendens (computante *Hal-*

principio ad finem cum obſervationibus congruit. Corrigendam eſſe theoriam duobus minutis primis circiter ex obſervatione cometæ, ubi motus ejus velociſſimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonſtratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum telluris quiete conciliari poſſit legatur apud Ricciolium in almageſto, Tacquetum in Aſtronomiâ alioſque paſſim, ubi de Planetarum retrogradationibus agunt. 172.

Halleio) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr 52′. 50″. Diſtantia perihelia à ſole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4^d. 7^h. 39′. Loca verò ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ ſequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	−0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29 38. 2	26.17.37	−0 47	+2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	−0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20 30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.1
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25 40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26 59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29 58.45	9.26.43	−0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0 44.10	8 49.10	♏ 0 44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, aſtronomiæ apud *Oxonienſes* profeſſore *Saviliano*) erat in ♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Diſtantia perihelia à ſole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16^d. 16^h. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* obſervatis collata exhibentur in tabulâ ſequente.

1723.

1723. Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat	Lat Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long	Differ. Latit.
d. h.	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9 . 8 . 5	♒ 7 . 22 . 15	5 . 2 . 0	♒ 7 . 21 . 26	5 . 2 47	+ 49	− 47
10 . 6 . 21	6 . 41 . 12	7 . 44 . 13	6 . 41 . 42	7 . 43 . 18	− 50	+ 55
12 . 7 . 22	5 . 39 . 58	11 . 55 . 0	5 . 40 . 19	11 . 54 . 55	− 21	+ 5
14 . 8 . 57	4 . 59 . 49	14 . 43 . 50	5 . 0 . 37	14 . 44 . 1	− 48	− 11
15 . 6 . 35	4 . 47 . 41	15 40 . 51	4 . 47 . 45	15 40 55	− 4	− 4
21 . 6 . 22	4 . 2 . 32	19 . 41 . 49	4 . 2 . 21	10 . 42 . 3	+ 11	− 14
22 . 6 . 24	3 . 59 . 2	20 . 8 . 12	3 . 59 . 10	20 . 8 . 17	− 8	− 5
24 . 8 . 2	3 . 55 . 29	20 . 55 . 18	3 . 55 11	20 . 55 . 9	+ 18	+ 9
29 . 8 . 56	3 . 56 . 17	22 . 20 . 27	3 . 56 . 42	22 . 20 . 10	− 25	+ 7
30 . 6 . 20	3 . 58 . 9	22 . 32 . 28	3 . 58 . 17	22 . 32 . 12	− 8	+ 16
Nov. 5 . 5 . 53	4 . 16 . 30	23 . 38 . 33	4 . 16 . 23	23 . 38 . 7	+ 7	+ 26
8 . 7 . 6	4 . 29 . 36	24 . 4 . 30	4 . 29 . 54	24 . 4 . 40	− 18	− 10
14 . 6 . 20	5 . 2 . 16	24 . 48 . 46	5 . 2 . 51	24 . 48 . 6	− 35	+ 30
20 . 7 . 45	5 . 42 . 20	25 . 24 . 45	5 . 43 . 13	25 . 25 . 17	− 53	− 32
Dec. 7 . 6 . 45	8 . 4 . 13	26 . 54 . 18	8 . 3 . 55	26 . 53 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam à nobis expoſitam non minus accuratè exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16ᵈ. 3ʰ. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & (a) axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}:75\times75$ ad 1, ſeu 1778 ad

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri poſſint variis methodis ſuprà expoſuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172).

172.

DE MUNDI SYSTEMATE. ad 100 circiter. Et (b) diſtantia aphelia cometæ hujus à ſole, erit ad diſtantiam mediocrem terræ à ſole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt, ſi cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altiùs aſcendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum à ſole diſtantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non eſt expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iiſdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ à cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, ſed indè migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis ſuis, ubi tardiſſimè moventur, quamlongiſſimè diſtent ab invicem, & ſe mutuò quam minime trahant. Quâ de causâ cometæ, qui altiùs deſcendunt, ideoque tardiſſimè moventur in apheliis, debent altiùs aſcendere.

Cc-

173. (b) * *Et diſtantia aphelia.* Quoniam diſtantia perihelia cometæ à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 1000000 erit eadem diſtantia perihelia 29, circiter exiſtente radio orbis magni 100, ac proinde diſtantia aphelia quæ eſt differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1778 & diſtantiam periheliam 29, erit earumdem partium 1749, ideóque diſtantia aphelia cometæ hujus à ſole erit ad diſtantiam mediocrem terræ à ſole ut 1749 ad 29, hoc eſt, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per prop. 20. lib. 1.).

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur Zodiaco.* Ex obſervato ſæpè ſæpius cometarum curſu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi Zodiaco more planetarum, ſed indè migrare & motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen Clariſſ. Caſſinus in monum. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verum eo artificio utitur Vir Doctiſſimus ut diſtantiam cometæ à terrâ vel ſole pro arbitrio aſſumat, & modò tellurem inter ſolem & cometam, modò cometam inter ſolem & tellurem ac deniquè ſolem inter cometam & tellurem, pro neceſſitate, collocet. Quâ ratione id fieri poſſit non ſatis intelligitur, niſi ignota omninò fingatur cometarum theoria; conceſſo enim aliquo cometarum ſyſtemate, diſtantias illas pro lubitu uſurpare non licet, ſed ex datis motuum elementis, cometarum diſtantia totaque trajectoria determi-

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat à ſole in perihelio ſuo quam parte ſextâ diametri ſolis; & propter ſummam velocitatem in viciniâ illâ, & denſitatem aliquam atmoſphæræ ſolis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad ſolem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad ſolem, incidet is tandem in corpus ſolis. Sed & in aphelio ubi tardiſſimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari poteſt, & ſubindè in ſolem

LIBER TERTIUS. PROP. XIII. PROBL. XXII.

terminantur. Sic Halleïus definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. & 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat Clariſſ. Caſſinus talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quam probe tamen cum obſervationibus theoria congruat oſtendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingenioſâ arte reduxerit Caſſinus, non id tamen ſatis eſſe arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè reſpondet, atquè incerti ſinè ullâ theoriâ erremus. Prætereà talem orbitam prædicto cometæ aſſignat Caſſinus ut extrà orbem annuum ferè non excurrat; Quod ſi res ità ſe haberet, hic cometa in conſpectum citò rediiſſet, cometas enim ad maximam quoquè diſtantiam conſpicuos eſſe conſtat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori ſucceſſu ad motum directum reduci poſſe videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam prætterquam quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypotheſibus everti neceſſe ſit, in explicatione Caſſini graviſſima occurrit difficultas cujus vim totam ſenſit Clariſſ. Vir. Oporteret ſcilicet ut cometa ille paulò ante 27^{am}. diem Novembris per nodum deſcendentem tranſierit & verſus diem 17^{am}. Decembris ad nodum aſcendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quam unius menſis intervallo, totum ſpatium quod eſt infrà planum Eccliptica trajeciſſet. Porrò tanta velocitas caret veriſimilitudine, nec conciliari poſſe videtur cum obſervatis longo temporis ſpatio hujus cometæ motibus; hic enim Aſtronomorum oculis citò ſeſe ſubduxiſſet. Singulas explicationes quæ in loco cit. monum. Pariſ. leguntur percurrere longiùs foret, ſatis erit addere eas hoc potiſſimum fine excogitatas fuiſſe ut nempe ſervaretur & à graviſſimâ objectione liberaretur vorticum hypotheſis. Verum his explicationibus cæteroquin ingenioſiſſimis nondum tamen propoſitus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret ſiquidem ut cometarum vortices ipſum ſaltem telluris verticem interſecarent, quod ſine vorticum perturbatione ac tandem deſtructione fieri poſſe non intelligitur. Alias hypotheſes finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà ſolem noſtrum, ſed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut ſatellites planetæ cujuſdam primarii in noſtro vortice conſtituti, qui tamen ob maximam illius à nobis diſtantiam conſpici non poteſt, ità ut cometæ ſeu ſatellites ſeſe nobis duntaxat conſpicuos præbeant, cum in inferiori & telluris proximiori orbitarum ſuarum parte verſantur. Sed à Newtonianâ cometarum theoriâ quæ phænomenis conſentanea eſt nequaquam nos removere debent hypotheſes illæ quæ eam duntaxat ob cauſam ſubtiliter inventæ ſunt ut ſervaretur vorticum hypotheſis quam aliis multis difficultatibus premi paſſim oſtendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus & ipſa, prout nobis viſum eſt, rei veritas & commentatorum officium à nobis poſtulabant.

173

ſolem incidere. (e) Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quam maximè ſplendent, & ſubindè paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedrâ Caſſiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerena minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſuâ vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maximè ſplenduit; & ex eo tempore paulatim decreſcentem & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primùm apparuit, venerem luce ſuâ æquabat. Menſe *Decembri*

174. (e) 174. * *Sic etiam ſtellæ fixæ.* De ſtellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet Clariſſ. D. De Maupertuis in eximio opuſculo de figuris aſtrorum & in mon. Pariſ. an. 1734. Fixas, quæ ſunt totidem ſoles, variis donatas eſſe figuris & ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam à ſphæroide propemodum ſphærico per innumeros gradus depreſſionis verſus polos tandem devenitur ad planum circulare, ſi continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num. 56. His poſitis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evaneſcant, cur mutetur apparens ſtellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur ſtellæ aliquæ quaſi recens accenſæ oriri viſæ ſint, quædam verò quaſi extinctæ videri deſierint. Si in ſtellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem ſuam nobis obvertunt, ſphærarum inſtar apparebunt. Si autem reſpectu noſtri ſitum ſuum mutent, magis vel minus ſtellarum illarum ſplendor decreſcet, prout hoc vel illo modo ſeſe nobis oſtendent, ac tandem exiguæ craſſitiei latus exhibeant & ſatis longe à nobis diſtent, conſpectui noſtro ſeſe omninò ſubducent. Quomodò autem fixæ reſpectu noſtri poſitionem ſuam mutent explicari poteſt, ſi ponamus circà ſtellam compreſſam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ & ad æquatorem ſtellæ inclinata; in hâc enim hypotheſi, planeta ad perihelium ſuum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, & hinc fieri poterit ut partem lucidam diſci nobis obverſam conſpiciamus quæ ob exiguam lateris compreſſi craſſitiem oculos noſtros anteà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri poſſe ut circà planetam congregetur annulus ſaturni annulo ſimilis, ſi nempe cometa cujus cauda ex vaporibus tenuiſſimis æſtu ſolis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximé potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli inſtar poſſet detorqueri; imò impoſſibile non foret ipſum quoquè corpus cometæ circà planetam rapi & ſic planeta ſatellitem acquireret. Haberet autem planeta ſatellitem ſinè annulo, ſi cometa deſtitueretur caudâ, ſed adjicietur etiam annulus, ſi cometa caudam habuerit, atquè annulus aderit ſinè ſatellite, ſi cauda duntaxat à planeta attrahatur. Hæc ſunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterùm in laudatis opuſculis elegantiſſima ſunt problemata quæ conſulat Lector.

bri nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, menſe *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evaſit æqualis. Menſe *Aprili* & *Maio* ſtellis ſecundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Auguſto* ſtellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* ſtellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, menſe *Januario* ſtellis quintæ, & menſe *Februario* ſtellis ſextæ magnitudinis æqualis videbatur, & menſe *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac ſplendidus, poſtea flavus, & anni 1573 menſe *Martio* rutilans inſtar martis aut ſtellæ aldebaran, *Maio* autem albitudinem ſublividam induxit, qualem in ſaturno cernimus, quem colorem uſque in finem ſervavit, ſemper tamen obſcurior facta. Talis etiam fuit ſtella in dextro pede ſerpentarii, quam *Kepleri* diſcipuli anno 1604, die 30 *Septembris* ſt. vet. apparere cœpiſſe obſervarunt, & luce ſuâ ſtellam jovis ſuperaſſe, cum nocte præcedente minimè apparuiſſet. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtellâ novâ ſupra modum ſplendente *Hipparchus* ad fixas obſervandas & in catalogum referendas excitatus fuiſſe dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex ſole & ſtellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in atmoſphæras planetarum & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubindè per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHO-

De Mundi Systemate.

SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypotheſis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unuſquiſque radio ad ſolem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole. Ut periodica planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à ſole, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut vortices minores circum ſaturnum, jovem & alios planetas gyrati conſerventur & tranquillè natent in vortice ſolis, tempora periodica partium vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones ſolis & planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſuprà atmoſphæram terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis ſecundum leges ſuprà expoſitas perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitùs acquirere per leges haſce minimè potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum ſolem in circulis ſoli concentricis, eâdem motus directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & ſaturnum in circulis concentricis, eâdem motus directio-

174. (f) * *Hypotheſis vorticum.* (Prop. 52. lib. 2. cum coroll. ſchol. prop. 40. lib. 2. & not. 173. lib. huj.).

tione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis mechanicis; ſiquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrimè & facillimè tranſeunt, & in apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutiùs morantur; quàm longiſſimè diſtant ab invicem, ut ſe mutuò quam minimè trahant. Elegantiſſima hæcce ſolis, planetarum & cometarum compages non niſi conſilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia ſimili conſilio conſtructa ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cum lux fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux ſolis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuò cadant, hic eadem immenſam ab invicem diſtantiam poſuerit.

Hic omnia regit non ut anima mundi, ſed ut univerſorum dominus. Et propter dominium ſuum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam deus eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio Dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus deus eſt anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt ens æternum, infinitum, abſolutè perfectum: ſed ens utcunque perfectum ſine dominio non eſt dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus veſter, deus *Iſraelis*, deus deorum, & dominus dominorum: ſed non dicimus æternus meus, æter-

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi Viri Joannes & Daniel Bernoullius, prior in phyſicâ cœleſti, poſterior in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis mechanicam horumce motuum cauſam ex vorticibus repetunt. Sed cum mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ ſint difficultatibus quibus vorticum hypotheſim premi jam oſtendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit deſcribere verba quæ habet Johan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipſo Newtoni loco. (Si cauſæ illæ non ſunt mechanicæ, erunt præternaturales & miraculo tribuendæ; ſed magnum Philoſophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.). Numquid pari jure carteſianum Philoſophum poſſumus interrogare quânam cauſâ mechanicâ vortices ſecundùm varias directiones ferantur, cur planetarum circumſolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam cauſam deductum eſt, hic hærere cauſamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum Philoſophum non dedecet.

174

(*) Id eſt Imperator univerſalis.

æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim (†) ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multò minùs in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo (‡) continentur & moventur univerſa; ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil

(†) *Pocokus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du*, (& in caſu aliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſal.* lxxxiv. 6 & *Joan.* x. 35. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii. (*Nota Autoris*).

(‡) Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Naturâ deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius*, Georgic. *lib.* iv *v* 220. & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27. 28. *Johannes* in Evang xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7. 8. 9. *Salmon* 1. Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12. 13.

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentiâ dei. Deum ſummum neceſſariò exiſtere in confeſſo eſt: Et eâdem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minimè cognoſcimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores, audimus tantùm ſonos, tangimus tantùm ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nullâ actione reflexâ cognoſcimus; & multò minùs ideam habemus ſubſtantiæ dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi, & deus ſine dominio, providentiâ, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quam fatum & natura. A cæcâ neceſſitate metaphyſicâ, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate entis neceſſariò exiſtentis ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de deo à rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de

13. 14. *Jeremias* xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ ſolem, lunam, & aſtra, animas hominum & alias mundi partes eſſe partes dei ſummi & ideò colendas ſed falsò. (*Nota Autoris*).

DE MUNDI SYSTEMATE. de quo utique ex phænomenis diſſerere, ad philoſophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cælorum & maris noſtri per vim gravitatis expoſui, ſed cauſam gravitatis nondùm aſſignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad uſque centra ſolis & planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum, in quas agit (ut ſolent cauſæ mechanicæ) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicatâ ratione diſtantiarum. Gravitas in ſolem componitur ex gravitatibus in ſingulas ſolis particulas, & recedendo à ſole decreſcit accuratè in duplicatâ ratione diſtantiarum ad uſque orbem ſaturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima cometarum aphelia; ſi modo aphelia illa quieſcant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondùm potui deducere, & hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypotheſis* vocanda eſt; & hypotheſes ſeu metaphyſicæ, ſeu phyſicæ, ſeu qualitatum occultarum, ſeu mechanicæ, in *philoſophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philoſophiâ propoſitiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod gravitas reverà exiſtat, & agat ſecundum leges à nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de ſpiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent: & corpora electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & ſenſatio omnis excitatur, & membra ani-

174. (h) * *Ut ex quiete apheliorum.* (Prop. 2. lib. huj.)

animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus ſpiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & à cerebro in muſculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus ſpiritus accuratè determinari & monſtrari debent.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROB. XXII.

(i) * *Sed hæc paucis exponi non poſſunt.* De hoc ſubtiliſſimo ſpiritu plurimas quæſtiones ſibi proponit Newtonus in tractatu opticæ. 174

FINIS.

INDEX LIBRI TERTII.

Regulæ Philosophandi. Pag. 2.
Phoenomena. 6
Propositiones. 22

INDEX PROPOSITIONUM TOTIUS OPERIS.

IN TOMO PRIMO.

Axiomata sive Leges motus. Lex I. *Corpus omne perſeverat in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quâtenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.* Pag. 20

Lex II. *Mutatio motus proportionalis eſt vi motrici impreſſæ & fit ſecundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.* 21

Lex III. *Actioni contraria ſemper & æqualis eſt reactio: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuò ſemper ſunt æquales & in contrarias partes diriguntur.* 23

Propositio I. Theorema I. *Areæ quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis, deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtunt & ſunt temporibus proportionales.* 89

Prop II. Theor. II. *Corpus omne quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ & radio ducto ad punctum*

vel

vel immobile vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeturque à vi centripetâ tendente ad idem punctum. Pag. 92

PROP. III. THEOR. III. *Corpus omne quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſitâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.* 94

PROP. IV. THEOR. IV. *Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorumdem circulorum tendere, & eſſe inter ſe ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.* 96

PROP. V. PROBLEMA I. *Datâ quibuſcunque in locis velocitate quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.* 105

PROP. VI. THEOR. V. *Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur & arcum quemvis jamjam naſcente tempore quàm minimo deſcribat & ſagitta arcûs duci intelligatur quæ cordam biſecet & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut ſagitta directè & tempus bis inversè.* 106

PROP. VII. PROBL. II. *Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.* 111

PROP. VIII. PROBL. III. *Moveatur corpus in ſemicirculo* PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeò longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.* 114

PROP. IX. PROBL. IV. *Gyretur corpus in ſpirali* PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ &c. *in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.* 136

PROP. X. PROBL. V. *Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.* 137

PROP. XI. PROBL. VI. *Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.*

ſeos. Pag. 153

Prop. XII. Probl. VII. *Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.* 156

Prop. XIII. Probl. VIII. *Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.* 160

Prop. XIV. Theor. VI. *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.* 163

Prop. XV. Theor. VII. *Iiſdem poſitis, dico quod tempora periodica in ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium.* 164

Prop. XVI. Theor. VIII. *Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inverſè & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.* 165

Prop. XVII. Probl. IX. *Poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundùm datam rectam egrediens.* 170

Prop. XVIII. Probl. X. *Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data & rectas poſitione datas contingent.* 176

Prop. XIX. Probl. XI. *Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.* 176

Prop. XX. Probl. XII. *Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.* 178

Prop.

Prop. XXI. Probl. XIII. *Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.* Pag. 185

Prop. XXII. Probl. XIV. *Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.* 207

Prop. XXIII. Probl. XV. *Trajectoriam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.* 210

Prop. XXIV. Probl. XVI. *Trajectoriam deſcribere quæ per data tria puncta & rectas duas poſitione datas continget.* 214

Prop. XXV. Probl. XVII. *Trajectoriam deſcribere, quæ per data duo puncta tranſibit & rectas tres continget poſitione datas.* 223

Prop. XXVI. Probl. XVIII. *Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per punctum datum & rectas quatuor poſitione datas continget.* 226

Prop. XXVII. Probl. XIX. *Trajectoriam deſcribere quæ rectas quinque poſitione datas continget.* 232

Prop. XXVIII. Probl. XX. *Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.* 250

Prop. XXIX. Probl. XXI. *Trajectoriam ſpecie datam deſcribere quæ à rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie, & proportione datas.* 256

Prop. XXX. Probl. XXII. *Corporis in data trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.* 259

Prop. XXXI. Probl. XXIII. *Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum.* 270

Prop. XXXII. Probl. XXIV. *Poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, ſpatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus deſcribit.* 292

Prop. XXXIII. Theor. IX. *Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum deſcribentis, in ſubdu-*

plicatâ ratione quam AC *diſtantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB. Pag. 294

Prop. XXXIV. Theor. X. *Si figura* BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.* 297

Prop. XXXV. Theor. XI. *Iiſdem poſitis dico quod area figuræ* DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando eodem tempore deſcribere poteſt.* 298

Prop. XXXVI. Probl. XXV. *Corporis de loco dato* A *cadentis determinare tempora deſcenſus.* 301

Prop. XXXVII. Probl. XXVI. *Corporis de loco dato ſursùm vel deorsùm projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.* 302

Prop. XXXVIII. Theor. XII. *Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta, ſunt arcubus arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.* 303

Prop. XXXIX. Probl. XXVII. *Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectà aſcendentis vel deſcendentis tùm velocitas in locis ſingulis, tùm tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.* 305

Prop. XL. Theor. XIII. *Si corpus cogente vi quâcunque centripetâ moveatur utcunque, & corpus aliud rectà aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.* 312

Prop. XLI. Probl XXVIII. *Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.* 318

Prop. XLII. Probl. XXIX. *Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate ſecundùm datam rectam egreſſi.* Pag. 332

Prop. XLIII. Probl. XXX. *Efficiendum eſt ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quieſcente.* 334

Prop. XLIV. Theor. XIV. *Differentia virium quibus corpus in orbe quieſcente & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt eſt in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.* 336

Prop. XLV. Probl. XXXI. *Orbium qui ſunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apſidum.* 348

Prop. XLVI. Probl. XXXII. *Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis; requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundùm rectam in plano illo datam egreſſi.* 361

Prop. XLVII. Theor. XV. *Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque diſcurrendo ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.* 362

Prop. XLVIII. Theor. XVI. *Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloïdem vel Epicycloïdem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.* 364

Prop. XLIX. Theor. XVII. *Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad*

duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi. Pag. 364

Prop. L. Probl. XXXIII. *Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloïde datâ.* 370

Prop. LI. Theor. XVIII. *Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum* C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloïdis* QRS*: dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.* 374

Prop. LII. Probl. XXXIV. *Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis & tempora quibus oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.* 377

Prop. LIII. Probl. XXXV. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.* 384

Prop. LIV. Probl. XXXVI. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis invenire tempora quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.* 390

Prop. LV. Theor. XIX. *Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.* 392

Prop. LVI. Probl. XXXVII. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum Lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam Corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, versùm plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.* 396

Prop. LVII. Theor. XX. *Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circùm commune centrum gravitatis, & circùm ſe mutuò figuras ſimiles.* 404

Prop. LVIII. Theor. XXI. *Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò*

mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circùm ſe mutuò, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi. Pag. 406

PROP. LIX. THEOR. XXII. *Corporum duorum* S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris quas corpora circùm ſe mutuò deſcribunt figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S+P. 409

PROP. LX. THEOR. XXIII. *Si corpora duo* S *&* P, *viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipſeos quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem ellipſeos quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S+P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* S. 410

PROP. LXI. THEOR. XXIV. *Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita quomodocunque moveantur, motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.* 411

PROP. LXII. PROBL. XXXVIII. *Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur determinare motus.* 412

PROP. LXIII. PROBL. XXXIX. *Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus ſe mutuò trahunt, deque locis datis, ſecundùm datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.* 412

PROP. LXIV. PROBL. XL. *Viribus quibus corpora ſe mutuò trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum à centris: requi-*

quiruntur motus plurium corporum inter ſe. Pag. 415

Prop. LXV. Theor. XXV. *Corpora plura quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorumdem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quamproximè.* 418

Prop. LXVI. Theor. XXVI. *Si corpora tria quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum, ſe mutuò trahant; & attractioness acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm ſi maximum illud vel à minoribus non attractum quieſcat, vel multò minùs vel multò magis attractum; aut multò minùs aut multò magis agitetur.* 421

Prop. LXVII. Theor. XXVII. *Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* PT, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.* 459

Prop. LXVIII. Theor. XXVIII. *Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P & T, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm ſi id vel non attractum quieſcat, vel multò magis aut multò minùs attractum aut multò magis aut multò minùs agitetur.* 460

Prop. LXIX. Theor. XXIX. *In ſyſtemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. Si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B,

B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente, & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.* Pag. 462

Prop. LXX. Theor. XXX. *Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intrà ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.* 465

Prop. LXXI. Theor. XXXI. *Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.* 466

Prop. LXXII Theor. XXXII. *Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tùm ſphæræ denſitas, tùm ratio Diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiatro ſphæræ.* 468

Prop. LXXIII. Theor. XXXIII. *Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.* 470

Prop. LXXIV. Theor. XXXIV. *Iiſdem poſitis dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.* 470

Prop. LXXV. Theor. XXXV. *Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis, dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.* 471

Prop. LXXVI. Theor. XXXVI. *Si ſphæræ in progreſſu à centro*

tro

tro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum. Pag. 474

Prop. LXXVII. Theor. XXXVII. *Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuò trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.* 476

Prop. LXXVIII. Theor. XXXVIII. *Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuò trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.* 478

Prop. LXXIX. Theor. XXXIX. *Si ſuperficies ab latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens* EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DEq×Ff, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.* 481

Prop. LXXX. Theor. XL. *Si ad ſphæræ alicujus* ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ; & ad ſphæræ* AB, *in quo corpuſculum aliquod* B *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particu-*

la

la ſita in axe ad diſtantiam PE exercet in corpuſculum P trahitur verſus ſphæram, eſt ut area ANB comprehenſa ſub axe ſphæræ AB, & lineâ curvâ ANB, quam punctum N perpetuò tangit. Pag. 483
Prop. LXXXI. Probl. XLI. Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ANB. 486
Prop. LXXXII. Theor. XLI. In ſphærâ centro S, intervallo SA deſcripta, ſi capiantur SI, SA, SP, continuè proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis I, attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco P, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro IS, PS, & ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium. 496
Prop. LXXXIII. Probl. XLII. Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur. 500
Prop. LXXXIV. Probl. XLIII. Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento. 502
Prop. LXXXV. Theor. XLII. Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quàm cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis. 503
Prop. LXXXVI. Theor. XLIII. Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm trahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem. 503
Prop. LXXXVII. Theor. XLIV. Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: artractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota, erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particu-

ticulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas. Pag. 504
PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV. *Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis, & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.* 506
PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI. *Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum à ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, quâ corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.* 508
PROP. XC. PROBL. XLIV. *Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim, quâ corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in rectâ quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.* ibid.
PROP. XCI. PROBL. XLV. *Invenire attractionem Corpuſculi ſiti in axe ſolidi rotundi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque diſtantiarum ratione decreſcentes.* 511
PROP. XCII. PROBL. XLVI. *Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.* 520
PROP. XCIII. THEOR. XLVII. *Si ſolidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à ſolido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquàm quadraticæ, & vi ſolidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod ſolidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quàm index poteſtatis diſtantiarum.* 522
PROP. XCIV. THEOR. XLVIII. *Si media duo ſimilaria, ſpatio pla-*

planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; ſit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ. Pag. 535

Prop. XCV. Theor. XLIX. *Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.* 536

Prop. XCVI. Theor. L. *Iiſdem poſitis, & quod motus ante incidentiam velocior ſit quàm poſtea, dico quòd corpus inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.* 537

Prop. XCVII. Probl. XLVII. *Poſito quod ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderare poſſit: determinare ſuperficiem, quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.* 542

Prop. XCVIII. Probl. XLVIII. *Iiſdem poſitis, & circa axem* AB *deſcriptâ ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.* 546

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI PRIMI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI SECUNDI
IN TOMO SECUNDO.

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus, eſt ut ſpatium movendo confectum.* Pag. 17

PROP. II. THEOR. II. *Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione geometricâ, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.* 18

PROP. III. PROBL. I. *Corporis cui, dùm in medio ſimilari rectà aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.* 20

PROP. IV. PROBL. II. *Poſito quòd vis gravitatis in medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum projectilis in eodem reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.* 27

PROP. V. THEOR. III. *Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare moveatur; tempora verò ſumantur in progreſſione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione geometricâ inversè, & quòd ſpatia ſunt æqualia quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.* 46

PROP. VI. THEOR. IV. *Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciprocè ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amit-*

amittunt partes velocitatum proportionales totis. Pag. 52

PROP. VII. THEOR. V. *Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in ratione duplicatâ velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.* ibid.

PROP. VIII. THEOR. VI. *Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectà aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.* 61

PROP. IX. THEOR. VII. *Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi à loco ſummo ut ſector hyperbolæ.* 64

PROP. X. PROBL. III. *Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.* 79

PROP. XI. THEOR. VIII. *Si corpori reſiſtitur, partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.* 121

PROP. XII. THEOR. IX. *Iiſdem poſitis, dico quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.* 123

PROP. XIII. THEOR. X. *Poſito quod corpus ab uniformi*

 gravi-

gravitate deorsùm attractum rectà aſcendit vel deſcendit; & quòd eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ: dico quod, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis à centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contrà. Pag. 125

Prop. XIV. Theor. XI. *Iiſdem poſitis, dico quod ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione arithmeticâ; ſi vires ex reſiſtentiâ & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione geometricâ.* 131

Prop. XV. Theor. XII. *Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.* 146

Prop. XVI. Theor. XIII. *Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.* 158

Prop. XVII. Probl. IV. *Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ ſpirali, datâ velocitatis lege revolvi poteſt.* 160

Prop. XVIII. Probl. V. *Datâ lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, quâ corpus datam ſpiralem deſcribet.* 161

Prop. XIX. Theor. XIV. *Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.* 166

Pro-

Prop. XX. Theor. XV. *Si fluidi ſphærici & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis, partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.* Pag. 168

Prop. XXI. Theor. XVI. *Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorsùm trahentur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.* 174

Prop. XXII. Theor. XVII. *Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorsùm trahantur: dico quod ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometricâ.* 177

Prop. XXIII. Theor. XVIII. *Si fluidi ex particulis ſe mutuò fugentibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuò fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.* 186

Prop. XXIV. Theor. XIX. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.* 189

Prop. XXV. Theor. XX. *Corpora funependula quibus, in medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloïde eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.* 194

Prop. XXVI. Theor. XXI. *Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloïde ſunt Iſochronæ.* 197

Prop. XXVII. Theor. XXII. *Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quamproximè.* Pag. 198
Prop. XXVIII. Theor. XXIII. *Si corpori funependulo in Cycloïde oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcûs deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.* 202
Prop. XXIX. Probl. VI. *Poſito quod corpori in Cycloïde oſcillanti reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.* 204
Prop. XXX. Theor. XXIV. *Si recta* AB *æqualis ſit Cycloïdis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK *quæ ſint ad longitudinem penduli ut reſiſtentia corporis in arcûs punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.* 212
Prop. XXXI. Theor. XXV. *Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione, differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.* 219
Prop. XXXII. Theor. XXVI. *Si corporum ſyſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales ſingulæ in uno ſyſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant (eæ inter ſe quæ in uno ſunt ſyſtemate & eæ inter ſe quæ in altero) & ſi non tangant ſe mutuò quæ in eodem ſunt ſyſtemate niſi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant ſe mutuò, niſi viribus accele-*
ratri-

ratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod ſyſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Pag. 250

Prop. XXXIII. Theor. XXVII. *Iiſdem poſitis, dico quod ſyſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum ſuarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.* 254

Prop. XXXIV. Theor. XXVIII. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtante, ſecundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplò minor quàm reſiſtentia cylindri.* 258

Prop. XXXV. Probl. VII. *Si medium rarum ex particulis quàmminimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.* 275

Prop. XXXVI. Probl. VIII. *Aquæ, de vaſe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis, definire motum.* 280

Prop. XXXVII. Theor. XXIX. *Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundùm longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim quâ totus ejus motus, interea dùm quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè.* 301

Prop. XXXVIII. Theor. XXX. *Globi in fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi quamproximè.* 312

Prop. XXXIX. Theor. XXXI. *Globi, per fluidum in canali cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim quâ totus ejus motus intereà dùm octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum*

hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſuprà circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproximè. Pag. 316

Prop. XL. Probl. IX. *Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis invenire reſiſtentiam per phænomena.* 316

Prop. XLI. Theor. XXXII. *Preſſio non propagatur per fluidum ſecundùm lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.* 340

Prop. XLII. Theor. XXXIII. *Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramte in ſpatia immota.* 342

Prop. XLIII. Theor. XXXIV. *Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.* 353

Prop. XLIV. Theor. XXXV. *Si aqua in canalis cruribus erectis* KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat, conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.* 355

Prop. XLV. Theor. XXXVI. *Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.* 357

Prop. XLVI. Probl. X. *Invenire velocitatem undarum.* *ibid.*

Prop. XLVII. Theor. XXXVII. *Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.* 360

Prop. XLVIII. Theor. XXXVIII. *Pulſuum in fluido elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.* 384

Prop. XLIX. Probl. XI. *Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.* 387

Prop. L. Probl. XII. *Invenire pulſuum diſtantias.* 390

Pro-

Index Lemmatum Newtoni.

Lib. 1.

Lemma	Sect.	Prop.	Tom. 1. p.
1	1		62
2	1		62
3	1		63
4	1		64
5	1		66
6	1		67
7	1		68
8	1		69
9	1		70
10	1		71
11	1		73
12	2	inter Prop. 9 & 10	137
13	3	12 & 13	159
14	3	12 & 13	159
15	4	17 & 18	175
16	4	20 & 21	184
17	5	21 & 22	188
18	5	21 & 22	190
19	5	21 & 22	196
20	5	21 & 22	198
21	5	21 & 22	200
22	5	24 & 25	216
23	5	26 & 27	227
24	5	26 & 27	228
25	5	26 & 27	230
26	5	27 & 28	247
27	5	28 & 29	251
28	6	30 & 31	259
29	10	78 & 79	400

PROPOSITI

Lib. 2.

1	Sect: 1	inter Prop. 1 & 2	Tom. 2 p. 17
2	2	7 & 8	55
3	4	14 & 15	145
4	7	36 & 37	300
5	7	37 & 38	310
6	7	37 & 38	310
7	7	37 & 38	310

Lib. 3

1	inter Prop. 38 & 39	Tom. 3 p. 550
2	38 & 39	553
3	38 & 39	557
4	39 & 40	563
5	40 & 41	582
6	40 & 41	585
7	40 & 41	586
8	40 & 41	586
9	40 & 41	593
10	40 & 41	593
11	40 & 41	596

Prop. LI. Theor. XXXIX. *Si cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluïdi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.* Pag. 398

Prop. LII. Theor. XL. *Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ.* 403

Prop. LIII. Theor. XLI. *Corpora quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum vortice, & eadem lege cum ipſius partibus quoad velocitatem & curſus determinationem moventur.* 419

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI TERTII
IN TOMO III. PARTE PRIMA.

PRROPOSITIO I. THEOREMA I. *Vires quibus Planetæ circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.* Pag. 22

PROP. II. THEOR. II. *Vires quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.* *ibid.*

PROP. III. THEOR. III. *Vim quâ Luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere Terram & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.* 23

PROP. IV. THEOR. IV. *Lunam gravitare in Terram & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo & in orbe ſuo retineri.* 25

PROP. V. THEOR. V. *Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, circum ſaturnios in Saturnum & circumſolares in Solem & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.* 31

PROP. VI. THEOR. VI. *Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.* 33

PROP. VII. THEOR. VII. *Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.* 43

PROP. VIII. THEOR. VIII. *Si globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia, undique in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum re-*

cipro-

ciprocè ut quadratum diſtantiæ inter centra. Pag. 45
PROP. IX. THEOR. IX. *Gravitatem pergendo à ſuperficiebus planetarum deorsùm decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quamproximè.* 53
PROP. X. THEOR. X. *Motus Planetarum in Cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.* 53
PROP. XI. THEOR. XI. *Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere.* 58
PROP. XII. THEOR. XII. *Solem motu perpetuò agitari; ſed nunquam longè diſcedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.* 58
PROP. XIII. THEOR. XIII. *Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.* 60
PROP. XIV. THEOR. XIV. *Orbium aphelia & nodi quieſcunt.* 62
PROP. XV. PROBL. I. *Invenire orbium principales diametros.* 66
PROP. XVI. PROBL. II. *Invenire orbium excentricitates & aphelia.* 67
PROP. XVII. THEOR. XV. *Planetarum motus diurnos uniformes eſſe; & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.* 68
PROP. XVIII. THEOR. XVI. *Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.* 72
PROP. XIX. PROBL. III. *Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.* 73
PROP. XX. PROBL. IV. *Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diverſis.* 103
PROP. XXI. THEOR. XVII. *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.* 117
PROP. XXII. THEOR. XVIII. *Motus omnes lunares ex allatis principiis conſequi.* 119
PROP. XXIII. PROBL. V. *Motus inæquales ſatellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.* 120
PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Fluxum ac refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.* 122

IN TOMO III. PARTE SECUNDA.

Prop. XXV. Probl. VI. *Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.* Pag. 375
Prop. XXVI. Probl. VII. *Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari deſcribit.* 379
Prop. XXVII. Probl. VIII. *Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam à Terrâ.* 391
Prop. XXVIII. Probl. IX. *Invenire Diametros orbis in quo Luna, ſine excentricitate moveri deberet.* 392
Prop. XXIX. Probl. X. *Invenire variationem Lunæ.* 400
Prop. XXX. Probl. XI. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.* 407
Prop. XXXI. Probl. XII. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico.* 424
Prop. XXXII. Probl. XIII. *Invenire motum medium nodorum Lunæ.* 435
Prop. XXXIII. Probl. XIV. *Invenire motum verum nodorum Lunæ.* 445
Prop. XXXIV. Probl. XV. *Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.* 464
Prop. XXXV. Probl. XVI. *Dato tempore invenire inclinationem orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.* 471
Prop. XXXVI. Probl. XVII. *Invenire vim Solis ad Mare movendum.* 537
Prop. XXXVII. Probl. XVIII. *Invenire vim Lunæ ad mare movendum.* 539
Prop. XXXVIII. Probl. XIX. *Invenire figuram corporis Lunæ.* 547
Prop. XXXIX. Probl. XX. *Invenire præceſſionem Æquinoctiorum.* 560
Prop. XL. Theor. XX. *Cometas in ſectionibus conicis umbilicos*